# 4 Funciones polinomiales



**Barraca quonset** ***(pág. 218)***


**Mejillones** ***(pág. 203)***


**Ruinas de Cesarea** ***(pág. 195)***


**Básquetbol** ***(pág. 178)***

**Vehículos eléctricos** ***(pág. 161)***

# Mantener el dominio de las matemáticas

## Simplificar expresiones algebraicas

**Ejemplo 1** **Simplifica la expresión $9x + 4x$.**

$$9x + 4x = (9 + 4)x \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= 13x \qquad \text{Suma los coeficientes.}$$

**Ejemplo 2** **Simplifica la expresión $2(x + 4) + 3(6 - x)$.**

$$2(x + 4) + 3(6 - x) = 2(x) + 2(4) + 3(6) + 3(-x) \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= 2x + 8 + 18 - 3x \qquad \text{Multiplica.}$$

$$= 2x - 3x + 8 + 18 \qquad \text{Agrupa los términos semejantes.}$$

$$= -x + 26 \qquad \text{Combina los términos semejantes.}$$

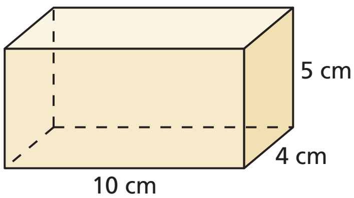
### Simplifica la expresión.

**1.** $6x - 4x$ **2.** $12m - m - 7m + 3$ **3.** $3(y + 2) - 4y$

**4.** $9x - 4(2x - 1)$ **5.** $-(z + 2) - 2(1 - z)$ **6.** $-x^2 + 5x + x^2$

## Hallar el volumen

**Ejemplo 3** **Halla el volumen de un prisma rectangular de 10 centímetros de longitud, 4 centímetros de ancho y 5 centímetros de altura.**




$$\text{Volumen} = \ell wh \qquad \text{Escribe la fórmula del volumen.}$$

$$= (10)(4)(5) \qquad \text{Sustituye 10 por } \ell\text{, 4 por } w \text{ y 5 por } h.$$

$$= 200 \qquad \text{Multiplica.}$$

▶ El volumen es 200 centímetros cúbicos.

### Halla el volumen del cuerpo geométrico.

**7.** Un cubo con longitud de lado de 4 pulgadas.

**8.** Una esfera con radio de 2 pies.

**9.** Un prisma rectangular con longitud de 4 pies, ancho de 2 pies y altura de 6 pies.

**10.** Un cilindro recto con radio de 3 centímetros y 5 altura de centímetros.

**11.** **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** ¿Si duplicas el volumen de un cubo tendrá el mismo efecto en la longitud de los lados? Explica tu razonamiento.

# Prácticas matemáticas

*Los estudiantes que dominan las matemáticas usan herramientas tecnológicas para explorar conceptos.*

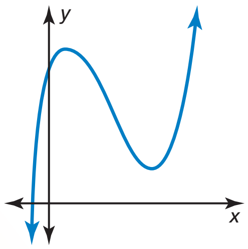
## Usar la tecnología para explorar conceptos

### Concepto Esencial

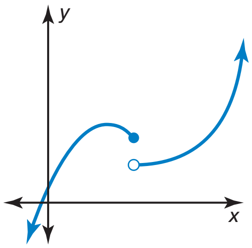
**Funciones continuas**

Una función es *continua* cuando su gráfica no tiene interrupciones, huecos o brechas.

Gráfica de una función continua




Gráfica de una función no continua



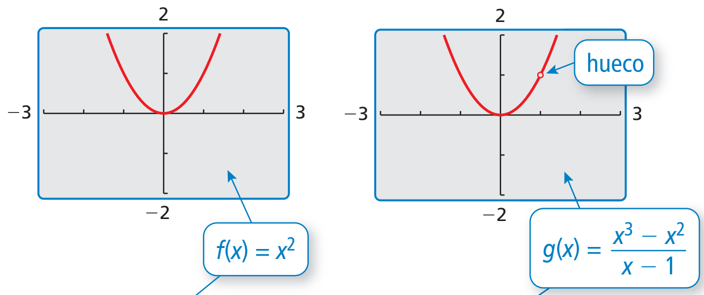

**EJEMPLO 1** **Determinar si las funciones son continuas**

Usa una calculadora gráfica para comparar las dos funciones. ¿Cuál es tu conclusión? ¿Cuál de las funciones no es continua?

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$$

**SOLUCIÓN**

Las gráficas parecen ser idénticas, pero $g$ no está definida cuando $x = 1$. Hay un *hueco* en la gráfica de $g$ en el punto (1, 1.) Con la función *tabla* de la calculadora gráfica, obtienes un error para $g(x)$ cuando $x = 1$. Por lo tanto, $g$ no es continua.




| X | Y1 |
|---|---|
| −1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |

Y1=1

| X | Y1 |
|---|---|
| −1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | ERROR |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |

Y1=ERROR

## Monitoreo del progreso

**Usa una calculadora gráfica para determinar si la función es continua. Explica tu razonamiento.**

**1.** $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$

**2.** $f(x) = x^3 - 3$

**3.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

**4.** $f(x) = |x + 2|$

**5.** $f(x) = \frac{1}{x}$

**6.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

**7.** $f(x) = x$

**8.** $f(x) = 2x - 3$

**9.** $f(x) = \frac{x}{x}$

# 4.1 Hacer gráficas de funciones polinomiales

## Pregunta esencial

¿Cuáles son algunas de las características comunes de las gráficas de las funciones polinomiales cúbicas y cuárticas?

Una *función polinomial* de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, es *cúbica* cuando $n = 3$ y es *cuártica* cuando $n = 4$.

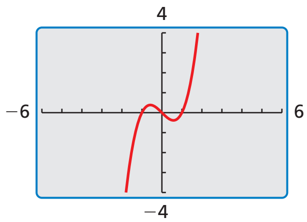
### EXPLORACIÓN 1 Identificar gráficas de funciones polinomiales

**Trabaja con un compañero.** Une cada función polinomial con su gráfica. Explica tu razonamiento. Usa una calculadora gráfica para verificar tus respuestas.

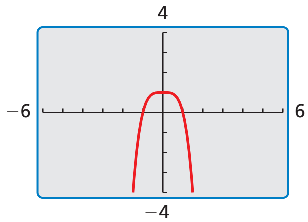
**a.** $f(x) = x^3 - x$ **b.** $f(x) = -x^3 + x$ **c.** $f(x) = -x^4 + 1$

**d.** $f(x) = x^4$ **e.** $f(x) = x^3$ **f.** $f(x) = x^4 - x^2$

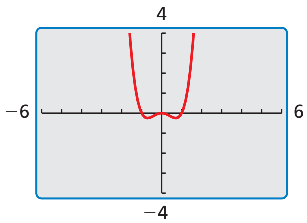
**A.**



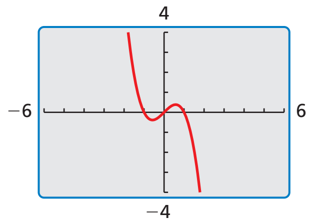

**B.**



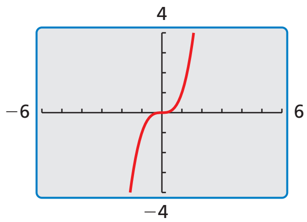

**C.**



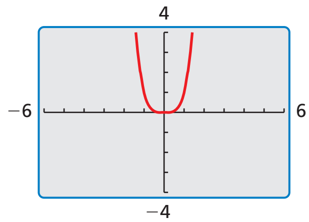

**D.**




**E.**




**F.**




### EXPLORACIÓN 2 Identificar intersecciones con el eje *x* de gráficas polinomiales

**Trabaja con un compañero.** Cada una de las gráficas polinomiales en la Exploración 1 tiene intersecciones con el eje *x* de −1, 0, o 1. Identifica la(s) intersección(es) con el eje *x* de cada gráfica. Explica cómo puedes verificar tus respuestas.

**CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES**

Para dominar las matemáticas, necesitas justificar tus conclusiones y comunicárselas a otras personas.

## Comunicar tu respuesta

**3.** ¿Cuáles son algunas de las características comunes de las gráficas de las funciones polinomiales cúbicas y cuárticas?

**4.** Determina si cada enunciado es *verdadero* o *falso*. Justifica tu respuesta.

**a.** Cuando la gráfica de una función polinomial cúbica se eleva hacia la izquierda, ésta cae hacia la derecha.

**b.** Cuando la gráfica de una función polinomial cuártica cae hacia la izquierda, ésta se eleva hacia la derecha.

# 4.1 Lección

## Vocabulario Esencial

polinomio, *pág. 158*
función polinomial, *pág. 158*
comportamiento de los extremos, *pág. 159*

***Anterior***
monomio
función lineal
función cuadrática

## Qué aprenderás

- Identificar las funciones polinomiales.
- Hacer una gráfica de las funciones polinomiales usando tablas y el comportamiento de los extremos.

## Funciones polinomiales

Recuerda que un monomio es un número, una variable o el producto de un número y una o más variables con exponentes de números enteros. Un **polinomio** es un monomio o una suma de monomios. Una **función polinomial** es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, los exponentes son todos números enteros y los coeficientes son todos números reales. Para esta función, $a_n$ es el coeficiente principal, $n$ es el grado, y $a_0$ es el término constante. Una función polinomial está en *forma estándar* cuando sus términos están escritos en exponentes por orden descendente de izquierda a derecha.

Ya estás familiarizado con algunos tipos de funciones polinomiales, tales como la función lineal y la función cuadrática. A continuación tienes un resumen de los tipos comunes de funciones polinomiales.

**Funciones polinomiales comunes**

| Grado | Tipo | Forma estándar | Ejemplo |
|---|---|---|---|
| 0 | Constante | $f(x) = a_0$ | $f(x) = -14$ |
| 1 | Lineal | $f(x) = a_1x + a_0$ | $f(x) = 5x - 7$ |
| 2 | Cuadrática | $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ | $f(x) = 2x^2 + x - 9$ |
| 3 | Cúbica | $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ | $f(x) = x^3 - x^2 + 3x$ |
| 4 | Cuártica | $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ | $f(x) = x^4 + 2x - 1$ |

### EJEMPLO 1 Identificar funciones polinomiales

Decide si cada función es una función polinomial. Si lo es, escríbela en forma estándar e indica su grado, tipo y coeficiente principal.

**a.** $f(x) = -2x^3 + 5x + 8$

**b.** $g(x) = -0.8x^3 + \sqrt{2}x^4 - 12$

**c.** $h(x) = -x^2 + 7x^{-1} + 4x$

**d.** $k(x) = x^2 + 3^x$

**SOLUCIÓN**

**a.** La función es una función polinomial que ya está escrita en forma estándar. Es de grado 3 (cúbica) y tiene un coeficiente principal de $-2$.

**b.** La función es una función polinomial escrita como $g(x) = \sqrt{2}x^4 - 0.8x^3 - 12$ en forma estándar. Es de grado 4 (cuártica) y tiene un coeficiente principal de $\sqrt{2}$.

**c.** La función no es una función polinomial porque el término $7x^{-1}$ tiene un exponente que no es un número entero.

**d.** La función no es una función polinomial porque el término $3^x$ no tiene una base variable ni un exponente que sea un número entero.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Decide si la función es una función polinomial. Si lo es, escríbela en forma estándar e indica su grado, tipo y coeficiente principal.**

**1.** $f(x) = 7 - 1.6x^2 - 5x$ **2.** $p(x) = x + 2x^{-2} + 9.5$ **3.** $q(x) = x^3 - 6x + 3x^4$

## EJEMPLO 2 Evaluar una función polinomial

Evalúa $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 5x - 7$ cuando $x = 3$.

**SOLUCIÓN**

| | |
|---|---|
| $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 5x - 7$ | Escribe la ecuación original. |
| $f(3) = 2(3)^4 - 8(3)^2 + 5(3) - 7$ | Sustituye 3 por $x$. |
| $= 162 - 72 + 15 - 7$ | Evalúa las potencias y multiplica. |
| $= 98$ | Simplifica. |

El **comportamiento de los extremos** de la gráfica de una función es el comportamiento de la gráfica en la medida que $x$ se aproxima al infinito positivo ($+\infty$) o infinito negativo ($-\infty$.) Para la gráfica de la función polinomial, el comportamiento de los extremos se determina por el grado de la función y el signo de su coeficiente principal.

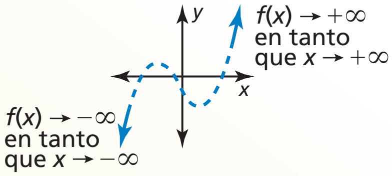
### LEER

La expresión "$x \to +\infty$" se lee como "$x$ se aproxima al infinito positivo".

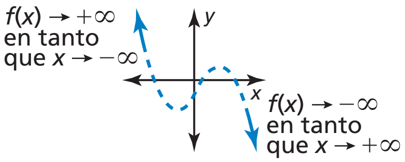
## Concepto Esencial

### Comportamiento de los extremos de las funciones polinomiales

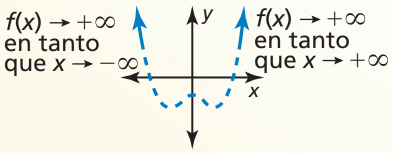
**Grado:** impar
**Coeficiente principal:** positivo



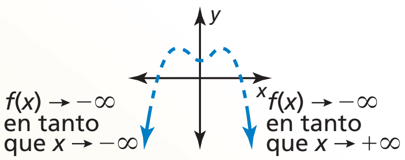

**Grado:** impar
**Coeficiente principal:** negativo




**Grado:** par
**Coeficiente principal:** positivo




**Grado:** par
**Coeficiente principal:** negativo



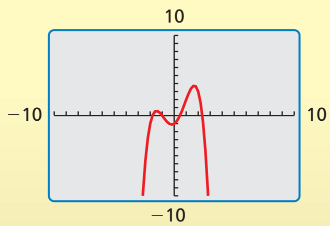

## EJEMPLO 3 Describir el comportamiento de los extremos

Describe el comportamiento de los extremos de la gráfica de $f(x) = -0.5x^4 + 2.5x^2 + x - 1$.

**SOLUCIÓN**

La función es de grado 4 y tiene un coeficiente principal de $-0.5$. Dado que el grado es par y el coeficiente principal es negativo, $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to +\infty$. Verifícalo haciendo una gráfica de la función en una calculadora gráfica, tal como se muestra.

**Verifica**




### Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Evalúa la función del valor dado de $x$.**

4. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9$; $x = 4$
5. $f(x) = 3x^5 - x^4 - 6x + 10$; $x = -2$
6. Describe el comportamiento de los extremos de la gráfica de $f(x) = 0.25x^3 - x^2 - 1$.

## Hacer gráficas de funciones polinomiales

Para hacer una gráfica de una función polinomial, primero marca los puntos para determinar la figura de la porción media de la gráfica. Luego, conecta los puntos con una curva continua suave y usa tus conocimientos sobre comportamiento de los extremos para dibujar la gráfica.

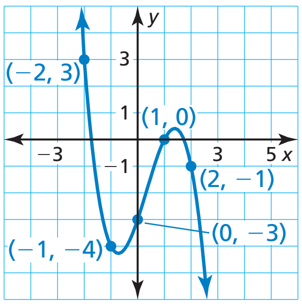
### EJEMPLO 4 Hacer gráficas de funciones polinomiales

Haz una gráfica de (a) $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 3$ y (b) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4$.

**SOLUCIÓN**

**a.** Para trazar una gráfica de la función, haz una tabla de valores y marca los puntos correspondientes. Conecta los puntos con una curva suave y verifica el comportamiento de los extremos.

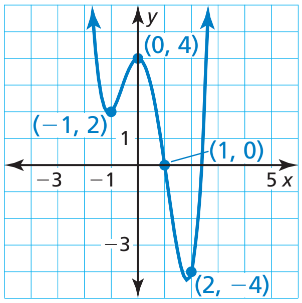
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | $-4$ | $-3$ | $0$ | $-1$ |




El grado es impar y el coeficiente principal es negativo. Entonces, $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to +\infty$.

**b.** Para trazar una gráfica de la función, haz una tabla de valores y marca los puntos correspondientes. Conecta los puntos con una curva suave y verifica el comportamiento de los extremos.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $12$ | $2$ | $4$ | $0$ | $-4$ |




El grado es par y el coeficiente principal es positivo. Entonces, $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to +\infty$.

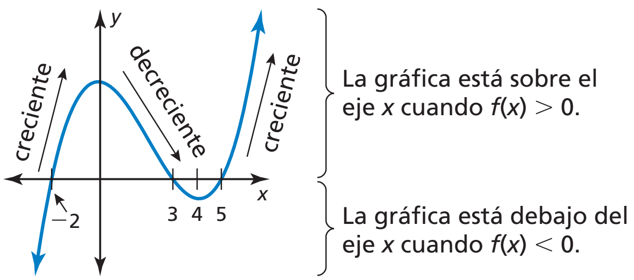
### EJEMPLO 5 Dibujar una gráfica

Dibuja una gráfica de la función polinomial $f$ que tenga las siguientes características:

- $f$ es creciente cuando $x < 0$ y $x > 4$.
- $f$ es decreciente cuando $0 < x < 4$.
- $f(x) > 0$ cuando $-2 < x < 3$ y $x > 5$.
- $f(x) < 0$ cuando $x < -2$ y $3 < x < 5$.

Usa la gráfica para describir el grado y el coeficiente principal de $f$.

**SOLUCIÓN**




▶ Basándote en la gráfica, $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to +\infty$. Entonces, el grado es impar y el coeficiente principal es positivo.


## EJEMPLO 6 Resolver un problema de la vida real

El número estimado $V$ (en miles) de vehículos eléctricos en uso en los Estados Unidos se puede representar mediante la función polinomial

$$V(t) = 0.151280t^3 - 3.28234t^2 + 23.7565t - 2.041$$

donde $t$ representa el año, y $t = 1$ corresponde a 2001.

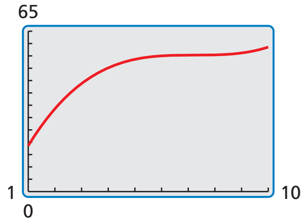
**a.** Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función del intervalo $1 \leq t \leq 10$. Describe el comportamiento de la gráfica en este intervalo.

**b.** ¿Cuál fue la tasa promedio de cambio en el número de vehículos eléctricos en uso desde 2001 hasta 2010?

**c.** ¿Crees que este modelo se puede usar para años anteriores a 2001 o posteriores a 2010? Explica tu razonamiento.

### SOLUCIÓN

**a.** Usando una calculadora gráfica y una ventana de visualización de $1 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 65$, obtienes la gráfica que se muestra a continuación.




▶ Desde 2001 hasta 2004, el número de vehículos eléctricos en uso aumentó. Cerca del 2005, el aumento de las cifras de los vehículos en uso menguó y comenzó a nivelarse. Luego en el 2009 y 2010, las cifras de los vehículos en uso comenzaron a aumentar nuevamente.

**b.** Los años 2001 y 2010 corresponden a $t = 1$ y $t = 10$.

La tasa promedio de cambio sobre $1 \leq t \leq 10$:

$$\frac{V(10) - V(1)}{10 - 1} = \frac{58.57 - 18.58444}{9} \approx 4.443$$

▶ La tasa promedio de cambio desde 2001 hasta 2010 es aproximadamente 4.4 miles de vehículos eléctricos por año.

**c.** Dado que el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, $V(t) \to -\infty$ en tanto que $t \to -\infty$ y $V(t) \to +\infty$ en tanto que $t \to +\infty$. El comportamiento de los extremos indica que el modelo tiene crecimiento ilimitado en la medida en que $t$ aumenta. Aunque el modelo puede ser válido durante algunos años después del 2010, el crecimiento ilimitado no es razonable a largo plazo. Observa que en el 2000 la $V(0) = -2.041$. Dado que los valores negativos de $V(t)$ no tienen sentido en el contexto (vehículos eléctricos en uso), el modelo no debería usarse en años anteriores a 2001.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Haz una gráfica de la función polinomial.**

**7.** $f(x) = x^4 + x^2 - 3$

**8.** $f(x) = 4 - x^3$

**9.** $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

**10.** Dibuja una gráfica de la función polinomial $f$ que tenga las siguientes características:

- $f$ es decreciente cuando $x < -1.5$ y $x > 2.5$; $f$ es creciente cuando $-1.5 < x < 2.5$.
- $f(x) > 0$ cuando $x < -3$ y $1 < x < 4$; $f(x) < 0$ cuando $-3 < x < 1$ y $x > 4$.

Usa la gráfica para describir el grado y el coeficiente principal de $f$.

**11.** **¿QUÉ PASA SI?** Repite el Ejemplo 6 usando el modelo alternativo para vehículos eléctricos de

$$V(t) = -0.0290900t^4 + 0.791260t^3 - 7.96583t^2 + 36.5561t - 12.025.$$

# 4.1 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Explica qué quiere decir comportamiento de los extremos de una función polinomial.

2. **¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Cuál de las siguientes funciones *no* corresponde al grupo de las otras tres? Explica tu razonamiento.

| | |
|---|---|
| $f(x) = 7x^5 + 3x^2 - 2x$ | $g(x) = 3x^3 - 2x^8 + \frac{3}{4}$ |
| $h(x) = -3x^4 + 5x^{-1} - 3x^2$ | $k(x) = \sqrt{3}x + 8x^4 + 2x + 1$ |

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 3–8, decide si la función es una función polinomial. Si lo es, escríbela en forma estándar e indica su grado, tipo y coeficiente principal.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $f(x) = -3x + 5x^3 - 6x^2 + 2$

4. $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4x^3 + 6x^4 - 1$

5. $f(x) = 9x^4 + 8x^3 - 6x^{-2} + 2x$

6. $g(x) = \sqrt{3} - 12x + 13x^2$

7. $h(x) = \frac{5}{3}x^2 - \sqrt{7}x^4 + 8x^3 - \frac{1}{2} + x$

8. $h(x) = 3x^4 + 2x - \frac{5}{x} + 9x^3 - 7$

**ANÁLISIS DE ERRORES** **En los Ejercicios 9 y 10, describe y corrige el error del análisis de la función.**

9. $f(x) = 8x^3 - 7x^4 - 9x - 3x^2 + 11$

> ✗ $f$ es una función polinomial. El grado es 3 y $f$ es una función cúbica.
> El coeficiente principal es 8.

10. $f(x) = 2x^4 + 4x - 9\sqrt{x} + 3x^2 - 8$

> ✗ $f$ es una función polinomial.
> El grado es 4 y $f$ es una función cuártica.
> El coeficiente principal es 2.

**En los Ejercicios 11–16, evalúa la función del valor dado de $x$.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

11. $h(x) = -3x^4 + 2x^3 - 12x - 6;\ x = -2$

12. $f(x) = 7x^4 - 10x^2 + 14x - 26;\ x = -7$

13. $g(x) = x^6 - 64x^4 + x^2 - 7x - 51;\ x = 8$

14. $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 5x + 1;\ x = -12$

15. $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 6x + 7;\ x = \frac{1}{2}$

16. $h(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 4;\ x = -\frac{1}{3}$

**En los Ejercicios 17–20, describe el comportamiento de los extremos de la gráfica de la función.** *(Consulta el Ejemplo 3).*

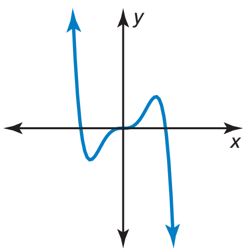
17. $h(x) = -5x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

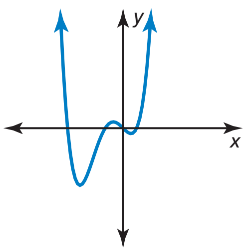
18. $g(x) = 7x^7 + 12x^5 - 6x^3 - 2x - 18$

19. $f(x) = -2x^4 + 12x^8 + 17 + 15x^2$

20. $f(x) = 11 - 18x^2 - 5x^5 - 12x^4 - 2x$

**En los Ejercicios 21 y 22, describe el grado y el coeficiente principal de la función polinomial usando la gráfica.**

21.



22.


**23.** **USAR LA ESTRUCTURA** Determina si la función es una función polinomial. Si lo es, escríbela en forma estándar e indica su grado, tipo y coeficiente principal.

$$f(x) = 5x^3x + \frac{5}{2}x^3 - 9x^4 + \sqrt{2}x^2 + 4x - 1 - x^{-5}x^5 - 4$$

**24.** **ESCRIBIR** Imagina que $f(x) = 13$. Indica el grado, tipo y coeficiente principal. Describe el comportamiento de los extremos de la función. Explica tu razonamiento.

**En los Ejercicios 25–32, haz una gráfica de la función polinomial.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

**25.** $p(x) = 3 - x^4$

**26.** $g(x) = x^3 + x + 3$

**27.** $f(x) = 4x - 9 - x^3$

**28.** $p(x) = x^5 - 3x^3 + 2$

**29.** $h(x) = x^4 - 2x^3 + 3x$

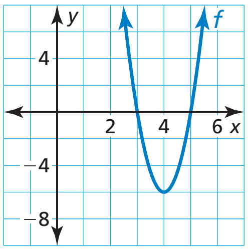
**30.** $h(x) = 5 + 3x^2 - x^4$

**31.** $g(x) = x^5 - 3x^4 + 2x - 4$

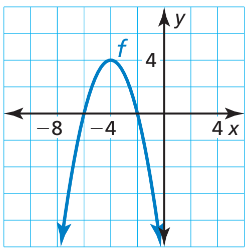
**32.** $p(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^3 + x + 5$

**ANALIZAR RELACIONES** **En los Ejercicios 33–36, describe los valores de $x$ para los cuales (a) $f$ es creciente o decreciente, (b) $f(x) > 0$, y (c) $f(x) < 0$.**

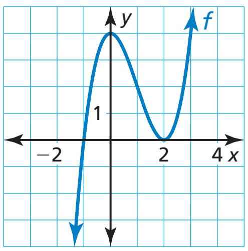
**33.**



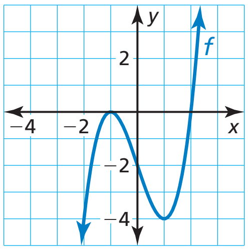

**34.**




**35.**




**36.**




**En los Ejercicios 37–40, dibuja una gráfica de la función polinomial $f$ que tenga las características dadas. Usa la gráfica para describir el grado y el coeficiente principal de la función $f$.** *(Consulta el Ejemplo 5).*

**37.**
- $f$ es creciente cuando $x > 0.5$; $f$ es decreciente cuando $x < 0.5$.
- $f(x) > 0$ cuando $x < -2$ y $x > 3$; $f(x) < 0$ cuando $-2 < x < 3$.

**38.**
- $f$ es creciente cuando $-2 < x < 3$; $f$ es decreciente cuando $x < -2$ y $x > 3$.
- $f(x) > 0$ cuando $x < -4$ y $1 < x < 5$; $f(x) < 0$ cuando $-4 < x < 1$ y $x > 5$.

**39.**
- $f$ es creciente cuando $-2 < x < 0$ y $x > 2$; $f$ es decreciente cuando $x < -2$ y $0 < x < 2$.
- $f(x) > 0$ cuando $x < -3$, $-1 < x < 1$, y $x > 3$; $f(x) < 0$ cuando $-3 < x < -1$ y $1 < x < 3$.

**40.**
- $f$ es creciente cuando $x < -1$ y $x > 1$; $f$ es decreciente cuando $-1 < x < 1$.
- $f(x) > 0$ cuando $-1.5 < x < 0$ y $x > 1.5$; $f(x) < 0$ cuando $x < -1.5$ y $0 < x < 1.5$.

**41.** **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Desde 1980 hasta 2007, el número de auto–cines en los Estados Unidos se puede representar mediante la función

$$d(t) = -0.141t^3 + 9.64t^2 - 232.5t + 2421$$

donde $d(t)$ es el número de auto–cines al aire libre y $t$ es el número de años posteriores a 1980. *(Consulta el Ejemplo 6).*

**a.** Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función del intervalo $0 \leq t \leq 27$. Describe el comportamiento de la gráfica en este intervalo.

**b.** ¿Cuál es la tasa de cambio promedio en el número de auto–cines desde 1980 hasta 1995 y desde 1995 hasta 2007? Interpreta el promedio de las tasas de cambio.

**c.** ¿Crees que se puede usar este modelo para años anteriores a 1980 o posteriores a 2007? Explica.


**42.** **RESOLVER PROBLEMAS** El peso de un diamante de corte redondo ideal se puede representar mediante

$$w = 0.00583d^3 - 0.0125d^2 + 0.022d - 0.01$$

donde $w$ es el peso del diamante (en quilates) y $d$ es el diámetro (en milímetros.) De acuerdo con el modelo, ¿cuál es el peso de un diamante de 12 milímetros de diámetro?

**43.** **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Supón que $f(x) \to \infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to \infty$. Describe el comportamiento de los extremos de $g(x) = -f(x)$. Justifica tu respuesta.

**44.** **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe una función polinomial de grado par tal que el comportamiento de los extremos de $f$ esté dado por $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to \infty$. Justifica tu respuesta dibujando la gráfica de tu función.

**45.** **USAR HERRAMIENTAS** Al usar una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función polinomial, explica cómo sabes cuándo es apropiada la ventana de visualización.

**46.** **ARGUMENTAR** Tu amigo usa la tabla para especular que la función $f$ es un polinomio de grado par y que la función $g$ es un polinomio de grado impar. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

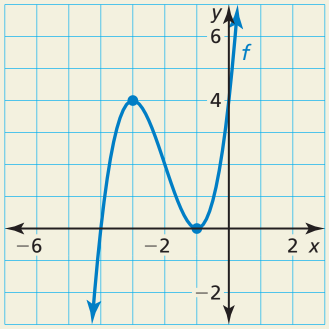
| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| −8 | 4113 | 497 |
| −2 | 21 | 5 |
| 0 | 1 | 1 |
| 2 | 13 | −3 |
| 8 | 4081 | −495 |

**47.** **SACAR CONCLUSIONES** La gráfica de una función es simétrica con respecto al eje $y$ si por cada punto $(a, b)$ en la gráfica, $(-a, b)$ es también un punto en la gráfica. La gráfica de una función es simétrica con respecto al origen si por cada punto $(a, b)$ en la gráfica, $(-a, -b)$ es también un punto en la gráfica.

**a.** Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función $y = x^n$ donde $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. En cada caso, identifica la simetría de la gráfica.

**b.** Predice qué simetría tiene cada una de las gráficas de $y = x^{10}$ y $y = x^{11}$. Explica tu razonamiento y luego confirma tus predicciones dibujando la gráfica.

**48.** **¿CÓMO LO VES?** Se muestra la gráfica de una función polinomial.




**a.** Describe el grado y coeficiente principal de $f$.

**b.** Describe los intervalos en donde la función es creciente y decreciente.

**c.** ¿Cuál es el término constante de la función polinomial?

**49.** **RAZONAR** Una función polinomial cúbica $f$ tiene un coeficiente principal de 2 y un término constante de $-5$. Cuando $f(1) = 0$ y $f(2) = 3$, ¿qué es $f(-5)$? Explica tu razonamiento.

**50.** **PENSAMIENTO CRÍTICO** El peso $y$ (en libras) de una trucha arcoíris se puede representar mediante $y = 0.000304x^3$, donde $x$ es la longitud (en pulgadas) de la trucha.

**a.** Escribe una función que relacione el peso $y$ y la longitud $x$ de una trucha arcoíris cuando $y$ se mide en kilogramos y $x$ se mide en centímetros. Usa el hecho de que 1 kilogramo $\approx$ 2.20 libras y 1 centímetro $\approx$ 0.394 pulgadas.

**b.** Haz una gráfica de la función original y la función de la parte (a) en el mismo plano de coordenadas. ¿Qué tipo de transformación puedes aplicar a la gráfica de $y = 0.000304x^3$ para generar la gráfica de la parte (a)?

## Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Simplifica la expresión.** *(Manual de revisión de destrezas)*

**51.** $xy + x^2 + 2xy + y^2 - 3x^2$

**52.** $2h^3g + 3hg^3 + 7h^2g^2 + 5h^3g + 2hg^3$

**53.** $-wk + 3kz - 2kw + 9zk - kw$

**54.** $a^2(m - 7a^3) - m(a^2 - 10)$

**55.** $3x(xy - 4) + 3(4xy + 3) - xy(x^2y - 1)$

**56.** $cv(9 - 3c) + 2c(v - 4c) + 6c$

# 4.2 Sumar, restar y multiplicar polinomios

## Pregunta esencial

¿Cómo puedes elevar al cubo un binomio?

### EXPLORACIÓN 1 Elevar al cubo un binomio

**Trabaja con un compañero.** Halla los productos. Muestra los pasos que has seguido.

**a.** $(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)^2$ — Reescribe como producto de la primera y la segunda potencias.

$= (x + 1)$ ______ — Multiplica la segunda potencia.

$=$ ______ — Multiplica el binomio y el trinomio.

$=$ ______ — Escribe en forma estándar, $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

**b.** $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$ — Reescribe como producto de la primera y la segunda potencias.

$= (a + b)$ ______ — Multiplica la segunda potencia.

$=$ ______ — Multiplica el binomio y el trinomio.

$=$ ______ — Escribe en forma estándar.

**c.** $(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)^2$ — Reescribe como producto de la primera y la segunda potencias.

$= (x - 1)$ ______ — Multiplica la segunda potencia.

$=$ ______ — Multiplica el binomio y el trinomio.

$=$ ______ — Escribe en forma estándar.

**d.** $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$ — Reescribe como producto de la primera y la segunda potencias.

$= (a - b)$ ______ — Multiplica la segunda potencia.

$=$ ______ — Multiplica el binomio y el trinomio.

$=$ ______ — Escribe en forma estándar.

**BUSCAR UNA ESTRUCTURA**

Para dominar las matemáticas, necesitas observar con atención para discernir un patrón o una estructura.

### EXPLORACIÓN 2 Generalizar patrones para elevar al cubo un binomio

**Trabaja con un compañero.**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

**a.** Usa los resultados de la Exploración 1 para describir un patrón para los coeficientes de los términos al desarrollar el cubo de un binomio. ¿Cómo se relaciona tu patrón con el triángulo de Pascal que se muestra a la derecha?

**b.** Usa los resultados de la Exploración 1 para describir un patrón para los exponentes de los términos en el desarrollo del cubo de un binomio.

**c.** Explica cómo puedes usar los patrones que has descrito en las partes (a) y (b) para hallar el producto $(2x - 3)^3$. Luego halla este producto.

## Comunicar tu respuesta

**3.** ¿Cómo puedes elevar al cubo un binomio?

**4.** Halla los productos.

**a.** $(x + 2)^3$ **b.** $(x - 2)^3$ **c.** $(2x - 3)^3$

**d.** $(x - 3)^3$ **e.** $(-2x + 3)^3$ **f.** $(3x - 5)^3$

# 4.2 Lección

## Vocabulario Esencial

Triángulo de Pascal, *pág. 169*

***Anterior***
términos semejantes
identidad

## Qué aprenderás

- Sumar y restar polinomios.
- Multiplicar polinomios.
- Usar el Triángulo de Pascal para desarrollar polinomios.

## Sumar y restar polinomios

Recuerda que el conjunto de enteros es *cerrado* bajo la suma y la resta porque toda suma o diferencia da como resultado un entero. Para sumar o restar polinomios, necesitas sumar o restar los coeficientes de los términos semejantes. Dado que al sumar o restar polinomios obtienes como resultado un polinomio, el conjunto de polinomios es cerrado bajo la suma y la resta.

### EJEMPLO 1 Sumar polinomios verticalmente y horizontalmente

**a.** Suma $3x^3 + 2x^2 - x - 7$ y $x^3 - 10x^2 + 8$ en formato vertical.

**b.** Suma $9y^3 + 3y^2 - 2y + 1$ y $-5y^2 + y - 4$ en formato horizontal.

**SOLUCIÓN**

**a.**

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^3 + & 2x^2 & - x & - 7 \\ + & x^3 - & 10x^2 & & + 8 \\ \hline & 4x^3 - & 8x^2 & - x & + 1 \end{array}$$

**b.** $$\begin{aligned}(9y^3 + 3y^2 - 2y + 1) + (-5y^2 + y - 4) &= 9y^3 + 3y^2 - 5y^2 - 2y + y + 1 - 4 \\ &= 9y^3 - 2y^2 - y - 3\end{aligned}$$

Para restar un polinomio de otro, suma el opuesto. Para hacer esto, cambia el signo de cada término del polinomio restado y luego suma los términos resultantes semejantes.

### ERROR COMÚN

Un error común es olvidar de cambiar los signos correctamente al restar un polinomio de otro. Asegúrate de sumar el opuesto de *todos* los términos del polinomio restado.

### EJEMPLO 2 Restar polinomios verticalmente y horizontalmente

**a.** Resta $2x^3 + 6x^2 - x + 1$ de $8x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ en formato vertical.

**b.** Resta $3z^2 + z - 4$ de $2z^2 + 3z$ en formato horizontal.

**SOLUCIÓN**

**a.** Alinea términos semejantes, luego suma el opuesto del polinomio restado.

$$\begin{array}{r} 8x^3 - 3x^2 - 2x + 9 \\ -\ (2x^3 + 6x^2 - \ \ x + 1) \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 8x^3 - 3x^2 - 2x + 9 \\ +\quad -2x^3 - 6x^2 + \ \ x - 1 \\ \hline 6x^3 - 9x^2 - \ \ x + 8 \end{array}$$

**b.** Escribe el opuesto del polinomio restado, luego suma los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(2z^2 + 3z) - (3z^2 + z - 4) &= 2z^2 + 3z - 3z^2 - z + 4 \\ &= -z^2 + 2z + 4\end{aligned}$$

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Halla la suma o la diferencia.**

**1.** $(2x^2 - 6x + 5) + (7x^2 - x - 9)$

**2.** $(3t^3 + 8t^2 - t - 4) - (5t^3 - t^2 + 17)$

## Multiplicar polinomios

Para multiplicar dos polinomios, multiplicas cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. Como en el caso de la suma y la resta, el conjunto de polinomios es cerrado bajo la multiplicación.

**RECUERDA**

Propiedad del producto de las potencias

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a$ es un número real y $m$ y $n$ son enteros.

### EJEMPLO 3 Multiplicar polinomios verticalmente y horizontalmente

**a.** Multiplica $-x^2 + 2x + 4$ y $x - 3$ en formato vertical.

**b.** Multiplica $y + 5$ y $3y^2 - 2y + 2$ en formato horizontal.

**SOLUCIÓN**

**a.**

$$\begin{array}{rrrrl}
 & -x^2 & +\,2x & +\,4 & \\
\times & & x & -\,3 & \\
\hline
 & 3x^2 & -\,6x & -\,12 & \text{Multiplica } -x^2 + 2x + 4 \text{ por } -3. \\
-x^3 & +\,2x^2 & +\,4x & & \text{Multiplica } -x^2 + 2x + 4 \text{ por } x. \\
\hline
-x^3 & +\,5x^2 & -\,2x & -\,12 & \text{Combina los términos semejantes.}
\end{array}$$

**b.**

$$\begin{aligned}
(y + 5)(3y^2 - 2y + 2) &= (y + 5)3y^2 - (y + 5)2y + (y + 5)2 \\
&= 3y^3 + 15y^2 - 2y^2 - 10y + 2y + 10 \\
&= 3y^3 + 13y^2 - 8y + 10
\end{aligned}$$

### EJEMPLO 4 Multiplicar tres binomios

Multiplica $x - 1$, $x + 4$ y $x + 5$ en formato horizontal.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned}
(x - 1)(x + 4)(x + 5) &= (x^2 + 3x - 4)(x + 5) \\
&= (x^2 + 3x - 4)x + (x^2 + 3x - 4)5 \\
&= x^3 + 3x^2 - 4x + 5x^2 + 15x - 20 \\
&= x^3 + 8x^2 + 11x - 20
\end{aligned}$$

Algunos productos binomiales ocurren tan frecuentemente que vale la pena memorizar sus patrones. Puedes verificar estas identidades polinomiales con una multiplicación.

**ERROR COMÚN**

En general,

$(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2$

y

$(a \pm b)^3 \neq a^3 \pm b^3$.

## Concepto Esencial

### Patrones de productos especiales

**Suma y diferencia**

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Ejemplo**

$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

**Cuadrado de un binomio**

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**Ejemplo**

$(y + 4)^2 = y^2 + 8y + 16$

$(2t - 5)^2 = 4t^2 - 20t + 25$

**Cubo de un binomio**

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

**Ejemplo**

$(z + 3)^3 = z^3 + 9z^2 + 27z + 27$

$(m - 2)^3 = m^3 - 6m^2 + 12m - 8$

## EJEMPLO 5 Comprobar una identidad polinomial

**a.** Comprueba la identidad polinomial para el cubo de un binomio que representa una suma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

**b.** Usa el cubo de un binomio en la parte (a) para calcular $11^3$.

### SOLUCIÓN

**a.** Desarrolla y simplifica la expresión en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b)\\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\\ &= (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark\end{aligned}$$

▶ El lado izquierdo simplificado es igual al lado derecho de la identidad original. Entonces, la identidad $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ es verdadera.

**b.** Para calcular $11^3$ usando el cubo de un binomio, observa que $11 = 10 + 1$.

| | |
|---|---|
| $11^3 = (10 + 1)^3$ | Escribe 11 como 10 + 1. |
| $= 10^3 + 3(10)^2(1) + 3(10)(1)^2 + 1^3$ | Cubo de un binomio |
| $= 1000 + 300 + 30 + 1$ | Desarrolla. |
| $= 1331$ | Simplifica. |

**RECUERDA**

Propiedad de la potencia de un producto

$(ab)^m = a^mb^m$

$a$ y $b$ son números reales y $m$ es un entero.

## EJEMPLO 6 Usar patrones de productos especiales

Halla cada uno de los productos.

**a.** $(4n + 5)(4n - 5)$ **b.** $(9y - 2)^2$ **c.** $(ab + 4)^3$

### SOLUCIÓN

| | |
|---|---|
| **a.** $(4n + 5)(4n - 5) = (4n)^2 - 5^2$ | Suma y diferencia |
| $= 16n^2 - 25$ | Simplifica. |
| **b.** $(9y - 2)^2 = (9y)^2 - 2(9y)(2) + 2^2$ | Cuadrado de un binomio |
| $= 81y^2 - 36y + 4$ | Simplifica. |
| **c.** $(ab + 4)^3 = (ab)^3 + 3(ab)^2(4) + 3(ab)(4)^2 + 4^3$ | Cubo de un binomio |
| $= a^3b^3 + 12a^2b^2 + 48ab + 64$ | Simplifica. |

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Halla el producto.**

**3.** $(4x^2 + x - 5)(2x + 1)$

**4.** $(y - 2)(5y^2 + 3y - 1)$

**5.** $(m - 2)(m - 1)(m + 3)$

**6.** $(3t - 2)(3t + 2)$

**7.** $(5a + 2)^2$

**8.** $(xy - 3)^3$

**9.** (a) Comprueba la identidad polinomial del cubo de un binomio que represente una diferencia $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(b) Usa el cubo de un binomio en la parte (a) para calcular $9^3$.

## Triángulo de Pascal

Considera el desarrollo del binomio $(a + b)^n$ para los valores de los números enteros de $n$. Cuando ordenes los coeficientes de las variables en el desarrollo de $(a + b)^n$, verás un patrón especial llamado **triángulo de Pascal**. El triángulo de Pascal lleva el nombre del matemático francés Blaise Pascal (1623−1662).

## Concepto Esencial

### Triángulo de Pascal

En el triángulo de Pascal, el primer y el último número de cada fila es 1. Todo número distinto a 1 es la suma de los dos números más cercanos de la fila directamente sobre él. Los números en el triángulo de Pascal son los mismos que están en el desarrollo de los coeficientes binomiales, tal como se muestra en las primeras seis filas.

| | **$n$** | **$(a+b)^n$** | **Desarrollo del binomio** | **Triángulo de Pascal** |
|---|---|---|---|---|
| Fila 0 | 0 | $(a+b)^0 =$ | $1$ | 1 |
| 1.ª fila | 1 | $(a+b)^1 =$ | $1a + 1b$ | 1 1 |
| 2.ª fila | 2 | $(a+b)^2 =$ | $1a^2 + 2ab + 1b^2$ | 1 2 1 |
| 3.ª fila | 3 | $(a+b)^3 =$ | $1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ | 1 3 3 1 |
| 4.ª fila | 4 | $(a+b)^4 =$ | $1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$ | 1 4 6 4 1 |
| 5.ª fila | 5 | $(a+b)^5 =$ | $1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$ | 1 5 10 10 5 1 |

En general, la fila $n$ en el triángulo de Pascal da los coeficientes de $(a + b)^n$. Estas son algunas otras observaciones acerca del desarrollo de $(a + b)^n$.

1. Un desarrollo tiene términos $n + 1$.
2. La potencia de $a$ comienza con $n$, disminuye de a 1 en cada término sucesivo y termina con 0.
3. La potencia de $b$ comienza con 0, aumenta de a 1 en cada término sucesivo y termina con $n$.
4. La suma de las potencias de cada uno de los términos es $n$.

### EJEMPLO 7 Usar el triángulo de Pascal para desarrollar binomios

Usa el triángulo de Pascal para desarrollar (a) $(x - 2)^5$ y (b) $(3y + 1)^3$.

**SOLUCIÓN**

**a.** Los coeficientes de la quinta fila del triángulo de Pascal son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.

$$(x-2)^5 = 1x^5 + 5x^4(-2) + 10x^3(-2)^2 + 10x^2(-2)^3 + 5x(-2)^4 + 1(-2)^5$$
$$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

**b.** Los coeficientes de la tercera fila del triángulo de Pascal son 1, 3, 3 y 1.

$$(3y+1)^3 = 1(3y)^3 + 3(3y)^2(1) + 3(3y)(1)^2 + 1(1)^3$$
$$= 27y^3 + 27y^2 + 9y + 1$$

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

10. Usa el triángulo de Pascal para desarrollar (a) $(z + 3)^4$ y (b) $(2t - 1)^5$.

# 4.2 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Describe tres métodos diferentes para desarrollar $(x + 3)^3$.

2. **ESCRIBIR** ¿Es $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ una identidad? Explica tu razonamiento.

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 3–8, halla la suma.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $(3x^2 + 4x - 1) + (-2x^2 - 3x + 2)$

4. $(-5x^2 + 4x - 2) + (-8x^2 + 2x + 1)$

5. $(12x^5 - 3x^4 + 2x - 5) + (8x^4 - 3x^3 + 4x + 1)$

6. $(8x^4 + 2x^2 - 1) + (3x^3 - 5x^2 + 7x + 1)$

7. $(7x^6 + 2x^5 - 3x^2 + 9x) + (5x^5 + 8x^3 - 6x^2 + 2x - 5)$

8. $(9x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + 7) + (11x^4 - 4x^2 - 11x - 9)$

**En los Ejercicios 9–14, halla la diferencia.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

9. $(3x^3 - 2x^2 + 4x - 8) - (5x^3 + 12x^2 - 3x - 4)$

10. $(7x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 5x + 6) - (2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 4)$

11. $(5x^6 - 2x^4 + 9x^3 + 2x - 4) - (7x^5 - 8x^4 + 2x - 11)$

12. $(4x^5 - 7x^3 - 9x^2 + 18) - (14x^5 - 8x^4 + 11x^2 + x)$

13. $(8x^5 + 6x^3 - 2x^2 + 10x) - (9x^5 - x^3 - 13x^2 + 4)$

14. $(11x^4 - 9x^2 + 3x + 11) - (2x^4 + 6x^3 + 2x - 9)$

15. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Durante un reciente periodo de tiempo, los números (en millares) de hombres $M$ y mujeres $F$ que asisten a instituciones de educación superior en los Estados Unidos se puede representar mediante

$M = 19.7t^2 + 310.5t + 7539.6$

$F = 28t^2 + 368t + 10127.8$

donde $t$ es tiempo en años. Escribe un polinomio para representar el número total de personas que asisten a instituciones de educación superior. Interpreta su término constante.

16. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un granjero planta un jardín que contiene maíz y calabazas. El área total (en pies cuadrados) del jardín está representada mediante la expresión $2x^2 + 5x + 4$. El área del maíz está representada mediante la expresión $x^2 - 3x + 2$. Escribe una expresión que represente el área de las calabazas.

**En los Ejercicios 17–24, halla el producto.** *(Consulta el Ejemplo 3).*

17. $7x^3(5x^2 + 3x + 1)$

18. $-4x^5(11x^3 + 2x^2 + 9x + 1)$

19. $(5x^2 - 4x + 6)(-2x + 3)$

20. $(-x - 3)(2x^2 + 5x + 8)$

21. $(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 3x - 5)$

22. $(3x^2 + x - 2)(-4x^2 - 2x - 1)$

23. $(3x^3 - 9x + 7)(x^2 - 2x + 1)$

24. $(4x^2 - 8x - 2)(x^4 + 3x^2 + 4x)$

**ANÁLISIS DE ERRORES** **En los Ejercicios 25 y 26, describe y corrige el error al hacer las operaciones.**

25. ✗

$$(x^2 - 3x + 4) - (x^3 + 7x - 2)$$
$$= x^2 - 3x + 4 - x^3 + 7x - 2$$
$$= -x^3 + x^2 + 4x + 2$$

26. ✗

$$(2x - 7)^3 = (2x)^3 - 7^3$$
$$= 8x^3 - 343$$

**En los Ejercicios 27–32, halla el producto de los binomios.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

**27.** $(x - 3)(x + 2)(x + 4)$

**28.** $(x - 5)(x + 2)(x - 6)$

**29.** $(x - 2)(3x + 1)(4x - 3)$

**30.** $(2x + 5)(x - 2)(3x + 4)$

**31.** $(3x - 4)(5 - 2x)(4x + 1)$

**32.** $(4 - 5x)(1 - 2x)(3x + 2)$

**33.** **RAZONAR** Comprueba la identidad polinomial $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Luego da un ejemplo de dos números enteros mayores que 10 que se puedan multiplicar usando el cálculo mental y la identidad dada. Justifica tus respuestas. *(Consulta el Ejemplo 5).*

**34.** **SENTIDO NUMÉRICO** Se te ha pedido ordenar los libros de texto de tu clase. Necesitas ordenar 29 libros que cuestan $31 cada uno. Explica cómo puedes usar la identidad polinomial $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ y el cálculo mental para hallar el costo total de los libros de texto.


**En los Ejercicios 35–42, halla el producto.** *(Consulta el Ejemplo 6).*

**35.** $(x - 9)(x + 9)$

**36.** $(m + 6)^2$

**37.** $(3c - 5)^2$

**38.** $(2y - 5)(2y + 5)$

**39.** $(7h + 4)^2$

**40.** $(9g - 4)^2$

**41.** $(2k + 6)^3$

**42.** $(4n - 3)^3$

**En los Ejercicios 43–48, usa el triángulo de Pascal para desarrollar el binomio.** *(Consulta el Ejemplo 7).*

**43.** $(2t + 4)^3$

**44.** $(6m + 2)^2$

**45.** $(2q - 3)^4$

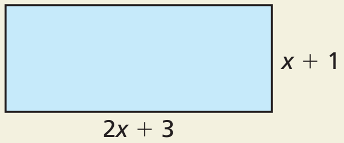
**46.** $(g + 2)^5$

**47.** $(yz + 1)^5$

**48.** $(np - 1)^4$

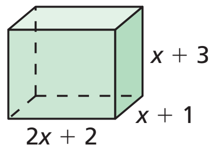
**49.** **COMPARAR MÉTODOS** Halla el producto de la expresión $(a^2 + 4b^2)^2(3a^2 - b^2)^2$ usando dos métodos diferentes. ¿Cuál método prefieres? Explica.

**50.** **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Adjunta uno o más polígonos al rectángulo para formar un nuevo polígono cuyo perímetro sea el doble del perímetro del rectángulo. Halla el perímetro del nuevo polígono.

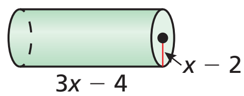



**CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 51 y 52, escribe una expresión para el volumen de la figura como polinomio en forma estándar.**

**51.** $V = \ell wh$




**52.** $V = \pi r^2 h$




**53.** **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Dos personas hacen tres depósitos en sus cuentas bancarias que ganan la misma tasa de interés simple $r$.

Persona A — Nº de cuenta 2-5384100608

| Fecha | Transacción | Cantidad |
|---|---|---|
| 01/01/2012 | Depósito | $2000.00 |
| 01/01/2013 | Depósito | $3000.00 |
| 01/01/2014 | Depósito | $1000.00 |

Persona B — Nº de cuenta 1-5233032905

| Fecha | Transacción | Cantidad |
|---|---|---|
| 01/01/2012 | Depósito | $5000.00 |
| 01/01/2013 | Depósito | $1000.00 |
| 01/01/2014 | Depósito | $4000.00 |

La cuenta de la Persona A tiene el siguiente valor

$$2000(1 + r)^3 + 3000(1 + r)^2 + 1000(1 + r)$$

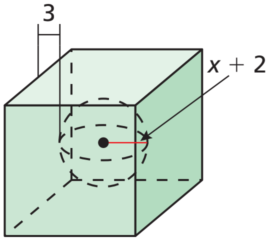
el 1ro de enero de 2015.

**a.** Escribe un polinomio para el valor de la cuenta de la Persona B el 1ro de enero de 2015.

**b.** Escribe el valor total de las dos cuentas como un polinomio en forma estándar. Luego interpreta los coeficientes del polinomio.

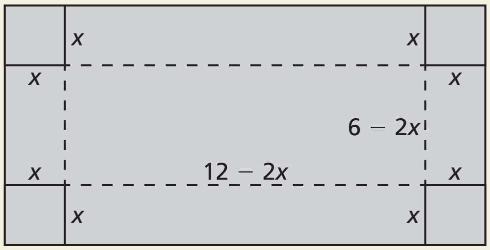
**c.** Supón que sus tasas de interés son del 0.05. ¿Cuál seráel valor total de ambas cuentas para el 1ro de enero de 2015?

**54.** **RESOLVER PROBLEMAS** La esfera está centrada en el cubo. Halla una expresión para el volumen del cubo fuera de la esfera.




**55.** **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que la suma de dos binomios siempre es un binomio y que el producto de dos binomios siempre es un trinomio. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

**56.** **¿CÓMO LO VES?** Haces una caja de hojalata cortando piezas de $x$ pulgadas por $x$ pulgadas de las esquinas de un rectángulo y doblando cada lado hacia arriba. El plano de tu caja es el siguiente.




**a.** ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza de hojalata original?

**b.** Escribe una función que represente el volumen de la caja. Sin multiplicar, determina su grado.

**USAR HERRAMIENTAS** **En los Ejercicios 57–60, usa una calculadora gráfica para hacer una conjetura acerca de si las dos funciones son equivalentes. Explica tu razonamiento.**

**57.** $f(x) = (2x - 3)^3$; $g(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

**58.** $h(x) = (x + 2)^5$;
$k(x) = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 64x$

**59.** $f(x) = (-x - 3)^4$;
$g(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 80$

**60.** $f(x) = (-x + 5)^3$; $g(x) = -x^3 + 15x^2 - 75x + 125$

**61.** **RAZONAR** Copia el triángulo de Pascal y añade filas para $n = 6, 7, 8, 9$ y $10$. Usa las nuevas filas para desarrollar $(x + 3)^7$ y $(x - 5)^9$.

**62.** **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Se te da la función $f(x) = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$. Si $f(x)$ se escribe en forma estándar, demuestra que el coeficiente de $x^3$ es la suma de $a$, $b$, $c$ y $d$, y que el término constante es el producto de $a$, $b$, $c$ y $d$.

**63.** **SACAR CONCLUSIONES** Imagina que $g(x) = 12x^4 + 8x + 9$ y $h(x) = 3x^5 + 2x^3 - 7x + 4$.

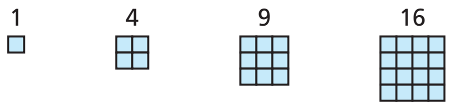
**a.** ¿Cuál es el grado del polinomio $g(x) + h(x)$?

**b.** ¿Cuál es el grado del polinomio $g(x) - h(x)$?

**c.** ¿Cuál es el grado del polinomio $g(x) \cdot h(x)$?

**d.** En general, si $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios tales que $g(x)$ tiene grado $m$ y $h(x)$ tiene grado $n$, y $m > n$, ¿cuáles son los grados de $g(x) + h(x)$, $g(x) - h(x)$, y $g(x) \cdot h(x)$?

**64.** **HALLAR UN PATRÓN** En este ejercicio, explorarás la secuencia de los cuadrados de números. Los primeros cuatro cuadrados de números están representados a continuación.




**a.** Halla las diferencias entre los cuadrados consecutivos. Explica lo que observas.

**b.** Demuestra cómo la identidad polinomial $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ representa las diferencias entre los cuadrados de números.

**c.** Comprueba la identidad polinomial en la parte (b.)

**65.** **PENSAMIENTO CRÍTICO** Recuerda que un triple pitagórico es un conjunto de enteros positivos $a$, $b$ y $c$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Los números 3, 4 y 5 forman un triple pitagórico porque $3^2 + 4^2 = 5^2$. Puedes usar la identidad polinomial $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ para generar otros triples pitagóricos.

**a.** Comprueba que la identidad polinomial es verdadera demostrando que las expresiones simplificadas del lado izquierdo y derecho son iguales.

**b.** Usa la identidad para generar el triple pitagórico cuando $x = 6$ y $y = 5$.

**c.** Verifica que tu respuesta en la parte (b) concuerde con $a^2 + b^2 = c^2$.

## Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Haz la operación. Escribe la respuesta en forma estándar.** *(Sección 3.2)*

**66.** $(3 - 2i) + (5 + 9i)$

**67.** $(12 + 3i) - (7 - 8i)$

**68.** $(7i)(-3i)$

**69.** $(4 + i)(2 - i)$

# 4.3 Dividir polinomios

## Pregunta esencial

¿Cómo puedes usar los factores de un polinomio cúbico para resolver un ejercicio de división que incluye al polinomio?

### EXPLORACIÓN 1 Dividir polinomios

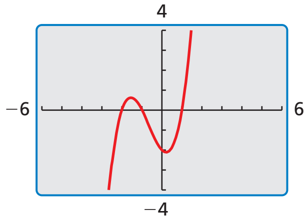
**Trabaja con un compañero.** Une cada enunciado de división con la gráfica del polinomio cúbico $f(x)$ relacionado. Explica tu razonamiento. Usa una calculadora gráfica para verificar tus respuestas.

**a.** $\dfrac{f(x)}{x} = (x - 1)(x + 2)$ **b.** $\dfrac{f(x)}{x - 1} = (x - 1)(x + 2)$

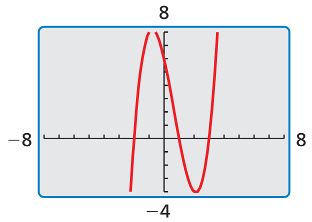
**c.** $\dfrac{f(x)}{x + 1} = (x - 1)(x + 2)$ **d.** $\dfrac{f(x)}{x - 2} = (x - 1)(x + 2)$

**e.** $\dfrac{f(x)}{x + 2} = (x - 1)(x + 2)$ **f.** $\dfrac{f(x)}{x - 3} = (x - 1)(x + 2)$

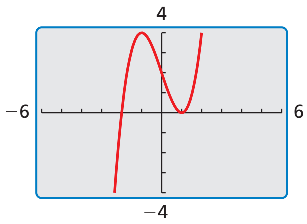
**A.**



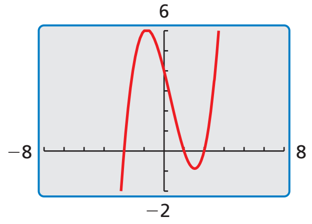

**B.**



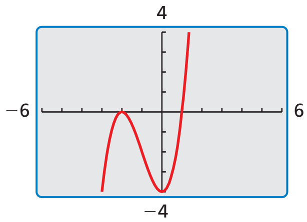

**C.**



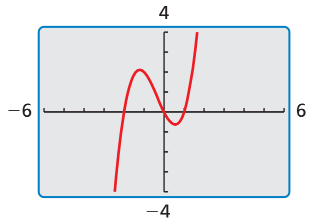

**D.**




**E.**




**F.**




**RAZONAR DE MANERA ABSTRACTA**

Para dominar las matemáticas, necesitas comprender una situación en forma abstracta y representarla en forma simbólica.

### EXPLORACIÓN 2 Dividir polinomios

**Trabaja con un compañero.** Usa los resultados de la Exploración 1 para hallar cada cociente. Escribe tus respuestas en forma estándar. Verifica tus respuestas con una multiplicación.

**a.** $(x^3 + x^2 - 2x) \div x$ **b.** $(x^3 - 3x + 2) \div (x - 1)$

**c.** $(x^3 + 2x^2 - x - 2) \div (x + 1)$ **d.** $(x^3 - x^2 - 4x + 4) \div (x - 2)$

**e.** $(x^3 + 3x^2 - 4) \div (x + 2)$ **f.** $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x - 3)$

## Comunicar tu respuesta

**3.** ¿Cómo puedes usar los factores de un polinomio cúbico para resolver un ejercicio de división que incluye al polinomio?

# 4.3 Lección

## Qué aprenderás

- Usar una división larga para dividir polinomios entre otros polinomios.
- Usar una división sintética para dividir polinomios entre binomios de la forma $x - k$.
- Usar el teorema del residuo.

### Vocabulario Esencial

división larga de polinomios, *pág. 174*
división sintética, *pág. 175*

***Anterior***
división larga
divisor
cociente
residuo
dividendo

## División larga de polinomios

Cuando divides un polinomio $f(x)$ entre un divisor polinomial $d(x)$ distinto de cero, obtienes un cociente polinomial $q(x)$ y un residuo polinomial $r(x.)$

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

El grado del residuo debe ser menor que el grado del divisor. Cuando el residuo es 0, el divisor *divide equitativamente* al dividendo. También, el grado del divisor es menor o igual que el grado del dividendo $f(x)$. Una manera de dividir polinomios se llama **división larga de polinomios**.

### EJEMPLO 1 Usar la división larga de polinomios

Divide $2x^4 + 3x^3 + 5x - 1$ entre $x^2 + 3x + 2$.

**SOLUCIÓN**

Escribe la división de polinomios en el mismo formato que usas cuando divides números. Incluye un "0" como coeficiente de $x^2$ en el dividendo. En cada etapa, divide el término con la potencia más alta en lo que está a la izquierda del dividendo por el primer término del divisor. Esto da el siguiente término del cociente.

$$\begin{array}{rll}
 & 2x^2 - 3x + 5 & \longleftarrow \text{cociente} \\
x^2 + 3x + 2 \,\big) & 2x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 5x - 1 & \\
 & \underline{2x^4 + 6x^3 + 4x^2} & \text{Multiplica el divisor por } \frac{2x^4}{x^2} = 2x^2. \\
 & -3x^3 - 4x^2 + 5x & \text{Resta. Baja el siguiente término.} \\
 & \underline{-3x^3 - 9x^2 - 6x} & \text{Multiplica el divisor por } \frac{-3x^3}{x^2} = -3x. \\
 & 5x^2 + 11x - 1 & \text{Resta. Baja el siguiente término.} \\
 & \underline{5x^2 + 15x + 10} & \text{Multiplica el divisor por } \frac{5x^2}{x^2} = 5. \\
 & -4x - 11 & \longleftarrow \text{residuo}
\end{array}$$

$$\frac{2x^4 + 3x^3 + 5x - 1}{x^2 + 3x + 2} = 2x^2 - 3x + 5 + \frac{-4x - 11}{x^2 + 3x + 2}$$

**ERROR COMÚN**

La expresión sumada al cociente en el resultado de un ejercicio de división larga es $\frac{r(x)}{d(x)}$, no $r(x)$.

**Verifica**

Puedes verificar el resultado de un ejercicio de división multiplicando el cociente por el divisor y sumando el residuo. El resultado debería ser el dividendo.

$$\begin{aligned}
&(2x^2 - 3x + 5)(x^2 + 3x + 2) + (-4x - 11) \\
&\quad = (2x^2)(x^2 + 3x + 2) - (3x)(x^2 + 3x + 2) + (5)(x^2 + 3x + 2) - 4x - 11 \\
&\quad = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 3x^3 - 9x^2 - 6x + 5x^2 + 15x + 10 - 4x - 11 \\
&\quad = 2x^4 + 3x^3 + 5x - 1 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Divide usando la división larga de polinomios.**

1. $(x^3 - x^2 - 2x + 8) \div (x - 1)$
2. $(x^4 + 2x^2 - x + 5) \div (x^2 - x + 1)$

## División sintética

Existe un método abreviado para dividir polinomios entre binomios de la forma $x - k$. Este método abreviado se llama **división sintética**. Este método se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2 Usar la división sintética

Divide $-x^3 + 4x^2 + 9$ entre $x - 3$.

**SOLUCIÓN**

**Paso 1** Escribe los coeficientes del dividendo en orden de exponentes descendentes. Incluye un "0" para el término $x$ que falta. Dado que el divisor es $x - 3$, usa $k = 3$. Escribe el valor de $k$ a la izquierda de la barra vertical.

$$\text{valor de } k \longrightarrow \begin{array}{r|rrrr} 3 & -1 & 4 & 0 & 9 \\ & & & & \\ \hline \end{array} \longleftarrow \text{coeficientes de } -x^3 + 4x^2 + 9$$

**Paso 2** Baja el coeficiente principal. Multiplica el coeficiente principal por el valor de $k$. Escribe el producto debajo del segundo coeficiente. Suma.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & -1 & 4 & 0 & 9 \\ & & -3 & & \\ \hline & -1 & 1 & & \end{array}$$

**Paso 3** Multiplica la suma anterior por el valor de $k$. Escribe el producto debajo del tercer coeficiente. Suma. Repite este proceso con el coeficiente restante. Los primeros tres números en la fila inferior son los coeficientes del cociente, y el último número es el residuo.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & -1 & 4 & 0 & 9 \\ & & -3 & 3 & 9 \\ \hline \end{array}$$
$$\text{coeficientes del cociente} \longrightarrow \begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 3 & 18 \end{array} \longleftarrow \text{residuo}$$

▶ $$\frac{-x^3 + 4x^2 + 9}{x - 3} = -x^2 + x + 3 + \frac{18}{x - 3}$$

### EJEMPLO 3 Usar la división sintética

Divide $3x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ entre $x + 1$.

**SOLUCIÓN**

Usa la división sintética. Dado que el divisor es $x + 1 = x - (-1)$, $k = -1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -2 & 2 & -5 \\ & & -3 & 5 & -7 \\ \hline & 3 & -5 & 7 & -12 \end{array}$$

▶ $$\frac{3x^3 - 2x^2 + 2x - 5}{x + 1} = 3x^2 - 5x + 7 - \frac{12}{x + 1}$$

**CONSEJO DE ESTUDIO**

Observa que dividir polinomios no siempre tiene como resultado un polinomio. Esto significa que el conjunto de polinomios *no* es cerrado bajo la división.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Divide usando la división sintética.**

**3.** $(x^3 - 3x^2 - 7x + 6) \div (x - 2)$

**4.** $(2x^3 - x - 7) \div (x + 3)$

## El teorema del residuo

El residuo en el proceso de la división sintética tiene una interpretación importante. Cuando divides un polinomio $f(x)$ entre $d(x) = x - k$, el resultado es

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$ División de polinomios

$$\frac{f(x)}{x - k} = q(x) + \frac{r(x)}{x - k}$$ Sustituye $x - k$ por $d(x)$.

$$f(x) = (x - k)q(x) + r(x).$$ Multiplica ambos lados por $x - k$.

Dado que $r(x) = 0$ *o* el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $x - k$, sabes que $r(x)$ es una función constante. Entonces, permite que $r(x) = r$, donde $r$ es un número real, y evalúa $f(x)$ cuando $x = k$.

$$f(k) = (k - k)q(k) + r$$ Sustituye $k$ por $x$ y $r$ por $r(x)$.

$$f(k) = r$$ Simplifica.

Este resultado está expresado en el *teorema del residuo*.

### Concepto Esencial

**El teorema del residuo**

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, entonces el residuo es $r = f(k)$.

El teorema del residuo te indica que se puede usar la división sintética para evaluar una función polinomial. Entonces, para evaluar $f(x)$ cuando $x = k$, divide $f(x)$ entre $x - k$. El residuo será $f(k.)$

### EJEMPLO 4 Evaluar un polinomio

Usa la división sintética para evaluar $f(x) = 5x^3 - x^2 + 13x + 29$ cuando $x = -4$.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 5 & -1 & 13 & 29 \\ & & -20 & 84 & -388 \\ \hline & 5 & -21 & 97 & -359 \end{array}$$

▶ El residuo es $-359$. Entonces, basándose en el teorema del residuo, puedes concluir que $f(-4) = -359$.

**Verifica**

Verifícalo sustituyendo $x = -4$ en la función original.

$$f(-4) = 5(-4)^3 - (-4)^2 + 13(-4) + 29$$
$$= -320 - 16 - 52 + 29$$
$$= -359 \checkmark$$

### Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Usa la división sintética para evaluar la función del valor indicado de *x*.**

**5.** $f(x) = 4x^2 - 10x - 21;\ x = 5$

**6.** $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 20x - 6;\ x = 2$

# 4.3 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Explica el teorema del residuo con tus propias palabras. Usa un ejemplo en tu explicación.

2. **VOCABULARIO** ¿Qué forma debe tener el divisor para que la división sintética sea un método apropiado para dividir un polinomio? Proporciona ejemplos para respaldar tu afirmación.

3. **VOCABULARIO** Escribe las funciones del divisor, dividendo y cociente del polinomio representadas mediante la división sintética que se muestra a la derecha.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -9 & 18 \\ & & -3 & 15 & -18 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

4. **ESCRIBIR** Explica qué representan los números en colores en la división sintética del Ejercicio 3.

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 5–10, divide usando la división larga de polinomios.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

5. $(x^2 + x - 17) \div (x - 4)$

6. $(3x^2 - 14x - 5) \div (x - 5)$

7. $(x^3 + x^2 + x + 2) \div (x^2 - 1)$

8. $(7x^3 + x^2 + x) \div (x^2 + 1)$

9. $(5x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 39) \div (x^2 + 2x - 4)$

10. $(4x^4 + 5x - 4) \div (x^2 - 3x - 2)$

**En los Ejercicios 11–18 divide usando la división sintética.** *(Consulta los Ejemplos 2 y 3).*

11. $(x^2 + 8x + 1) \div (x - 4)$

12. $(4x^2 - 13x - 5) \div (x - 2)$

13. $(2x^2 - x + 7) \div (x + 5)$

14. $(x^3 - 4x + 6) \div (x + 3)$

15. $(x^2 + 9) \div (x - 3)$

16. $(3x^3 - 5x^2 - 2) \div (x - 1)$

17. $(x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 13x - 12) \div (x - 6)$

18. $(x^4 + 4x^3 + 16x - 35) \div (x + 5)$

**ANALIZAR RELACIONES** **En los Ejercicios 19–22, une las expresiones equivalentes. Justifica tus respuestas.**

19. $(x^2 + x - 3) \div (x - 2)$

20. $(x^2 - x - 3) \div (x - 2)$

21. $(x^2 - x + 3) \div (x - 2)$

22. $(x^2 + x + 3) \div (x - 2)$

**A.** $x + 1 - \dfrac{1}{x - 2}$ **B.** $x + 3 + \dfrac{9}{x - 2}$

**C.** $x + 1 + \dfrac{5}{x - 2}$ **D.** $x + 3 + \dfrac{3}{x - 2}$

**ANÁLISIS DE ERRORES** **En los Ejercicios 23 y 24, describe y corrige el error usando la división sintética para dividir $x^3 - 5x + 3$ entre $x - 2$.**

23.
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ & & 2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 5x + 3}{x - 2} = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

24.
$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -5 & 3 \\ & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & -3 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 5x + 3}{x - 2} = x^2 - 3x - \frac{3}{x - 2}$$

**En los Ejercicios 25–32, usa la división sintética para evaluar la función del valor indicado de $x$.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

**25.** $f(x) = -x^2 - 8x + 30;\ x = -1$

**26.** $f(x) = 3x^2 + 2x - 20;\ x = 3$

**27.** $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3;\ x = 2$

**28.** $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9;\ x = -4$

**29.** $f(x) = x^3 - 6x + 1;\ x = 6$

**30.** $f(x) = x^3 - 9x - 7;\ x = 10$

**31.** $f(x) = x^4 + 6x^2 - 7x + 1;\ x = 3$

**32.** $f(x) = -x^4 - x^3 - 2;\ x = 5$

**33. ARGUMENTAR** Usas la división sintética para dividir $f(x)$ entre $(x - a)$ y hallas que el residuo es igual a 15. Tu amigo llega a la conclusión que $f(15) = a$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

**34. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Un polígono tiene un área representada mediante $A = 4x^2 + 8x + 4$. La figura tiene por lo menos una dimensión igual a $2x + 2$. Dibuja la figura y nombra sus dimensiones.

**35. USAR HERRAMIENTAS** La asistencia total $A$ (en miles) a los juegos de básquetbol femenino de la NCAA y el número de equipos $T$ de básquetbol femenino de la NCAA en un periodo de tiempo se puede representar mediante

$$A = -1.95x^3 + 70.1x^2 - 188x + 2150$$
$$T = 14.8x + 725$$

donde $x$ está en años y $0 < x < 18$. Escribe una función para la asistencia promedio por equipo durante este periodo de tiempo.

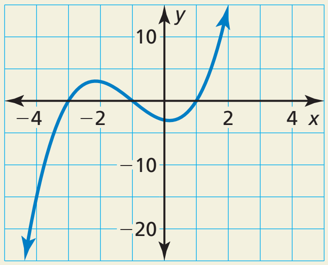
**36. COMPARAR MÉTODOS** La ganancia $P$ (en millones de dólares) de un fabricante de DVD se puede representar mediante $P = -6x^3 + 72x$, donde $x$ es el número (en millones) de DVD fabricados. Usa la división sintética para demostrar que la empresa arroja una ganancia de \$96 millones si se fabrican 2 millones de DVD. ¿Existe un método más fácil? Explica.

**37. PENSAMIENTO CRÍTICO** ¿Cuál es el valor de $k$ de tal manera que $(x^3 - x^2 + kx - 30) \div (x - 5)$ tenga un residuo de cero?

(A) $-14$ (B) $-2$

(C) $26$ (D) $32$

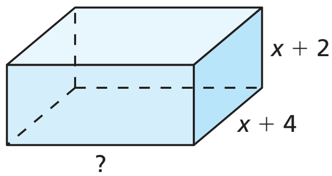
**38. ¿CÓMO LO VES?** La gráfica representa la función polinomial $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.




**a.** La expresión $f(x) \div (x - k)$ tiene un residuo de $-15$. ¿Cuál es el valor de $k$?

**b.** Usa la gráfica para comparar los residuos de $(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x + 3)$ y $(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x + 1)$.

**39. CONEXIONES MATEMÁTICAS** El volumen $V$ del prisma rectangular está dado mediante $V = 2x^3 + 17x^2 + 46x + 40$. Halla una expresión para la dimensión que falta.




**40. USAR LA ESTRUCTURA** Divides dos polinomios y obtienes el resultado $5x^2 - 13x + 47 - \dfrac{102}{x + 2}$. ¿Cuál es el dividendo? ¿Cómo lo hallaste?

## Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Halla el (los) cero(s) de la función.** *(Secciones 3.1 y 3.2)*

**41.** $f(x) = x^2 - 6x + 9$

**42.** $g(x) = 3(x + 6)(x - 2)$

**43.** $g(x) = x^2 + 14x + 49$

**44.** $h(x) = 4x^2 + 36$

# 4.4 Factorizar polinomios

## Pregunta esencial ¿Cómo puedes factorizar un polinomio?

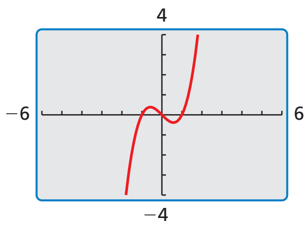
### EXPLORACIÓN 1 Factorizar polinomios

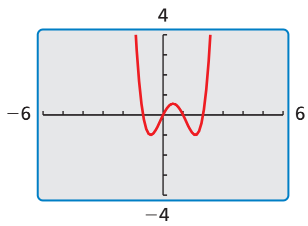
**Trabaja con un compañero.** Une cada ecuación polinomial con la gráfica relacionada con su función polinomial. Usa las intersecciones con el eje $x$ de la gráfica para escribir cada polinomio en forma factorizada. Explica tu razonamiento.

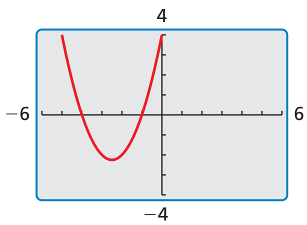
**a.** $x^2 + 5x + 4 = 0$ **b.** $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

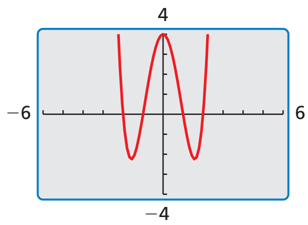
**c.** $x^3 + x^2 - 2x = 0$ **d.** $x^3 - x = 0$

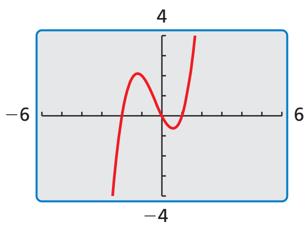
**e.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **f.** $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$

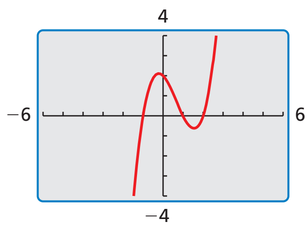
**A.**



**B.**



**C.**



**D.**



**E.**



**F.**



**DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS**

Para dominar las matemáticas, necesitas verificar tus respuestas a los ejercicios y preguntarte continuamente, "¿Tiene sentido esto?".

### EXPLORACIÓN 2 Factorizar polinomios

**Trabaja con un compañero.** Usa las intersecciones con el eje $x$ de la gráfica de la función polinomial para escribir cada polinomio en forma factorizada. Explica tu razonamiento. Verifica tus respuestas con una multiplicación.

**a.** $f(x) = x^2 - x - 2$ **b.** $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

**c.** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ **d.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

**e.** $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ **f.** $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

## Comunicar tu respuesta

**3.** ¿Cómo puedes factorizar un polinomio?

**4.** ¿Qué información puedes obtener acerca de la gráfica de una función polinomial escrita en forma factorizada?

# 4.4 Lección

## Qué aprenderás

- Factorizar los polinomios.
- Usar el teorema del factor.

### Vocabulario Esencial

factorizar completamente, *pág. 180*
factorizar agrupando, *pág. 181*
forma cuadrática, *pág. 181*

***Anterior***
cero de una función
división sintética

## Factorizar los polinomios

Anteriormente, has factorizado polinomios cuadráticos. También puedes factorizar polinomios con grado mayor que 2. Algunos de estos polinomios se pueden *factorizar completamente* usando las técnicas que has aprendido anteriormente. Un polinomio factorizable con coeficientes enteros se **factoriza completamente** cuando se escribe como un producto de polinomios no factorizables con coeficientes enteros.

### EJEMPLO 1 Hallar un factor de monomio común

Factoriza completamente cada polinomio.

**a.** $x^3 - 4x^2 - 5x$ **b.** $3y^5 - 48y^3$ **c.** $5z^4 + 30z^3 + 45z^2$

**SOLUCIÓN**

**a.** $x^3 - 4x^2 - 5x = x(x^2 - 4x - 5)$ Factoriza el monomio común.

$= x(x - 5)(x + 1)$ Factoriza el trinomio.

**b.** $3y^5 - 48y^3 = 3y^3(y^2 - 16)$ Factoriza el monomio común.

$= 3y^3(y - 4)(y + 4)$ Patrón de diferencia de dos cuadrados

**c.** $5z^4 + 30z^3 + 45z^2 = 5z^2(z^2 + 6z + 9)$ Factoriza el monomio común.

$= 5z^2(z + 3)^2$ Patrón de trinomio cuadrado perfecto.

### Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Factoriza completamente los polinomios.**

**1.** $x^3 - 7x^2 + 10x$ **2.** $3n^7 - 75n^5$ **3.** $8m^5 - 16m^4 + 8m^3$

En la parte (b) del Ejemplo 1, se usó el patrón especial de factorización de la diferencia de dos cuadrados para factorizar completamente la expresión. También existen patrones de factorización que puedes usar para factorizar la suma o la diferencia de dos *cubos.*

## Concepto Esencial

### Patrones de factorización especiales

**Suma de dos cubos**

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

**Ejemplo**

$64x^3 + 1 = (4x)^3 + 1^3$

$= (4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$

**Diferencia de dos cubos**

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

**Ejemplo**

$27x^3 - 8 = (3x)^3 - 2^3$

$= (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$

## EJEMPLO 2 Factorizar la suma o la diferencia de dos cubos

Factoriza completamente (a) $x^3 - 125$ y (b) $16s^5 + 54s^2$.

**SOLUCIÓN**

**a.** $x^3 - 125 = x^3 - 5^3$ Escribe como $a^3 - b^3$.

$= (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$ Patrón de diferencia de dos cubos

**b.** $16s^5 + 54s^2 = 2s^2(8s^3 + 27)$ Factoriza el monomio común.

$= 2s^2\,[(2s)^3 + 3^3]$ Escribe $8s^3 + 27$ como $a^3 + b^3$.

$= 2s^2(2s + 3)(4s^2 - 6s + 9)$ Patrón de suma de dos cubos.

En algunos polinomios, puedes **factorizar agrupando** pares de términos que tienen un factor de monomio común. El patrón para factorizar por grupos se muestra a continuación.

$$ra + rb + sa + sb = r(a + b) + s(a + b)$$
$$= (r + s)(a + b)$$

## EJEMPLO 3 Factorizar agrupando

Factoriza completamente $z^3 + 5z^2 - 4z - 20$.

**SOLUCIÓN**

$z^3 + 5z^2 - 4z - 20 = z^2(z + 5) - 4(z + 5)$ Factoriza agrupando.

$= (z^2 - 4)(z + 5)$ Propiedad distributiva.

$= (z - 2)(z + 2)(z + 5)$ Patrón de diferencia de dos cuadrados

Se dice que una expresión de la forma $au^2 + bu + c$, donde $u$ es una expresión algebraica, está en **forma cuadrática**. Las técnicas de factorización que has estudiado se pueden usar algunas veces para factorizar expresiones de esa naturaleza.

### BUSCAR UNA ESTRUCTURA

La expresión $16x^4 - 81$ está en forma cuadrática porque se puede escribir como $u^2 - 81$ donde $u = 4x^2$.

## EJEMPLO 4 Factorizar polinomios en forma cuadrática

Factoriza completamente (a) $16x^4 - 81$ y (b) $3p^8 + 15p^5 + 18p^2$.

**SOLUCIÓN**

**a.** $16x^4 - 81 = (4x^2)^2 - 9^2$ Escribe como $a^2 - b^2$.

$= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9)$ Patrón de diferencia de dos cuadrados

$= (4x^2 + 9)(2x - 3)(2x + 3)$ Patrón de diferencia de dos cuadrados

**b.** $3p^8 + 15p^5 + 18p^2 = 3p^2(p^6 + 5p^3 + 6)$ Factoriza el monomio común.

$= 3p^2(p^3 + 3)(p^3 + 2)$ Factoriza el trinomio en forma cuadrática.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Factoriza completamente el polinomio.**

**4.** $a^3 + 27$

**5.** $6z^5 - 750z^2$

**6.** $x^3 + 4x^2 - x - 4$

**7.** $3y^3 + y^2 + 9y + 3$

**8.** $-16n^4 + 625$

**9.** $5w^6 - 25w^4 + 30w^2$

## El teorema del factor

Al dividir polinomios en la sección anterior, los ejemplos tenían residuos diferentes de cero. Supón que el residuo es 0 cuando se divide un polinomio $f(x)$ entre $x - k$. Entonces,

$$\frac{f(x)}{x-k} = q(x) + \frac{0}{x-k} = q(x)$$

donde $q(x)$ es el cociente polinomial. Por lo tanto, $f(x) = (x - k) \cdot q(x)$, tal que $x - k$ es un factor de $f(x)$. Este resultado se resume por el *teorema del factor*, que es un caso especial del teorema del residuo.

**LEER**

En otras palabras, $x - k$ es un factor de $f(x)$ si y solo si $k$ es un cero de $f$.

### Concepto Esencial

**El teorema del factor**

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - k$ si y solo si $f(k) = 0$.

**CONSEJO DE ESTUDIO**

En la parte (b), observa que la sustitución directa hubiera tenido como resultado cómputos más difíciles que la división sintética.

### EJEMPLO 5 Determinar si un binomio lineal es un factor

Determina si (a) $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^2 + 2x - 4$ y (b) $x + 5$ es un factor de $f(x) = 3x^4 + 15x^3 - x^2 + 25$.

**SOLUCIÓN**

**a.** Halla $f(2)$ por sustitución directa.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 + 2(2) - 4 \\ &= 4 + 4 - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

▶ Dado que $f(2) \neq 0$, el binomio $x - 2$ no es un factor de $f(x) = x^2 + 2x - 4$.

**b.** Halla $f(-5)$ por división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 3 & 15 & -1 & 0 & 25 \\ & & -15 & 0 & 5 & -25 \\ \hline & 3 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}$$

▶ Dado que $f(-5) = 0$, el binomio $x + 5$ es un factor de $f(x) = 3x^4 + 15x^3 - x^2 + 25$.

### EJEMPLO 6 Factorizar un polinomio

Demuestra que $x + 3$ es un factor de $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$. Luego factoriza $f(x)$ completamente.

**SOLUCIÓN**

Demuestra que $f(-3) = 0$ por división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ & & -3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Dado que $f(-3) = 0$, puedes llegar a la conclusión que $x + 3$ es un factor de $f(x)$ por el teorema de factores. Usa el resultado para escribir $f(x)$ como producto de dos factores y luego factoriza completamente.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 3x^3 - x - 3 && \text{Escribe el polinomio original.} \\ &= (x + 3)(x^3 - 1) && \text{Escribe como un producto de dos factores.} \\ &= (x + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1) && \text{Patrón de diferencia de dos cubos} \end{aligned}$$

**OTRA MANERA**

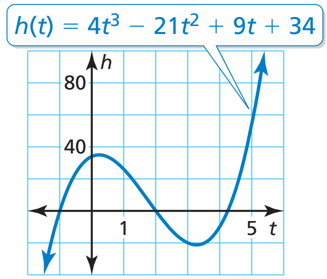
Observa que puedes factorizar $f(x)$ por agrupación de términos.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3(x + 3) - 1(x + 3) \\ &= (x^3 - 1)(x + 3) \\ &= (x + 3)(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Dado que las intersecciones con el eje $x$ de la gráfica de una función son los ceros de la función, puedes usar la gráfica para aproximar los ceros. Puedes verificar las aproximaciones usando el teorema del factor.

## EJEMPLO 7 Uso en la vida real

Durante los primeros 5 segundos del recorrido de una montaña rusa, la función $h(t) = 4t^3 - 21t^2 + 9t + 34$ representa la altura $h$ (en pies) de la montaña rusa después de $t$ segundos. ¿Cuánto tiempo está la montaña rusa a nivel del suelo o bajo el nivel del suelo durante los primeros 5 segundos?




### SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Te dan una regla de función que representa la altura de una montaña rusa. Te piden determinar cuánto tiempo está la montaña rusa a nivel del suelo o por debajo del nivel del suelo durante los primeros 5 segundos del recorrido.
2. **Haz un plan** Usa una gráfica para estimar los ceros de la función y verifícalos usando el teorema del factor. Luego usa los ceros para describir dónde la gráfica está por debajo del eje $t$.
3. **Resuelve el problema** Basándose en la gráfica, dos de los ceros parecen ser $-1$ y 2. El tercer cero está entre 4 y 5.

**Paso 1** Determina si $-1$ es un cero usando la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 4 & -21 & 9 & 34 \\ & & -4 & 25 & -34 \\ \hline & 4 & -25 & 34 & 0 \end{array}$$

$h(-1) = 0$, entonces $-1$ es un *cero* de $h$ y $t + 1$ es un factor de $h(t)$.

**CONSEJO DE ESTUDIO**

También podrías verificar que 2 es un cero usando la función original, pero usar el polinomio cociente te ayuda a hallar el factor restante.

**Paso 2** Determina si 2 es un cero. Si 2 es también un cero, entonces $t - 2$ es un factor del cociente polinomial resultante. Verifícalo usando la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 4 & -25 & 34 \\ & & 8 & -34 \\ \hline & 4 & -17 & 0 \end{array}$$

El residuo es 0, entonces $t - 2$ es un factor de $h(t)$ y 2 es un cero de $h$.

Entonces, $h(t) = (t + 1)(t - 2)(4t - 17)$. El factor $4t - 17$ indica que el cero entre 4 y 5 es $\frac{17}{4}$, o 4.25.

▶ Los ceros son $-1$, 2, y 4.25. Solo $t = 2$ y $t = 4.25$ ocurren en los primeros 5 segundos. La gráfica muestra que la montaña rusa está a nivel del suelo o por debajo del nivel del suelo durante $4.25 - 2 = 2.25$ segundos.

4. **Verifícalo** Usa una tabla de valores para verificar los ceros positivos y las alturas entre los ceros.

| X | Y1 | |
|---|---|---|
| .5 | 33.75 | |
| 1.25 | 20.25 | |
| 2 | 0 | cero |
| 2.75 | -16.88 | negativo |
| 3.5 | -20.25 | negativo |
| 4.25 | 0 | cero |
| 5 | 54 | |

X=2

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

10. Determina si $x - 4$ es un factor de $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$.
11. Demuestra que $x - 6$ es un factor de $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$. Luego factoriza $f(x)$ completamente.
12. En el Ejemplo 7, ¿cambia tu respuesta cuando determinas primero si 2 es un cero y luego determinas si $-1$ es un cero? Justifica tu respuesta.

# 4.4 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La expresión $9x^4 - 49$ está en forma __________ porque se puede escribir como $u^2 - 49$ donde $u =$ ______.

2. **VOCABULARIO** Explica cuándo deberías intentar factorizar un polinomio por agrupación de términos.

3. **ESCRIBIR** ¿Cómo sabes cuándo un polinomio está factorizado completamente?

4. **ESCRIBIR** Explica el teorema del factor y por qué es útil.

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 5–12, factoriza completamente el polinomio.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

5. $x^3 - 2x^2 - 24x$
6. $4k^5 - 100k^3$
7. $3p^5 - 192p^3$
8. $2m^6 - 24m^5 + 64m^4$
9. $2q^4 + 9q^3 - 18q^2$
10. $3r^6 - 11r^5 - 20r^4$
11. $10w^{10} - 19w^9 + 6w^8$
12. $18v^9 + 33v^8 + 14v^7$

**En los Ejercicios 13–20, factoriza completamente el polinomio.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $x^3 + 64$
14. $y^3 + 512$
15. $g^3 - 343$
16. $c^3 - 27$
17. $3h^9 - 192h^6$
18. $9n^6 - 6561n^3$
19. $16t^7 + 250t^4$
20. $135z^{11} - 1080z^8$

**ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 21 y 22, describe y corrige el error al factorizar el polinomio.**

21.
$$\begin{aligned} 3x^3 + 27x &= 3x(x^2 + 9) \\ &= 3x(x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} x^9 + 8x^3 &= (x^3)^3 + (2x)^3 \\ &= (x^3 + 2x)[(x^3)^2 - (x^3)(2x) + (2x)^2] \\ &= (x^3 + 2x)(x^6 - 2x^4 + 4x^2) \end{aligned}$$

**En los Ejercicios 23–30, factoriza completamente el polinomio.** *(Consulta el Ejemplo 3).*

23. $y^3 - 5y^2 + 6y - 30$
24. $m^3 - m^2 + 7m - 7$
25. $3a^3 + 18a^2 + 8a + 48$
26. $2k^3 - 20k^2 + 5k - 50$
27. $x^3 - 8x^2 - 4x + 32$
28. $z^3 - 5z^2 - 9z + 45$
29. $4q^3 - 16q^2 - 9q + 36$
30. $16n^3 + 32n^2 - n - 2$

**En los Ejercicios 31–38, factoriza completamente el polinomio.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

31. $49k^4 - 9$
32. $4m^4 - 25$
33. $c^4 + 9c^2 + 20$
34. $y^4 - 3y^2 - 28$
35. $16z^4 - 81$
36. $81a^4 - 256$
37. $3r^8 + 3r^5 - 60r^2$
38. $4n^{12} - 32n^7 + 48n^2$

**En los Ejercicios 39–44, determina si el binomio es un factor del polinomial.** *(Consulta el Ejemplo 5).*

39. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 37x - 60$; $x - 4$
40. $g(x) = 3x^3 - 28x^2 + 29x + 140$; $x + 7$
41. $h(x) = 6x^5 - 15x^4 - 9x^3$; $x + 3$
42. $g(x) = 8x^5 - 58x^4 + 60x^3 + 140$; $x - 6$
43. $h(x) = 6x^4 - 6x^3 - 84x^2 + 144x$; $x + 4$
44. $t(x) = 48x^4 + 36x^3 - 138x^2 - 36x$; $x + 2$

**En los Ejercicios 45–50, demuestra que el binomio es un factor del polinomio. Luego factoriza el polinomio completamente.** ***(Consulta el Ejemplo 6).***

**45.** $g(x) = x^3 - x^2 - 20x;\ x + 4$

**46.** $t(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45;\ x - 5$

**47.** $f(x) = x^4 - 6x^3 - 8x + 48;\ x - 6$

**48.** $s(x) = x^4 + 4x^3 - 64x - 256;\ x + 4$

**49.** $r(x) = x^3 - 37x + 84;\ x + 7$

**50.** $h(x) = x^3 - x^2 - 24x - 36;\ x + 2$

**ANALIZAR RELACIONES** **En los Ejercicios 51–54, une la función con la gráfica correcta. Explica tu razonamiento.**

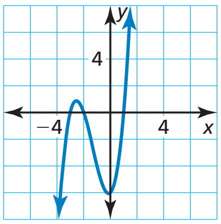
**51.** $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$

**52.** $g(x) = x(x + 2)(x + 1)(x - 2)$

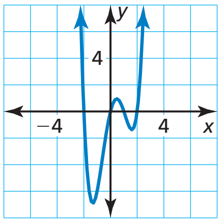
**53.** $h(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 1)$

**54.** $k(x) = x(x - 2)(x - 1)(x + 2)$

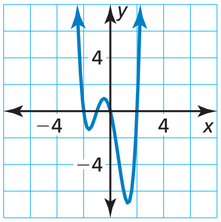
**A.**



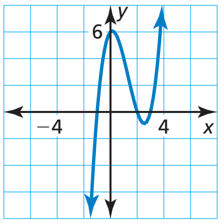

**B.**



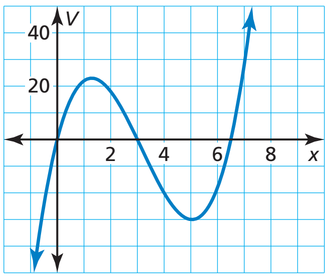

**C.**



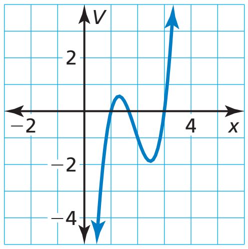

**D.**




**55.** **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El volumen (en pulgadas cúbicas) de una caja de embalaje está representado mediante $V = 2x^3 - 19x^2 + 39x$, donde $x$ es la longitud (en pulgadas.) Determina los valores de $x$ por los que el modelo tiene sentido. Explica tu razonamiento. ***(Consulta el Ejemplo 7).***




**56.** **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El volumen (en pulgadas cúbicas) de una jaula rectangular para pájaros se puede representar mediante $V = 3x^3 - 17x^2 + 29x - 15$, donde $x$ es la longitud (en pulgadas.) Determina los valores de $x$ por los que el modelo tiene sentido. Explica tu razonamiento.




**USAR LA ESTRUCTURA** **En los Ejercicios 57–64, usa el método de tu elección para factorizar completamente el polinomio. Explica tu razonamiento.**

**57.** $a^6 + a^5 - 30a^4$

**58.** $8m^3 - 343$

**59.** $z^3 - 7z^2 - 9z + 63$

**60.** $2p^8 - 12p^5 + 16p^2$

**61.** $64r^3 + 729$

**62.** $5x^5 - 10x^4 - 40x^3$

**63.** $16n^4 - 1$

**64.** $9k^3 - 24k^2 + 3k - 8$

**65.** **RAZONAR** Determina si cada polinomio está factorizado completamente. Si no lo está, factorízalo completamente.

**a.** $7z^4(2z^2 - z - 6)$

**b.** $(2 - n)(n^2 + 6n)(3n - 11)$

**c.** $3(4y - 5)(9y^2 - 6y - 4)$

**66.** **RESOLVER PROBLEMAS** La ganancia $P$ (en millones de dólares) de un fabricante de camisetas se puede representar mediante $P = -x^3 + 4x^2 + x$, donde $x$ es el número (en millones) de camisetas fabricadas. Actualmente, la compañía fabrica 4 millones de camisetas y obtiene una ganancia de 4 millones. ¿Qué número menor de camisetas podría producir la empresa y aun así obtener la misma ganancia?

**67.** **RESOLVER PROBLEMAS** La ganancia $P$ (en millones de dólares) de un fabricante de zapatos se puede representar mediante $P = -21x^3 + 46x$, donde $x$ es el número (en millones) de zapatos fabricados. Actualmente, la compañía fabrica 1 millón de zapatos y obtiene una ganancia de \$25 millones, pero le gustaría reducir la producción. ¿Qué número menor de zapatos podría producir la empresa y aun así obtener la misma ganancia?

**68. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Halla el valor de $k$ de tal manera que $\dfrac{f(x)}{x-k}$ tenga un residuo de 0. Justifica tu respuesta.

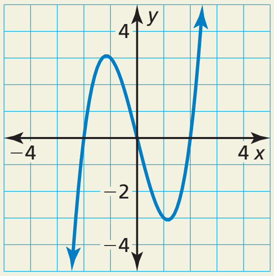
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

**69. COMPARAR MÉTODOS** Estás dando un examen en el que no se permite el uso de calculadoras. Una pregunta te pide evaluar $g(7)$ para la función $g(x) = x^3 - 7x^2 - 4x + 28$. Usas el teorema del factor y la división sintética y tu amigo usa la sustitución directa. ¿Qué método prefieres? Explica tu razonamiento.

**70. ARGUMENTAR** Divides $f(x)$ entre $(x - a)$ y hallas que el residuo no es igual a 0. Tu amigo concluye que $f(x)$ no se puede factorizar. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

**71. PENSAMIENTO CRÍTICO** ¿Cuál es el valor de $k$ tal que $x - 7$ sea un factor de $h(x) = 2x^3 - 13x^2 - kx + 105$? Justifica tu respuesta.

**72. ¿CÓMO LO VES?** Usa la gráfica para escribir una ecuación de la función cúbica en forma factorizada. Explica tu razonamiento.




**73. RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Factoriza completamente cada polinomio.

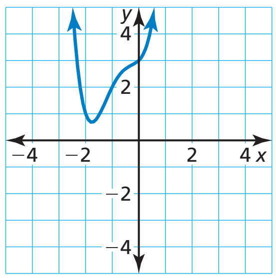
**a.** $7ac^2 + bc^2 - 7ad^2 - bd^2$

**b.** $x^{2n} - 2x^n + 1$

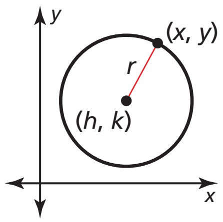
**c.** $a^5b^2 - a^2b^4 + 2a^4b - 2ab^3 + a^3 - b^2$

**74. RAZONAR** Se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 3$

¿Puedes usar el teorema del factor para factorizar $f(x)$? Explica.




**75. CONEXIONES MATEMÁTICAS** La ecuación estándar de un círculo con radio $r$ y centro $(h, k)$ es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Vuelve a escribir cada ecuación de un círculo en forma estándar. Identifica el centro y el radio del círculo. Luego haz una gráfica del círculo.




**a.** $x^2 + 6x + 9 + y^2 = 25$

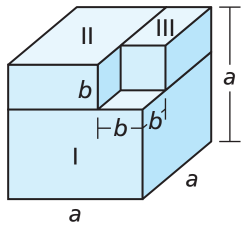
**b.** $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9$

**c.** $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 36$

**76. PENSAMIENTO CRÍTICO** Usa el diagrama para completar las partes (a)–(c).

**a.** Explica por qué $a^3 - b^3$ es igual a la suma de los volúmenes de los cuerpos geométricos I, II y III.

**b.** Escribe una expresión algebraica para el volumen de cada uno de los tres cuerpos geométricos. Deja tus expresiones en forma factorizada.




**c.** Usa los resultados de las partes (a) y (b) para derivar el patrón de factorización $a^3 - b^3$.

## Mantener el dominio de las matemáticas
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Resuelve la ecuación cuadrática mediante factorización.** *(Sección 3.1)*

**77.** $x^2 - x - 30 = 0$

**78.** $2x^2 - 10x - 72 = 0$

**79.** $3x^2 - 11x + 10 = 0$

**80.** $9x^2 - 28x + 3 = 0$

**Resuelve la ecuación cuadrática completando el cuadrado.** *(Sección 3.3)*

**81.** $x^2 - 12x + 36 = 144$

**82.** $x^2 - 8x - 11 = 0$

**83.** $3x^2 + 30x + 63 = 0$

**84.** $4x^2 + 36x - 4 = 0$

# 4.1–4.4 ¿Qué aprendiste?

## Vocabulario Esencial

polinomio, *pág. 158*
función polinomial, *pág. 158*
comportamiento de los extremos, *pág. 159*
Triángulo de Pascal, *pág. 169*
división larga de polinomios, *pág. 174*
división sintética, *pág. 175*
factorizar completamente, *pág. 180*
factorizar agrupando, *pág. 181*
forma cuadrática, *pág. 181*

## Conceptos Esenciales

### Sección 4.1

Funciones polinomiales comunes, *pág. 158*
Comportamiento de los extremos de las funciones polinomiales, *pág. 159*
Hacer gráficas de funciones polinomiales, *pág. 160*

### Sección 4.2

Operaciones con polinomios, *pág. 166*
Patrones de producto especiales, *pág. 167*
Triángulo de Pascal, *pág. 169*

### Sección 4.3

División larga de polinomios, *pág. 174*
División sintética, *pág. 175*
El teorema del residuo, *pág. 176*

### Sección 4.4

Factorizar los polinomios, *pág. 180*
Patrones de factorización especiales, *pág. 180*
El teorema del factor, *pág. 182*

## Prácticas matemáticas

**1.** Describe los puntos de entrada que usaste para analizar la función en el Ejercicio 43 de la página 164.

**2.** Describe cómo supervisaste el proceso de factorización del polinomio en el Ejercicio 49 de la página 185.

### Destrezas de estudio

## Mantener tu mente enfocada

- Cuando te sientes en tu escritorio, revisa tus notas de la última clase.
- Repite mentalmente lo que escribes en tus notas.
- Cuando un concepto matemático sea particularmente difícil, pídele a tu maestro(a) otro ejemplo.

# 4.1–4.4 Prueba

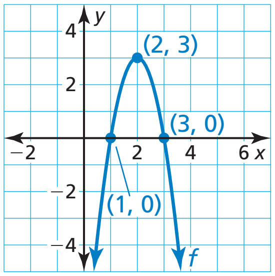
**Decide si la función es una función polinomial. Si lo es, escríbela en forma estándar e indica su grado, tipo y coeficiente principal.** *(Sección 4.1)*

**1.** $f(x) = 5 + 2x^2 - 3x^4 - 2x - x^3$

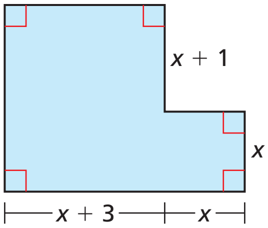
**2.** $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x - 3x^2 + 1$

**3.** $h(x) = 3 - 6x^3 + 4x^{-2} + 6x$

**4.** Describe los valores del eje $x$ por los que (a) $f$ es creciente o decreciente, (b) $f(x) > 0$, y (c) $f(x) < 0$. *(Sección 4.1)*




**5.** Escribe una expresión para el área y el perímetro de la figura que se muestra. *(Sección 4.2)*




**Completa la operación indicada.** *(Sección 4.2)*

**6.** $(7x^2 - 4) - (3x^2 - 5x + 1)$

**7.** $(x^2 - 3x + 2)(3x - 1)$

**8.** $(x - 1)(x + 3)(x - 4)$

**9.** Usa el triángulo de Pascal para desarrollar $(x + 2)^5$. *(Sección 4.2)*

**10.** Divide $4x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 8$ entre $x^2 - 2x - 1$. *(Sección 4.3)*

**Factoriza completamente el polinomio.** *(Sección 4.4)*

**11.** $a^3 - 2a^2 - 8a$

**12.** $8m^3 + 27$

**13.** $z^3 + z^2 - 4z - 4$

**14.** $49b^4 - 64$

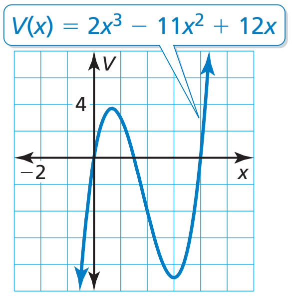
**15.** Demuestra que $x + 5$ es un factor de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$. Luego factoriza $f(x)$ completamente. *(Sección 4.4)*

**16.** El precio estimado $P$ (en centavos) de las estampillas en los Estados Unidos se puede representar mediante la función polinomial $P(t) = 0.007t^3 - 0.16t^2 + 1t + 17$, donde $t$ representa el número de años desde 1990. *(Sección 4.1)*

**a.** Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función del intervalo $0 \leq t \leq 20$. Describe el comportamiento de la gráfica en este intervalo.

**b.** ¿Cuál fue el promedio de la tasa de cambio del precio de las estampillas desde 1990 a 2010?

**17.** El volumen $V$ (en pies cúbicos) de una caja de madera rectangular está representado mediante la función $V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x$, donde $x$ es el ancho (en pies) de la caja. Determina los valores de $x$ por los que el modelo tiene sentido. Explica tu razonamiento. *(Sección 4.4)*



# 4.5 Resolver ecuaciones polinomiales

**Pregunta esencial** ¿Cómo puedes determinar si una ecuación polinomial tiene una solución repetida?

**USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE**

Para dominar las matemáticas, necesitas usar herramientas tecnológicas para explorar y profundizar tu comprensión de los conceptos.

## EXPLORACIÓN 1 Ecuaciones cúbicas y soluciones repetidas

**Trabaja con un compañero.** Algunas ecuaciones cúbicas tienen tres soluciones distintas. Otras tienen soluciones repetidas. Une cada ecuación polinomial cúbica con la gráfica de su función polinomial relacionada. Luego resuelve cada ecuación. Para aquellas ecuaciones que tienen soluciones repetidas, describe el comportamiento de la función relacionada cercana al cero repetido usando la gráfica o una tabla de valores.

**a.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

**b.** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

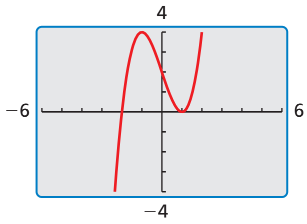
**c.** $x^3 - 3x + 2 = 0$

**d.** $x^3 + x^2 - 2x = 0$

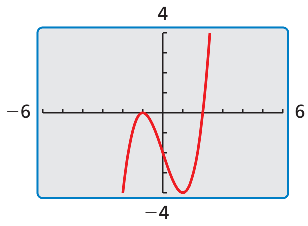
**e.** $x^3 - 3x - 2 = 0$

**f.** $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

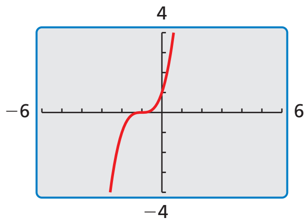
**A.**



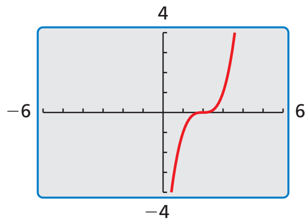

**B.**



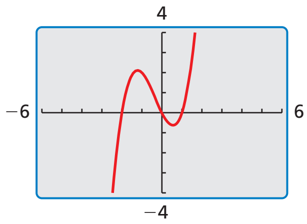

**C.**



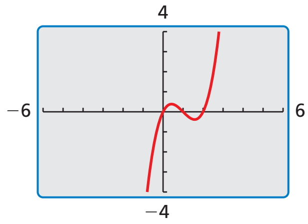

**D.**




**E.**




**F.**




## EXPLORACIÓN 2 Ecuaciones cuárticas y soluciones repetidas

**Trabaja con un compañero.** Determina si cada ecuación cuártica tiene soluciones repetidas usando la gráfica de la función cuártica relacionada o una tabla de valores. Explica tu razonamiento. Luego resuelve cada ecuación.

**a.** $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0$

**b.** $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$

**c.** $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

**d.** $x^4 + 3x^3 = 0$

## Comunicar tu respuesta

**3.** ¿Cómo puedes determinar si una ecuación polinomial tiene una solución repetida?

**4.** Escribe una ecuación polinomial cúbica o cuártica que sea diferente de las ecuaciones de las Exploraciones 1 y 2 y que tenga una solución repetida.

# 4.5 Lección

## Qué aprenderás

- Hallar soluciones de ecuaciones polinomiales y ceros de funciones polinomiales.
- Usar el teorema de la raíz racional.
- Usar el teorema de los valores conjugados irracionales.

### Vocabulario Esencial

solución repetida, *pág. 190*

***Anterior***
raíces de una ecuación
números reales
conjugados

## Hallar soluciones y ceros

Has usado la propiedad del producto cero para resolver ecuaciones cuadráticas factorizables. Puedes extender esta técnica para resolver algunas ecuaciones polinomiales de grado mayor.

### EJEMPLO 1 Resolver una ecuación polinomial factorizando

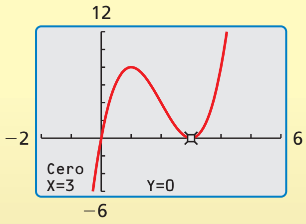
Resuelve $2x^3 - 12x^2 + 18x = 0$.

**SOLUCIÓN**

| | |
|---|---|
| $2x^3 - 12x^2 + 18x = 0$ | Escribe la ecuación. |
| $2x(x^2 - 6x + 9) = 0$ | Factoriza el monomio común. |
| $2x(x - 3)^2 = 0$ | Patrón de trinomio cuadrado perfecto |
| $2x = 0$ o $(x - 3)^2 = 0$ | Propiedad del producto cero |
| $x = 0$ o $x = 3$ | Resuelve para hallar $x$. |

▶ Las soluciones, o raíces, son $x = 0$ y $x = 3$.

**Verifica**




En el Ejemplo 1, el factor $x - 3$ aparece más de una vez. Esto crea una **solución repetida** de $x = 3$. Observa que la gráfica de la función relacionada toca el eje $x$ (pero no cruza el eje $x$) en el cero repetido $x = 3$, y cruza el eje $x$ en el cero $x = 0$. Este concepto se puede generalizar de la siguiente forma.

- Cuando un factor $x - k$ de $f(x)$ se eleva a una potencia impar, la gráfica de $f$ *cruza* el eje $x$ en $x = k$.
- Cuando un factor $x - k$ de $f(x)$ se eleva a una potencia par, la gráfica de $f$ *toca* el eje $x$ (pero no cruza el eje $x$) en $x = k$.

**CONSEJO DE ESTUDIO**

Dado que el factor $x - 3$ aparece dos veces, la raíz $x = 3$ tiene una *multiplicidad* de 2.

### EJEMPLO 2 Hallar los ceros de una función polinomial

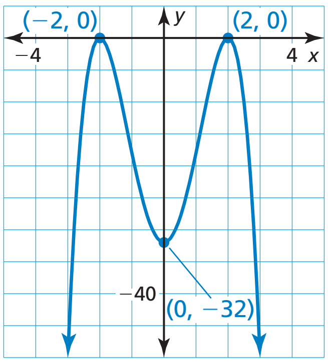
Halla los ceros de $f(x) = -2x^4 + 16x^2 - 32$. Luego dibuja una gráfica de la función.

**SOLUCIÓN**

| | |
|---|---|
| $0 = -2x^4 + 16x^2 - 32$ | Coloca $f(x)$ igual a 0 |
| $0 = -2(x^4 - 8x^2 + 16)$ | Descompone en factores $-2$. |
| $0 = -2(x^2 - 4)(x^2 - 4)$ | Factoriza el trinomio en forma cuadrática. |
| $0 = -2(x + 2)(x - 2)(x + 2)(x - 2)$ | Patrón de diferencia de dos cuadrados |
| $0 = -2(x + 2)^2(x - 2)^2$ | Reescribe usando exponentes. |

Dado que ambos factores $x + 2$ y $x - 2$ se elevan a una potencia par, la gráfica de $f$ toca el eje $x$ en los ceros $x = -2$ y $x = 2$.

Al analizar la función original, puedes determinar que la intersección con el eje $y$ es $-32$. Dado que el grado es par y el coeficiente principal es negativo, $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to +\infty$. Usa estas características para dibujar una gráfica de la función.



## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Resuelve la ecuación.**

**1.** $4x^4 - 40x^2 + 36 = 0$

**2.** $2x^5 + 24x = 14x^3$

**Halla los ceros de la función. Luego dibuja una gráfica de la función.**

**3.** $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 3$

**4.** $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

## El teorema de la raíz racional

Las soluciones de la ecuación $64x^3 + 152x^2 - 62x - 105 = 0$ son $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$. Observa que los numeradores (5, 3, y 7) de los ceros son los factores del término constante, –105. Observa también que los denominadores (2, 4, y 8) son factores del coeficiente principal, 64. Estas observaciones se generalizan mediante el *teorema de la raíz racional*.

### CONSEJO DE ESTUDIO

Observa que puedes usar el *teorema de la raíz racional* para enumerar posibles ceros de las funciones polinomiales.

## Concepto Esencial

### El teorema de la raíz racional

Si $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes *enteros*, entonces toda solución racional de $f(x) = 0$ tiene la siguiente forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{factor del término constante } a_0}{\text{factor del coeficiente principal } a_n}$$

El teorema de la raíz racional puede ser un punto de partida para hallar soluciones de ecuaciones polinomiales. Sin embargo, el teorema enumera solo soluciones *posibles*. Para hallar las soluciones *reales*, debes probar valores de la lista de soluciones posibles.

### EJEMPLO 3 Usar el teorema de la raíz racional

Halla todas las soluciones reales de $x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0$.

### SOLUCIÓN

El polinomio $f(x) = x^3 - 8x^2 + 11x + 20$ no es fácil de factorizar. Comienza usando el teorema de la raíz racional.

### OTRA MANERA

Puedes usar la sustitución directa para probar soluciones posibles, pero la división sintética te ayuda a identificar otros factores del polinomio.

**Paso 1** Haz una lista de las soluciones racionales posibles. El coeficiente principal de $f(x)$ es 1 y el término constante es 20. Entonces, las soluciones racionales posibles de $f(x) = 0$ son

$$x = \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{5}{1}, \pm\frac{10}{1}, \pm\frac{20}{1}.$$

**Paso 2** Prueba soluciones posibles usando la división sintética hasta hallar una solución.

**Prueba $x = 1$**

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -8 & 11 & 20 \\ & & 1 & -7 & 4 \\ \hline & 1 & -7 & 4 & 24 \end{array}$$

$f(1) \neq 0$, entonces $x - 1$ no es un factor de $f(x)$.

**Prueba $x = -1$**

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -8 & 11 & 20 \\ & & -1 & 9 & -20 \\ \hline & 1 & -9 & 20 & 0 \end{array}$$

$f(-1) = 0$, entonces $x + 1$ es un factor de $f(x)$.

**Paso 3** Factoriza completamente usando el resultado de la división sintética.

$(x + 1)(x^2 - 9x + 20) = 0$ Escribe como un producto de factores.

$(x + 1)(x - 4)(x - 5) = 0$ Factoriza el trinomio.

▶ Entonces, las soluciones son $x = -1$, $x = 4$, y $x = 5$.

En el Ejemplo 3, el coeficiente principal del polinomio es 1. Cuando el coeficiente principal no es 1, la lista de soluciones racionales posibles o ceros puede aumentar considerablemente. En esos casos, la búsqueda se puede abreviar usando una gráfica.

## EJEMPLO 4 Hallar los ceros de una función polinomial

Halla todos los ceros reales de $f(x) = 10x^4 - 11x^3 - 42x^2 + 7x + 12$.

### SOLUCIÓN

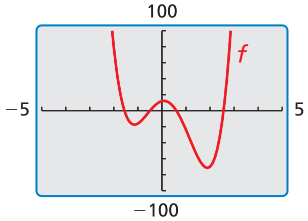
**Paso 1** Enumera los ceros racionales posibles de $f$: $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{6}{1}, \pm\frac{12}{1},$

$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{12}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{3}{10}$

**Paso 2** Elige valores razonables de la lista de arriba para probar usando la gráfica de la función. Para $f$, los valores

$x = -\frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{5},$ y $x = \frac{12}{5}$

son razonables basándonos en la gráfica que se muestra a la derecha.




**Paso 3** Prueba los valores usando la división sintética hasta hallar un cero.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{3}{2} & 10 & -11 & -42 & 7 & 12 \\ & & -15 & 39 & \frac{9}{2} & -\frac{69}{4} \\ \hline & 10 & -26 & -3 & \frac{23}{2} & -\frac{21}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} -\frac{1}{2} & 10 & -11 & -42 & 7 & 12 \\ & & -5 & 8 & 17 & -12 \\ \hline & 10 & -16 & -34 & 24 & 0 \end{array}$$

$-\frac{1}{2}$ es un cero.

**Paso 4** Factoriza un binomio usando el resultado de la división sintética.

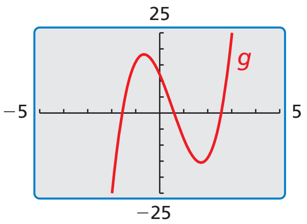
$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(10x^3 - 16x^2 - 34x + 24)$ Escribe como un producto de factores.

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)(2)(5x^3 - 8x^2 - 17x + 12)$ Factoriza 2 del segundo factor.

$= (2x + 1)(5x^3 - 8x^2 - 17x + 12)$ Multiplica el primer factor por 2.

**Paso 5** Repite los pasos de arriba para $g(x) = 5x^3 - 8x^2 - 17x + 12$. Todo cero de $g$ será también cero de $f$. Los posibles ceros racionales de $g$ son:

$x = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{12}{5}$




La gráfica de $g$ demuestra que $\frac{3}{5}$ puede ser un cero. La división sintética demuestra que $\frac{3}{5}$ *es* un cero y $g(x) = \left(x - \frac{3}{5}\right)(5x^2 - 5x - 20) = (5x - 3)(x^2 - x - 4)$. De esto se deduce que:

$f(x) = (2x + 1) \cdot g(x) = (2x + 1)(5x - 3)(x^2 - x - 4)$

**Paso 6** Halla los ceros restantes de $f$ resolviendo $x^2 - x - 4 = 0$.

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$ Sustituye 1 por *a*, –1 por *b* y –4 por *c* en la fórmula cuadrática.

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ Simplifica

▶ Los ceros reales de $f$ son $-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \approx 2.56$, y $\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \approx -1.56$.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

5. Halla todas las soluciones reales de $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$.
6. Halla todos los ceros reales de $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 37x^2 + 24x + 12$.

## El teorema de los valores conjugados irracionales

En el Ejemplo 4, observa que los ceros irracionales son *valores conjugados* de la forma $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$. Esto ilustra el teorema a continuación.

## Concepto Esencial

### El teorema de los valores conjugados irracionales

Imagina que $f$ sea una función polinomial con coeficientes racionales, y que $a$ y $b$ sean números racionales, de tal manera que $\sqrt{b}$ es irracional. Si $a + \sqrt{b}$ es un cero de $f$, entonces $a - \sqrt{b}$ también es un cero de $f$.

### EJEMPLO 5 Usar los ceros para escribir una función polinomial

Escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1 y los ceros 3 y $2 + \sqrt{5}$.

**SOLUCIÓN**

Dado que los coeficientes son racionales y $2 + \sqrt{5}$ es un cero, $2 - \sqrt{5}$ también debe ser cero según el teorema de conjugados irracionales. Usa los tres ceros y el teorema del factor para escribir $f(x)$ como un producto de tres factores.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-3)\left[x - \left(2+\sqrt{5}\right)\right]\left[x - \left(2-\sqrt{5}\right)\right] && \text{Escribe } f(x) \text{ en forma factorizada.}\\
&= (x-3)\left[(x-2) - \sqrt{5}\right]\left[(x-2) + \sqrt{5}\right] && \text{Reagrupa los términos.}\\
&= (x-3)\left[(x-2)^2 - 5\right] && \text{Multiplica.}\\
&= (x-3)\left[(x^2-4x+4) - 5\right] && \text{Desarrolla el binomio.}\\
&= (x-3)(x^2-4x-1) && \text{Simplifica.}\\
&= x^3 - 4x^2 - x - 3x^2 + 12x + 3 && \text{Multiplica.}\\
&= x^3 - 7x^2 + 11x + 3 && \text{Combina los términos semejantes.}
\end{aligned}$$

**Verifica**

Puedes verificar este resultado evaluando $f$ en cada uno de sus tres ceros.

$$f(3) = 3^3 - 7(3)^2 + 11(3) + 3 = 27 - 63 + 33 + 3 = 0 \checkmark$$

$$\begin{aligned}
f\left(2+\sqrt{5}\right) &= \left(2+\sqrt{5}\right)^3 - 7\left(2+\sqrt{5}\right)^2 + 11\left(2+\sqrt{5}\right) + 3\\
&= 38 + 17\sqrt{5} - 63 - 28\sqrt{5} + 22 + 11\sqrt{5} + 3\\
&= 0 \checkmark
\end{aligned}$$

Dado que $f\left(2+\sqrt{5}\right) = 0$, por el teorema de conjugados irracionales $f\left(2-\sqrt{5}\right) = 0$. ✓

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

7. Escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1, y los ceros 4 y $1 - \sqrt{5}$.

# 4.5 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Si una función polinomial $f$ tiene coeficientes enteros, entonces toda solución racional de $f(x) = 0$ tiene la forma $\frac{p}{q}$, donde $p$ es un factor de ____________ y $q$ es un factor de ____________.

2. **DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** ¿Cuál es diferente? Halla "ambas" respuestas.

| | |
|---|---|
| Halla la intersección con el eje $y$ de la gráfica de $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$. | Halla las intersecciones con el eje $x$ de la gráfica de $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$. |
| Halla todas las soluciones reales de $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. | Halla los ceros reales de $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. |

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 3–12, resuelve la ecuación.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $z^3 - z^2 - 12z = 0$
4. $a^3 - 4a^2 + 4a = 0$
5. $2x^4 - 4x^3 = -2x^2$
6. $v^3 - 2v^2 - 16v = -32$
7. $5w^3 = 50w$
8. $9m^5 = 27m^3$
9. $2c^4 - 6c^3 = 12c^2 - 36c$
10. $p^4 + 40 = 14p^2$
11. $12n^2 + 48n = -n^3 - 64$
12. $y^3 - 27 = 9y^2 - 27y$

**En los Ejercicios 13–20, halla los ceros de la función. Luego dibuja una gráfica de la función.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $h(x) = x^4 + x^3 - 6x^2$
14. $f(x) = x^4 - 18x^2 + 81$
15. $p(x) = x^6 - 11x^5 + 30x^4$
16. $g(x) = -2x^5 + 2x^4 + 40x^3$
17. $g(x) = -4x^4 + 8x^3 + 60x^2$
18. $h(x) = -x^3 - 2x^2 + 15x$
19. $h(x) = -x^3 - x^2 + 9x + 9$
20. $p(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

21. **USAR ECUACIONES** De acuerdo con el teorema de la raíz racional, ¿cuál *no* es una solución posible de la ecuación $2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 9 = 0$?

   (A) $-9$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $3$

22. **USAR ECUACIONES** De acuerdo con el teorema de la raíz racional, ¿cuál *no* es un posible cero de la función $f(x) = 40x^5 - 42x^4 - 107x^3 + 107x^2 + 33x - 36$?

   (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

**ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 23 y 24, describe y corrige el error al enumerar los posibles ceros racionales de la función.**

23. ✗

$f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$

Posibles ceros racionales de $f$:
$1, 3, 5, 9, 15, 45$

24. ✗

$f(x) = 3x^3 + 13x^2 - 41x + 8$

Posibles ceros racionales de $f$:
$\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{8}$

**En los Ejercicios 25–32, halla todas las soluciones reales de la ecuación.** *(Consulta el Ejemplo 3).*

25. $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$
26. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

27. $x^3 - 10x^2 + 19x + 30 = 0$

28. $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$

29. $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$

30. $x^3 - 16x^2 + 55x + 72 = 0$

31. $2x^3 - 3x^2 - 50x - 24 = 0$

32. $3x^3 + x^2 - 38x + 24 = 0$

**En los Ejercicios del 33–38, halla todos los ceros reales de la función.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

33. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$

34. $g(x) = x^3 - 28x - 48$

35. $h(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$

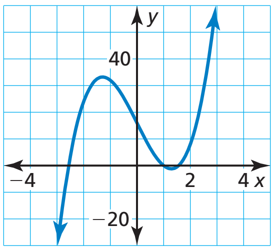
36. $f(x) = x^3 - 14x^2 + 55x - 42$

37. $p(x) = 2x^3 - x^2 - 27x + 36$

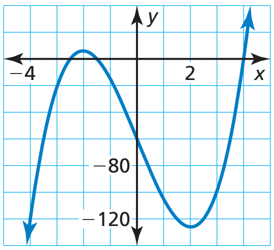
38. $g(x) = 3x^3 - 25x^2 + 58x - 40$

**USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 39 y 40, usa la gráfica para abreviar la lista de ceros racionales posibles de la función. Luego halla todos los ceros reales de la función.**

39. $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$




40. $f(x) = 4x^3 - 49x - 60$




**En los Ejercicios 41–46, escribe una función polinomial *f* de menor grado que tenga un coeficiente principal de 1 y los ceros dados.** *(Consulta el Ejemplo 5).*

41. $-2, 3, 6$

42. $-4, -2, 5$

43. $-2, 1 + \sqrt{7}$

44. $4, 6 - \sqrt{7}$

45. $-6, 0, 3 - \sqrt{5}$

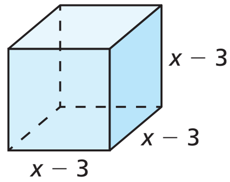
46. $0, 5, -5 + \sqrt{8}$

47. **COMPARAR MÉTODOS** Resuelve la ecuación $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$ usando dos métodos diferentes. ¿Cuál método prefieres? Explica tu razonamiento.

48. **RAZONAR** ¿Es posible que una función cúbica tenga más de tres ceros reales? Explica.

49. **RESOLVER PROBLEMAS** En una fábrica se vierte vidrio fundido en moldes para hacer pisapapeles. Cada molde es un prisma rectangular con una altura de 3 centímetros más que la longitud de cada lado de su base cuadrada. Cada molde tiene una capacidad de 112 centímetros cúbicos de vidrio. ¿Cuáles son las dimensiones del molde?

50. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** El volumen del cubo que se muestra es de 8 centímetros cúbicos.




a. Escribe una ecuación polinomial que puedas usar para hallar el valor de $x$.

b. Identifica las posibles soluciones racionales de la ecuación en la parte (a.)

c. Usa la división sintética para hallar una solución racional de la ecuación. Muestra que no existen otras soluciones reales.

d. ¿Cuáles son las dimensiones del cubo?

51. **RESOLVER PROBLEMAS** Los arqueólogos descubrieron un enorme bloque de concreto hidráulico en las ruinas de Cesarea, con un volumen de 945 metros cúbicos. El bloque tiene $x$ metros de altura por $12x - 15$ metros de longitud por $12x - 21$ metros de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del bloque?

52. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que cuando una función polinomial tiene un coeficiente principal de 1 y los coeficientes son todos números enteros, todo cero racional posible es un entero. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

53. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Durante un periodo de 10 años, la cantidad (en millones de dólares) de equipo deportivo $E$ vendido a nivel nacional se puede representar mediante $E(t) = -20t^3 + 252t^2 - 280t + 21{,}614$, donde $t$ está expresado en años.

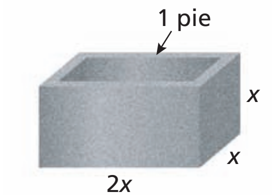
a. Escribe una ecuación polinomial para hallar el año en el que se vendió aproximadamente \$24,014,000,000 de equipo deportivo.

b. Enumera las soluciones de números enteros posibles de la ecuación en la parte (a.) Considera el dominio al hacer tu lista de posibles soluciones.

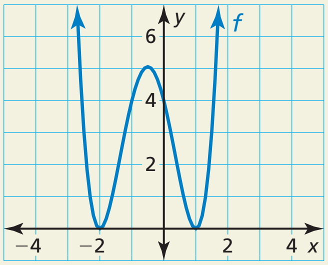
c. Usa la división sintética para hallar cuándo se vende \$24,014,000,000 de equipo deportivo.

**54. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe una función polinomial de tercero o cuarto grado que tenga ceros en $\pm\frac{3}{4}$. Justifica tu respuesta.

**55. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Estás diseñando una tinaja de mármol que tendrá una fuente para un parque de la ciudad. Los lados y la base de la tinaja deben tener 1 pie de grosor. Su longitud exterior debe ser el doble de su ancho y su altura exterior. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones exteriores de la tinaja para contener 36 pies cúbicos de agua?




**56. ¿CÓMO LO VES?** Usa la información de la gráfica para responder las preguntas.




**a.** ¿Cuáles son los ceros reales de la función $f$?

**b.** Escribe una ecuación de la función cuártica en forma factorizada.

**57. RAZONAR** Determina el valor de $k$ de cada ecuación de manera que el valor de $x$ dado sea una solución.

**a.** $x^3 - 6x^2 - 7x + k = 0$; $x = 4$

**b.** $2x^3 + 7x^2 - kx - 18 = 0$; $x = -6$

**c.** $kx^3 - 35x^2 + 19x + 30 = 0$; $x = 5$

**58. ESCRIBIR ECUACIONES** Escribe una función polinomial $g$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1 y los ceros $-2 + \sqrt{7}$ y $3 + \sqrt{2}$.

**En los Ejercicios 59–62, resuelve $f(x) = g(x)$ con una gráfica y métodos algebraicos.**

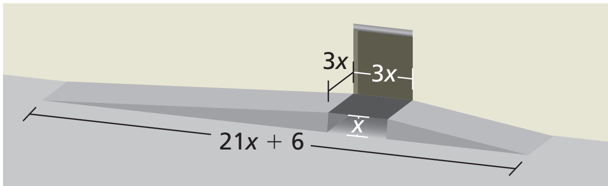
**59.** $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $g(x) = -x + 1$

**60.** $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$; $g(x) = -x^2 + 6x - 8$

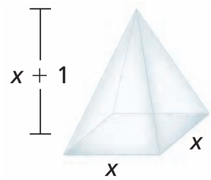
**61.** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$; $g(x) = -2x + 4$

**62.** $f(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$; $g(x) = -x^2 - 6x - 9$

**63. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Estás construyendo un par de rampas para una plataforma de carga. La rampa izquierda tiene el doble de la longitud de la rampa derecha. Si se usan 150 pies cúbicos de concreto para construir las rampas, ¿cuáles son las dimensiones de cada rampa?




**64. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Algunas esculturas de hielo se hacen rellenando un molde y luego congelándolo. Estás haciendo un molde de hielo para un baile escolar. Debe tener la forma de una pirámide, con una altura de 1 pie mayor a la longitud de cada lado de su base cuadrada. El volumen de la escultura de hielo es de 4 pies cúbicos. ¿Cuáles son las dimensiones del molde?




**65. RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Imagina que $a_n$ sea el coeficiente principal de una función polinomial $f$ y que $a_0$ sea el término constante. Si $a_n$ tiene $r$ factores y $a_0$ tiene $s$ factores, ¿cuál es el mayor número de ceros razonables posibles de $f$ que se pueden generar por el teorema del cero racional? Explica tu razonamiento.

## Mantener el dominio de las matemáticas
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Decide si la función es una función polinomial. Si lo es, escríbela en forma estándar e indica su grado, tipo y coeficiente principal.** *(Sección 4.1)*

**66.** $h(x) = -3x^2 + 2x - 9 + \sqrt{4}x^3$

**67.** $g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 3x^{-1} + x$

**68.** $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x^3 - 4x^4 - \sqrt{3}$

**69.** $p(x) = 2x - 5x^3 + 9x^2 + \sqrt[4]{x} + 1$

**Halla los ceros de la función.** *(Sección 3.2)*

**70.** $f(x) = 7x^2 + 42$

**71.** $g(x) = 9x^2 + 81$

**72.** $h(x) = 5x^2 + 40$

**73.** $f(x) = 8x^2 - 1$

# 4.6 El teorema fundamental del álgebra

**Pregunta esencial** ¿Cómo puedes determinar si una ecuación polinomial tiene soluciones imaginarias?

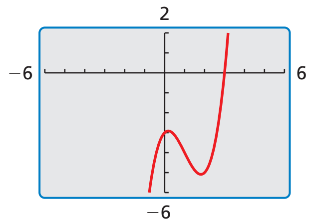
## EXPLORACIÓN 1 Ecuaciones cúbicas y soluciones imaginarias

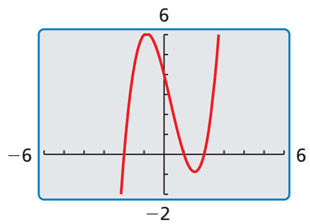
**Trabaja con un compañero.** Une cada ecuación polinomial cúbica con la gráfica de su función polinomial relacionada. Luego halla *todas* las soluciones. Haz una conjetura acerca de cómo puedes usar una gráfica o tabla de valores para determinar el número y los tipos de soluciones de una ecuación polinomial cúbica.

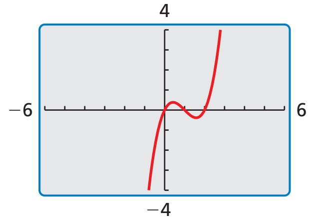
**a.** $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$　　**b.** $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

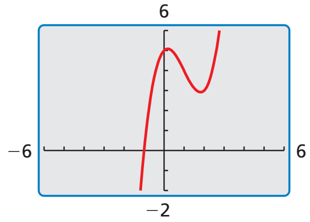
**c.** $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$　　**d.** $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 = 0$

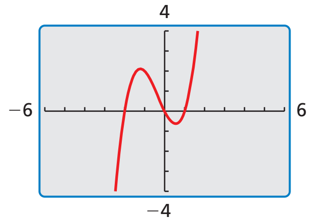
**e.** $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$　　**f.** $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

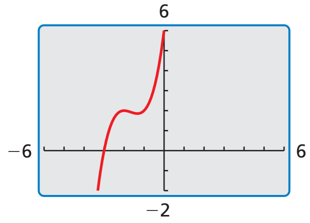
**A.**



**B.**



**C.**



**D.**



**E.**



**F.**



**USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE**

Para dominar las matemáticas, necesitas usar la tecnología para que puedas visualizar resultados y explorar consecuencias.

## EXPLORACIÓN 2 Ecuaciones cuárticas y soluciones imaginarias

**Trabaja con un compañero.** Usa la gráfica de la función cuártica relacionada, o una tabla de valores, para determinar si cada ecuación cuártica tiene soluciones imaginarias. Explica tu razonamiento. Luego halla *todas* las soluciones.

**a.** $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$　　**b.** $x^4 - 1 = 0$

**c.** $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$　　**d.** $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

## Comunicar tu respuesta

**3.** ¿Cómo puedes determinar si una ecuación polinomial tiene soluciones imaginarias?

**4.** ¿Es posible que una ecuación cúbica tenga tres soluciones imaginarias? Explica tu razonamiento.

# 4.6 Lección

## Qué aprenderás

- Usar el teorema fundamental del álgebra.
- Hallar los pares conjugados de los ceros complejos de las funciones polinomiales.
- Usar la regla de los signos de Descartes.

### Vocabulario Esencial

números complejos conjugados, *pág. 199*

***Anterior***
solución repetida
grado de un polinomio
solución de una ecuación
cero de una función
conjugados

## El teorema fundamental del álgebra

La tabla muestra varias ecuaciones polinomiales y sus soluciones, incluyendo soluciones repetidas. Observa que para la última ecuación, la solución repetida $x = -1$ se cuenta dos veces.

| Ecuación | Grado | Solución(es) | Número de soluciones |
|---|---|---|---|
| $2x - 1 = 0$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $x^2 - 2 = 0$ | 2 | $\pm\sqrt{2}$ | 2 |
| $x^3 - 8 = 0$ | 3 | $2, -1 \pm i\sqrt{3}$ | 3 |
| $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ | 3 | $-1, -1, 1$ | 3 |

En la tabla, fíjate que la relación entre el grado del polinomio $f(x)$ y el número de soluciones de $f(x) = 0$. Esta relación se generaliza por el *teorema fundamental del álgebra*, comprobado por primera vez por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777−1855).

## Concepto Esencial

### El teorema fundamental del álgebra

**Teorema** Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n$ donde $n > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene por lo menos una solución en el conjunto de números complejos.

**Corolario** Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n$ donde $n > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente $n$ soluciones siempre que cada solución repetida dos veces se cuente como dos soluciones, cada solución repetida tres veces se cuente como tres soluciones, y así sucesivamente.

### CONSEJO DE ESTUDIO

Los enunciados "la ecuación polinomial $f(x) = 0$ tiene exactamente $n$ soluciones" y "la función polinomial $f$ tiene exactamente $n$ ceros" son equivalentes.

El corolario del teorema fundamental del álgebra también significa que una función polinomial de enésimo grado $f$ tiene exactamente $n$ ceros.

**EJEMPLO 1** **Hallar el número de soluciones o ceros**

**a.** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3 + 3x^2 + 16x + 48 = 0$?

**b.** ¿Cuántos ceros tiene la función $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$?

**SOLUCIÓN**

**a.** Dado que $x^3 + 3x^2 + 16x + 48 = 0$ es una ecuación polinomial de grado 3, tiene tres soluciones. (Las soluciones son $-3$, $4i$ y $-4i$).

**b.** Dado que $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$ es una función polinomial de grado 4, tiene cuatro ceros. (Los ceros son $-2$, $-2$, $-2$ y 0).

## EJEMPLO 2 Hallar los ceros de una función polinomial

Halla los ceros de $f(x) = x^5 + x^3 - 2x^2 - 12x - 8$.

**SOLUCIÓN**

**Paso 1** Halla los ceros racionales de $f$. Dado que $f$ es una función polinomial de grado 5, tiene cinco ceros. Los ceros razonables posibles son $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 4$ y $\pm 8$. Usando la división sintética, puedes determinar que $-1$ es un cero repetido dos veces y 2 también es un cero.

**Paso 2** Escribe $f(x)$ en forma factorizada. Dividir $f(x)$ entre sus factores conocidos $x + 1$, $x + 1$, y $x - 2$ da un cociente de $x^2 + 4$. Entonces,

$$f(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x^2 + 4).$$

**Paso 3** Halla los ceros complejos de $f$. Al resolver $x^2 + 4 = 0$, obtienes $x = \pm 2i$. Esto significa que $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$.

$$f(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$$

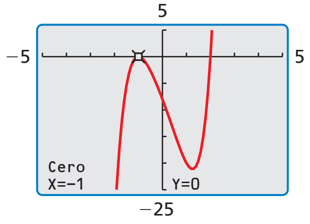
### CONSEJO DE ESTUDIO

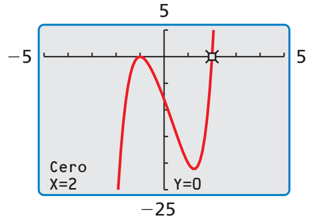
Observa que puedes usar números imaginarios para escribir $(x^2 + 4)$ como $(x + 2i)(x - 2i)$. En general, $(a^2 + b^2) = (a + bi)(a - bi)$.

▶ Basándose en la factorización, hay cinco ceros. Los ceros de $f$ son

$$-1,\ -1,\ 2,\ -2i,\ \text{y}\ 2i$$

Se muestra la gráfica de $f$ y los ceros reales. Observa que solo los *ceros reales* aparecen como intersecciones con el eje $x$. También, la gráfica de $f$ toca el eje $x$ en el cero repetido $x = -1$ y cruza el eje $x$ en $x = 2$.




## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**1.** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^4 + 7x^2 - 144 = 0$?

**2.** ¿Cuántos ceros tiene la función $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$?

**Halla todos los ceros de la función polinomial.**

**3.** $f(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$

**4.** $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x^2 - 6x + 4$

## Números conjugados complejos

Los pares de números complejos de las formas $a + bi$ y $a - bi$, donde $b \neq 0$, se llaman ***números conjugados complejos***. En el Ejemplo 2, observa que los ceros $2i$ y $-2i$ son números conjugados complejos. Esto ejemplifica el siguiente teorema.

## Concepto Esencial

### El teorema de los números conjugados complejos

Si $f$ es una función polinomial con coeficientes reales, y $a + bi$ es un cero imaginario de $f$, entonces $a - bi$ es también un cero de $f$.

## EJEMPLO 3 Usar ceros para escribir una función polinomial

Escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1 y los ceros 2 y $3 + i$.

### SOLUCIÓN

Dado que los coeficientes son racionales y $3 + i$ es un cero, $3 - i$ también debe ser cero por el teorema de los números conjugados complejos. Usa los tres ceros y el teorema del factor para escribir $f(x)$ como un producto de tres factores.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)[x-(3+i)][x-(3-i)] && \text{Escribe } f(x) \text{ en forma factorizada.}\\
&= (x-2)[(x-3)-i][(x-3)+i] && \text{Reagrupa los términos.}\\
&= (x-2)[(x-3)^2-i^2] && \text{Multiplica.}\\
&= (x-2)[(x^2-6x+9)-(-1)] && \text{Desarrolla el binomio y usa } i^2=-1.\\
&= (x-2)(x^2-6x+10) && \text{Simplifica.}\\
&= x^3-6x^2+10x-2x^2+12x-20 && \text{Multiplica.}\\
&= x^3-8x^2+22x-20 && \text{Combina los términos semejantes.}
\end{aligned}
$$

**Verifica**

Puedes verificar este resultado evaluando $f$ en cada uno de sus tres ceros.

$$f(2) = (2)^3 - 8(2)^2 + 22(2) - 20 = 8 - 32 + 44 - 20 = 0 \checkmark$$

$$
\begin{aligned}
f(3+i) &= (3+i)^3 - 8(3+i)^2 + 22(3+i) - 20\\
&= 18 + 26i - 64 - 48i + 66 + 22i - 20\\
&= 0 \checkmark
\end{aligned}
$$

Dado que $f(3 + i) = 0$, por el teorema de los números conjugados complejos $f(3 - i) = 0$. ✓

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1 y los ceros dados.**

**5.** $-1, 4i$ **6.** $3, 1 + i\sqrt{5}$ **7.** $\sqrt{2}, 1 - 3i$ **8.** $2, 2i, 4 - \sqrt{6}$

## Regla de los signos de Descartes

El matemático francés René Descartes (1596−1650) halló la siguiente relación entre los coeficientes de una función polinomial y el número de ceros positivos y negativos de la función.

## Concepto Esencial

### Regla de los signos de Descartes

Imagina que $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ sea una función polinomial con coeficientes reales.

- El número de *ceros reales positivos* de $f$ es igual al número de cambios en el signo de los coeficientes de $f(x)$ o es menor que este por un número par.
- El número de *ceros reales negativos* de $f$ es igual al número de cambios en el signo de los coeficientes de $f(-x)$ o es menor que este por un número par.

## EJEMPLO 4 Usar la regla de los signos de Descartes

Determina los posibles números de ceros reales positivos, ceros reales negativos y ceros imaginarios para $f(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 10x^3 - 6x^2 - 8x - 8$.

### SOLUCIÓN

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 10x^3 - 6x^2 - 8x - 8.$$

Los coeficientes de $f(x)$ tienen 3 cambios de signo, entonces $f$ tiene 3 o 1 cero(s) real(es) positivo(s.)

$$f(-x) = (-x)^6 - 2(-x)^5 + 3(-x)^4 - 10(-x)^3 - 6(-x)^2 - 8(-x) - 8$$
$$= x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 8x - 8$$

Los coeficientes de $f(-x)$ tiene 3 cambios de signo, entonces $f$ tiene 3 o 1 cero(s) negativo(s.)

▶ Los números posibles de ceros para $f$ están resumidos en la tabla a continuación.

| Ceros reales positivos | Ceros reales negativos | Ceros imaginarios | Ceros totales |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 0 | 6 |
| 3 | 1 | 2 | 6 |
| 1 | 3 | 2 | 6 |
| 1 | 1 | 4 | 6 |

## EJEMPLO 5 Uso en la vida real


Un tacómetro mide la velocidad (en revoluciones por minuto o RPM) en la que rota un eje de motor. Para cierto bote, la velocidad $x$ (en cientos de RPM) del eje del motor y la velocidad $s$ (en millas por hora) del bote están representadas mediante

$$s(x) = 0.00547x^3 - 0.225x^2 + 3.62x - 11.0.$$

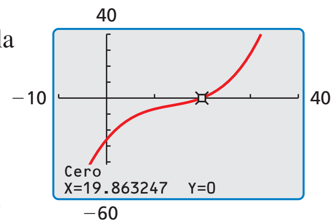
¿Cuál es la lectura del tacómetro cuando el bote va a 15 millas por hora?

### SOLUCIÓN

Sustituye 15 por $s(x)$ en la función. Puedes volver a escribir la ecuación resultante como

$$0 = 0.00547x^3 - 0.225x^2 + 3.62x - 26.0.$$

La función relacionada con esta ecuación es $f(x) = 0.00547x^3 - 0.225x^2 + 3.62x - 26.0$. Por la regla de los signos de Descartes, sabes que $f$ tiene 3 o 1 cero(s) real(es) positivo(s.) En el contexto de la velocidad, los ceros reales negativos y ceros imaginarios no tienen sentido, así que no necesitas verificarlos. Para aproximar los ceros reales positivos de $f$, usa una calculadora gráfica. Basándose en la gráfica, hay 1 cero real, $x \approx 19.9$.




▶ La lectura del tacómetro es de aproximadamente 1990 RPM.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Determina los posibles números de ceros reales positivos, ceros reales negativos y ceros imaginarios para la función.**

**9.** $f(x) = x^3 + 9x - 25$

**10.** $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + x^2 - 13x + 8$

**11.** **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 5, ¿cuánto marca el tacómetro cuando el bote viaja a 20 millas por hora?

# 4.6 Ejercicios

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Las expresiones $5 + i$ y $5 - i$ son ______________.

2. **ESCRIBIR** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación polinomial $(x + 8)^3(x - 1) = 0$? Explica.

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 3–8, identifica el número de soluciones o ceros.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

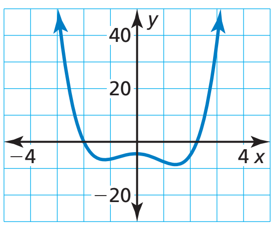
3. $x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x = 0$
4. $5y^3 - 3y^2 + 8y = 0$
5. $9t^6 - 14t^3 + 4t - 1 = 0$
6. $f(z) = -7z^4 + z^2 - 25$
7. $g(s) = 4s^5 - s^3 + 2s^7 - 2$
8. $h(x) = 5x^4 + 7x^8 - x^{12}$

**En los Ejercicios 9–16, halla todos los ceros de la función polinomial.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

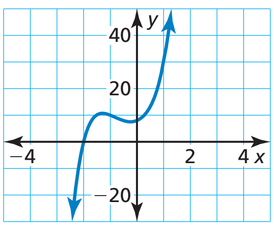
9. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$
10. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$
11. $g(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$
12. $h(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
13. $g(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 16x + 12$
14. $h(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$
15. $g(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 12x - 16$
16. $f(x) = x^5 - 20x^3 + 20x^2 - 21x + 20$

**ANALIZAR RELACIONES En los Ejercicios 17–20, determina el número de ceros imaginarios para la función con el grado y gráfica dados. Explica tu razonamiento.**

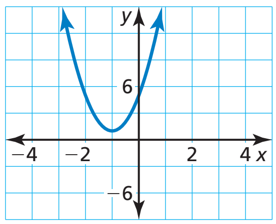
17. Grado: 4



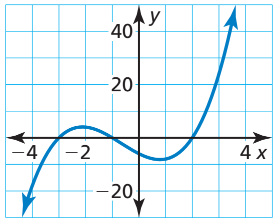

18. Grado: 5




19. Grado: 2




20. Grado: 3




**En los Ejercicios 21–28, escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1, y los ceros dados.** *(Consulta el Ejemplo 3).*

21. $-5, -1, 2$
22. $-2, 1, 3$
23. $3, 4 + i$
24. $2, 5 - i$
25. $4, -\sqrt{5}$
26. $3i, 2 - i$
27. $2, 1 + i, 2 - \sqrt{3}$
28. $3, 4 + 2i, 1 + \sqrt{7}$

**ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 29 y 30, describe y corrige el error al escribir una función polinomial con coeficiente racional y el (los) cero(s) dado(s.)**

29. Ceros: $2, 1 + i$

✗

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 2)[x - (1 + i)] \\ &= x(x - 1 - i) - 2(x - 1 - i) \\ &= x^2 - x - ix - 2x + 2 + 2i \\ &= x^2 - (3 + i)x + (2 + 2i) \end{aligned}$$

30. Cero: $2 + i$

✗

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x + (2 + i)] \\ &= (x - 2 - i)(x + 2 + i) \\ &= x^2 + 2x + ix - 2x - 4 - 2i - ix - 2i - i^2 \\ &= x^2 - 4i - 3 \end{aligned}$$

31. **FINAL ABIERTO** Escribe una función polinomial de grado 6 con ceros 1, 2, y $-i$. Justifica tu respuesta.

32. **RAZONAR** Dos ceros de $f(x) = x^3 - 6x^2 - 16x + 96$ son 4 y $-4$. Explica por qué el tercer cero debe ser también un número real.

**En los Ejercicios 33–40, determina los posibles números de ceros reales positivos, ceros reales negativos y ceros imaginarios para la función.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

33. $g(x) = x^4 - x^2 - 6$

34. $g(x) = -x^3 + 5x^2 + 12$

35. $g(x) = x^3 - 4x^2 + 8x + 7$

36. $g(x) = x^5 - 2x^3 - x^2 + 6$

37. $g(x) = x^5 - 3x^3 + 8x - 10$

38. $g(x) = x^5 + 7x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 9x - 15$

39. $g(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 + 9x - 18$

40. $g(x) = x^7 + 4x^4 - 10x + 25$

41. **RAZONAR** ¿Cuál *no* es una posible clasificación de ceros para $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 + 2x - 6$? Explica.

    Ⓐ tres ceros reales positivos, dos ceros reales negativos y ningún cero imaginario

    Ⓑ tres ceros reales positivos, ningún cero real negativo y dos ceros imaginarios

    Ⓒ un cero real positivo, cuatro ceros reales negativos, y ningún cero imaginario

    Ⓓ un cero real positivo, dos ceros reales negativos y dos ceros imaginarios.

42. **USAR LA ESTRUCTURA** Usa la regla de los signos de Descartes para determinar qué función tiene por lo menos 1 cero real positivo.

    Ⓐ $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x - 8$

    Ⓑ $f(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16$

    Ⓒ $f(x) = -x^4 - 5x^2 - 4$

    Ⓓ $f(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 12x + 12$

43. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Desde 1890 a 2000, la población india americana, esquimal y aleutiana $P$ (en miles) se puede representar mediante la función $P = 0.004t^3 - 0.24t^2 + 4.9t + 243$, donde $t$ es el número de años desde 1890. ¿En qué año la población llegó por primera vez a 722,000? *(Consulta el Ejemplo 5).*

44. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Durante un periodo de 14 años, el número $N$ de lagos del interior infestados de mejillones cebra en cierto estado se puede representar mediante

$$N = -0.0284t^4 + 0.5937t^3 - 2.464t^2 + 8.33t - 2.5$$

donde $t$ es tiempo (en años). ¿En qué año el número de lagos del interior infestados llegó a 120 por primera vez?

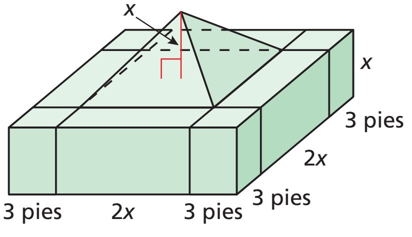
45. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Durante los 12 años que un supermercado ha estado abierto, sus ingresos anuales $R$ (en millones de dólares) se pueden representar mediante la función

$$R = 0.0001(-t^4 + 12t^3 - 77t^2 + 600t + 13{,}650)$$

donde $t$ es el número de años desde que abrió el supermercado. ¿En qué año(s) los ingresos fueron de \$1.5 millones?

46. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que $2 - i$ es un cero complejo de la función polinomial $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5i$, pero que su conjugado *no* es un cero. Tú dices que ambos, $2 - i$ y su conjugado *tienen* que ser ceros por el teorema de conjugados complejos. ¿Quién tiene razón? Justifica tu respuesta.

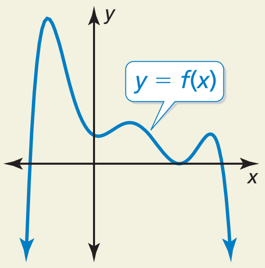
47. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Se va a construir un monumento sólido con las dimensiones mostradas usando 1000 pies cúbicos de mármol. ¿Cuál es el valor de $x$?



**48. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe y haz una gráfica de una función polinomial de grado 5 que tenga todos los ceros reales positivos o negativos. Rotula cada intersección con el eje $x$. Luego escribe la función en forma estándar.

**49. ESCRIBIR** La gráfica de la función polinomial constante $f(x) = 2$ es una recta que no tiene ninguna intersección con el eje $x$. ¿Contradice ésta función el teorema fundamental del álgebra? Explica.

**50. ¿CÓMO LO VES?** La gráfica representa una función polinomial de grado 6.




**a.** ¿Cuántos ceros reales positivos tiene la función? ¿Cuántos ceros reales negativos? ¿Cuántos ceros imaginarios?

**b.** Usa la regla de los signos de Descartes y tus respuestas en la parte (a) para describir los posibles cambios de signos en los coeficientes de $f(x)$.

**51. HALLAR UN PATRÓN** Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función $f(x) = (x + 3)^n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6,$ y 7.

**a.** Compara las gráficas cuando $n$ es par y cuando $n$ es impar.

**b.** Describe el comportamiento de la gráfica cerca del cero $x = -3$ en la medida que $n$ aumenta.

**c.** Usa tus resultados de las partes (a) y (b) para describir el comportamiento de la gráfica de $g(x) = (x - 4)^{20}$ cerca de $x = 4$.

**52. SACAR CONCLUSIONES** Halla los ceros de cada función.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$
$$g(x) = x^3 - 7x + 6$$
$$h(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$$
$$k(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 6x$$

**a.** Describe la relación entre la suma de los ceros de una función polinomial y los coeficientes de la función polinomial.

**b.** Describe la relación entre el producto de los ceros de una función polinomial y los coeficientes de la función polinomial.

**53. RESOLVER PROBLEMAS** Quieres ahorrar dinero para poder comprar un carro usado en cuatro años. Al final de cada verano, depositas en tu cuenta bancaria \$1000 que ganaste trabajando durante ese verano. La tabla muestra el valor de tus depósitos durante el periodo de cuatro años. En la tabla, $g$ es el factor de crecimiento $1 + r$, donde $r$ es la tasa de interés anual expresada como decimal.

| Depósito | Año 1 | Año 2 | Año 3 | Año 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1er depósito | 1000 | $1000g$ | $1000g^2$ | $1000g^3$ |
| 2do depósito | – | 1000 | | |
| 3er depósito | – | – | 1000 | |
| 4to depósito | – | – | – | 1000 |

**a.** Copia y completa la tabla.

**b.** Escribe una función polinomial que dé el valor $v$ de tu cuenta al final del cuarto verano en términos de $g$.

**c.** Quieres comprar un carro que cuesta aproximadamente \$4300. ¿Qué factor de crecimiento necesitas para obtener este monto? ¿Qué tasa de interés anual necesitas?

## Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Describe la transformación de $f(x) = x^2$ representada por $g$. Luego haz una gráfica de cada función.** *(Sección 2.1)*

**54.** $g(x) = -3x^2$

**55.** $g(x) = (x - 4)^2 + 6$

**56.** $g(x) = -(x - 1)^2$

**57.** $g(x) = 5(x + 4)^2$

**Escribe una función $g$ cuya gráfica represente la transformación indicada de la gráfica de $f$.** *(Secciones 1.2 y 2.1)*

**58.** $f(x) = x$; encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{3}$ y una reflexión en el eje $y$.

**59.** $f(x) = |x + 1| - 3$; alargamiento horizontal por un factor de 9.

**60.** $f(x) = x^2$; reflexión en el eje $x$, seguida por una traslación 2 unidades hacia la derecha y 7 unidades hacia arriba.

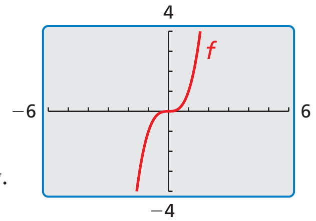
# 4.7 Transformaciones de funciones polinomiales

**Pregunta esencial** ¿Cómo puedes transformar la gráfica de una función polinomial?

## EXPLORACIÓN 1 Transformar la gráfica de una función cúbica

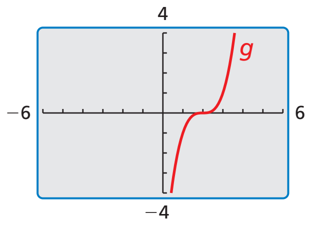
**Trabaja con un compañero.** Se muestra la gráfica de la función cúbica

$$f(x) = x^3$$

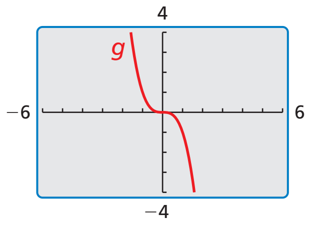



La gráfica de cada función cúbica $g$ representa una transformación de la gráfica de $f$. Escribe una regla para $g$. Usa una calculadora gráfica para verificar tus respuestas.

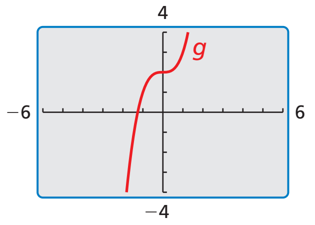
**a.**



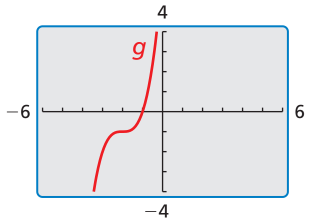

**b.**




**c.**



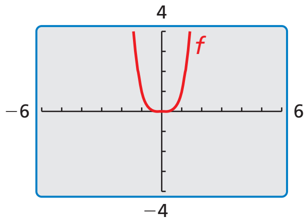

**d.**




## EXPLORACIÓN 2 Transformar la gráfica de una función cuártica

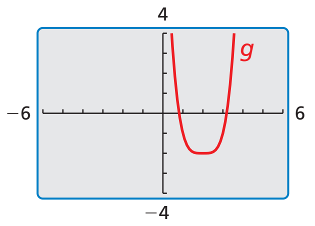
**Trabaja con un compañero.** Se muestra la gráfica de la función cuártica

$$f(x) = x^4$$

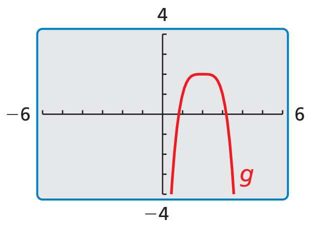



La gráfica de cada función cuártica $g$ representa una transformación de la gráfica de $f$. Escribe una regla para $g$. Usa una calculadora gráfica para verificar tus respuestas.

**a.**




**b.**




### BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas, necesitas ver cosas complicadas, tales como algunas expresiones algebraicas, como si fueran objetos independientes o compuestos de varios objetos.

## Comunicar tu respuesta

**3.** ¿Cómo puedes transformar la gráfica de una función polinomial?

**4.** Describe la transformación de $f(x) = x^4$ representada por $g(x) = (x + 1)^4 + 3$. Luego haz una gráfica de $g$.

# 4.7 Lección

## Vocabulario Esencial

***Anterior***
función polinomial
transformaciones

## Qué aprenderás

- Describir las transformaciones de las funciones polinomiales.
- Escribir las transformaciones de las funciones polinomiales.

## Describir las transformaciones de las funciones polinomiales

Puedes transformar las gráficas de las funciones polinomiales de la misma manera en que transformaste las gráficas de las funciones lineales, las funciones de valor absoluto y las funciones cuadráticas. A continuación se muestran ejemplos de transformaciones de la gráfica de $f(x) = x^4$.

## Concepto Esencial

| Transformación | Notación $f(x)$ | Ejemplos | |
|---|---|---|---|
| **Traslación horizontal**<br>La gráfica se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha. | $f(x - h)$ | $g(x) = (x - 5)^4$<br>$g(x) = (x + 2)^4$ | 5unidades hacia la derecha<br>2 unidades hacia la izquierda |
| **Traslación vertical**<br>La gráfica se mueve hacia arriba o hacia abajo. | $f(x) + k$ | $g(x) = x^4 + 1$<br>$g(x) = x^4 - 4$ | 1 unidad hacia arriba<br>4 unidades hacia abajo |
| **Reflexión**<br>La gráfica se invierte en el eje $x$ o en el eje $y$. | $f(-x)$<br>$-f(x)$ | $g(x) = (-x)^4 = x^4$<br>$g(x) = -x^4$ | en el ejes $y$<br>en el ejes $x$ |
| **Alargamiento o encogimiento horizontal**<br>La grafica se alarga alejándose o se encoge acercándose al eje $y$. | $f(ax)$ | $g(x) = (2x)^4$<br>$g(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^4$ | se encoge por un factor de $\frac{1}{2}$<br>se alarga por un factor de 2 |
| **Alargamiento o encogimiento vertical**<br>La grafica se alarga alejándose o se encoge acercándose al eje $x$. | $a \cdot f(x)$ | $g(x) = 8x^4$<br>$g(x) = \frac{1}{4}x^4$ | se alarga por un factor de 8<br>se encoge por un factor de $\frac{1}{4}$ |

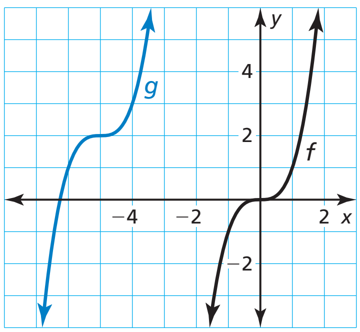
### EJEMPLO 1 Trasladar una función polinomial

Describe la transformación de $f(x) = x^3$ representada mediante $g(x) = (x + 5)^3 + 2$. Luego haz una gráfica de cada función.

**SOLUCIÓN**

Observa que la función es de la forma $g(x) = (x - h)^3 + k$. Vuelve a escribir la función para identificar $h$ y $k$.

$$g(x) = (x - (\underbrace{-5}_{h}))^3 + \underbrace{2}_{k}$$




- Dado que $h = -5$ y $k = 2$, la gráfica de $g$ es una traslación de 5 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba de la gráfica de $f$.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**1.** Describe la transformación de $f(x) = x^4$ representada por $g(x) = (x - 3)^4 - 1$. Luego haz una gráfica de cada función.

## EJEMPLO 2 Transformar funciones polinomiales

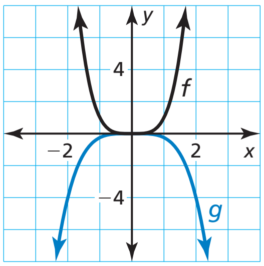
Describe la transformación de $f$ representada por $g$. Luego haz una gráfica de cada función.

**a.** $f(x) = x^4$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^4$ **b.** $f(x) = x^5$, $g(x) = (2x)^5 - 3$

### SOLUCIÓN

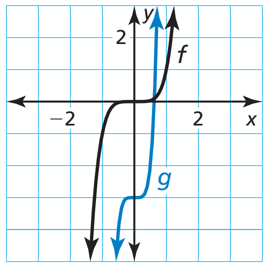
**a.** Observa que la función es de la forma $g(x) = -ax^4$, donde $a = \frac{1}{4}$.

▶ Entonces, la gráfica de $g$ es una reflexión en el eje $x$ y un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{4}$ de la gráfica de $f$.




**b.** Observa que la función es de la forma $g(x) = (ax)^5 + k$, donde $a = 2$ y $k = -3$.

▶ Entonces, la gráfica de $g$ es un encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{2}$ y una traslación 3 unidades hacia abajo de la gráfica de $f$.




## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**2.** Describe la transformación de $f(x) = x^3$ representada mediante $g(x) = 4(x + 2)^3$. Luego haz una gráfica de cada función.

# Escribir las transformaciones de las funciones polinomiales

## EJEMPLO 3 Escribir funciones polinomiales transformadas

Imagina que $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Escribe una regla para $g$ y luego haz una gráfica de cada función. Describe la gráfica de $g$ como transformación de la gráfica de $f$.

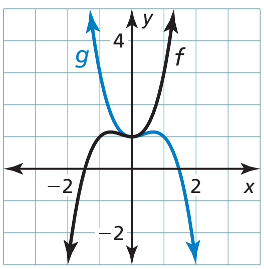
**a.** $g(x) = f(-x)$ **b.** $g(x) = 3f(x)$

### SOLUCIÓN

**a.** $g(x) = f(-x)$

$= (-x)^3 + (-x)^2 + 1$

$= -x^3 + x^2 + 1$

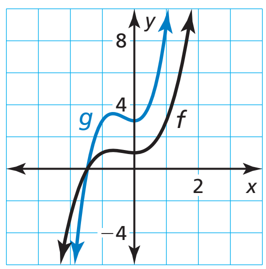



▶ La gráfica de $g$ es una reflexión en el eje $y$ de la gráfica de $f$.

**b.** $g(x) = 3f(x)$

$= 3(x^3 + x^2 + 1)$

$= 3x^3 + 3x^2 + 3$




▶ La gráfica de $g$ es un alargamiento vertical por un factor de 3 de la gráfica de $f$.

**RECUERDA**

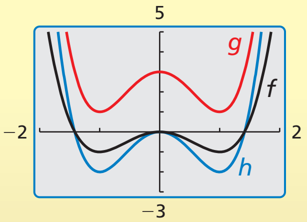
Los alargamientos y encogimientos verticales no cambian las intersecciones con el eje $x$ de una gráfica. Puedes observar esto usando la gráfica del Ejemplo 3(b).

## EJEMPLO 4 Escribir una función polinomial transformada

Imagina que la gráfica de $g$ sea un alargamiento vertical por un factor de 2, seguido de una traslación 3 unidades hacia arriba de la gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^2$. Escribe una regla para $g$.

### SOLUCIÓN

**Verifica**




**Paso 1** Primero escribe una función $h$ que represente el alargamiento vertical de $f$.

$h(x) = 2 \cdot f(x)$ — Multiplica el valor de salida por 2.

$= 2(x^4 - 2x^2)$ — Sustituye $x^4 - 2x^2$ por $f(x)$.

$= 2x^4 - 4x^2$ — Propiedad Distributiva

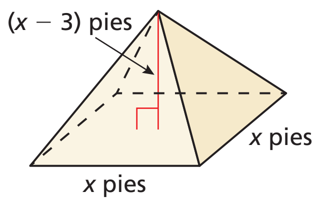
**Paso 2** Luego escribe una función $g$ que represente la traslación de $h$.

$g(x) = h(x) + 3$ — Suma 3 al valor de salida.

$= 2x^4 - 4x^2 + 3$ — Sustituye $2x^4 - 4x^2$ por $h(x)$.

▶ La función transformada es $g(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$.

## EJEMPLO 5 Representar con matemáticas




La función $V(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ representa el volumen (en pies cúbicos) de la pirámide cuadrada que se muestra. La función $W(x) = V(3x)$ representa el volumen (en pies cúbicos) cuando $x$ se mide en yardas. Escribe una regla para $W$. Halla e interpreta $W(10)$.

### SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Te dan una función $V$ cuyos valores de entrada están en pies y cuyos valores de salida están en pies cúbicos. Te dan otra función $W$ cuyos valores de entrada están en yardas y cuyos valores de salida están en pies cúbicos. El encogimiento horizontal que muestra $W(x) = V(3x)$ tiene sentido porque hay 3 pies en 1 yarda. Te piden escribir una regla para $W$ e interpretar el valor de salida para un valor de entrada dado.
2. **Haz un plan** Escribe la función transformada $W(x)$ y luego halla $W(10)$.
3. **Resuelve el problema** $W(x) = V(3x)$

   $= \frac{1}{3}(3x)^3 - (3x)^2$ — Reemplaza $x$ por $3x$ en $V(x)$.

   $= 9x^3 - 9x^2$ — Simplifica.

   A continuación, halla $W(10)$.

   $$W(10) = 9(10)^3 - 9(10)^2 = 9000 - 900 = 8100$$

   ▶ Cuando $x$ es 10 yardas, el volumen de la pirámide es 8100 pies cúbicos.
4. **Verifícalo** Dado que $W(10) = V(30)$, puedes verificar que tu solución es correcta verificando que $V(30) = 8100$.

   $$V(30) = \frac{1}{3}(30)^3 - (30)^2 = 9000 - 900 = 8100 \checkmark$$

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

3. Imagina que $f(x) = x^5 - 4x + 6$ y $g(x) = -f(x)$. Escribe una regla para $g$ y luego haz una gráfica de cada función. Describe la gráfica de $g$ como transformación de la gráfica de $f$.
4. Imagina que la gráfica de $g$ sea un alargamiento horizontal por un factor de 2, seguido de una traslación de 3 unidades hacia la derecha de la gráfica de $f(x) = 8x^3 + 3$. Escribe una regla para $g$.
5. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 5, la altura de la pirámide es $6x$ y el volumen (en pies cúbicos) está representado mediante $V(x) = 2x^3$. Escribe una regla para $W$. Halla e interpreta $W(7)$.

# 4.7 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La gráfica de $f(x) = (x + 2)^3$ es una traslación ____________ de la gráfica de $f(x) = x^3$.

2. **VOCABULARIO** Describe cómo la forma vértice de las funciones cuadráticas es similar a la forma $f(x) = a(x - h)^3 + k$ para las funciones cúbicas.

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 3–6, describe la transformación de *f* representada mediante *g*. Luego haz una gráfica de cada función.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

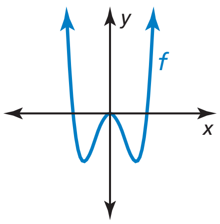
3. $f(x) = x^4,\ g(x) = x^4 + 3$

4. $f(x) = x^4,\ g(x) = (x - 5)^4$

5. $f(x) = x^5,\ g(x) = (x - 2)^5 - 1$

6. $f(x) = x^6,\ g(x) = (x + 1)^6 - 4$

**ANALIZAR RELACIONES** **En los Ejercicios 7–10, une la función con la transformación correcta de la gráfica de *f*. Explica tu razonamiento.**



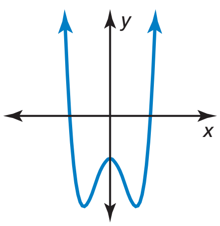

7. $y = f(x - 2)$

8. $y = f(x + 2) + 2$

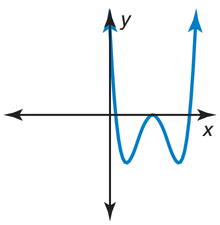
9. $y = f(x - 2) + 2$

10. $y = f(x) - 2$

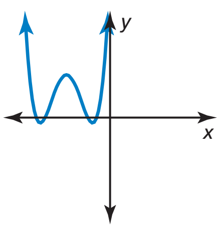
A.



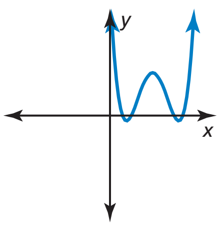

B.




C.




D.




**En los Ejercicios 11–16, describe la transformación de *f* representada mediante *g*. Luego haz una gráfica de cada función.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

11. $f(x) = x^4,\ g(x) = -2x^4$

12. $f(x) = x^6,\ g(x) = -3x^6$

13. $f(x) = x^3,\ g(x) = 5x^3 + 1$

14. $f(x) = x^4,\ g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 1$

15. $f(x) = x^5,\ g(x) = \frac{3}{4}(x + 4)^5$

16. $f(x) = x^4,\ g(x) = (2x)^4 - 3$

**En los Ejercicios 17–20, escribe una regla para *g* y luego haz una gráfica de cada función. Describe la gráfica de *g* como una transformación de la gráfica de *f*.** *(Consulta el Ejemplo 3).*

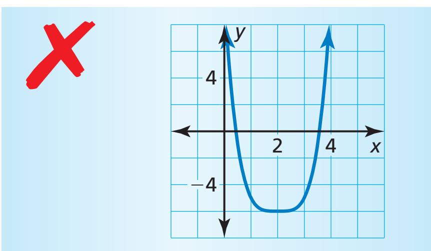
17. $f(x) = x^4 + 1,\ g(x) = f(x + 2)$

18. $f(x) = x^5 - 2x + 3,\ g(x) = 3f(x)$

19. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 6,\ g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$

20. $f(x) = x^4 + x^3 - 1,\ g(x) = f(-x) - 5$

21. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error al hacer la gráfica de la función $g(x) = (x + 2)^4 - 6$.



**22. ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error al describir la transformación de la gráfica de $f(x) = x^5$ representada mediante la gráfica de $g(x) = (3x)^5 - 4$.

> ✗ La gráfica de *g* es un encogimiento horizontal por un factor de 3, seguida de una traslación de 4 unidades hacia debajo de la gráfica de *f*.

**En los Ejercicios 23–26, escribe una regla para *g* que represente las transformaciones indicadas en la gráfica de *f*.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

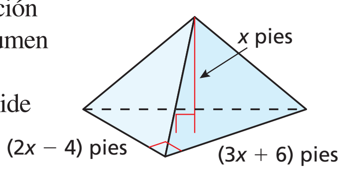
**23.** $f(x) = x^3 - 6$; traslación de 3 unidades hacia la izquierda, seguida de una reflexión en el eje $y$.

**24.** $f(x) = x^4 + 2x + 6$; alargamiento vertical por un factor de 2, seguido de una traslación de 4 unidades hacia la derecha.

**25.** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 9$; encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{3}$ y una traslación de 2 unidades hacia arriba, seguida de una reflexión en el eje $x$.

**26.** $f(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 + 4$; reflexión en el eje $y$ y un alargamiento vertical por un factor de 3, seguido de una traslación de 1 unidad hacia abajo.

**27. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El volumen $V$ (en pies cúbicos) de la pirámide está dado por $V(x) = x^3 - 4x$. La función $W(x) = V(3x)$ da el volumen (en pies cúbicos) de la pirámide cuando $x$ se mide en yardas. Escribe una regla para $W$. Halla e interpreta $W(5)$. *(Consulta el Ejemplo 5).*




**28. ARGUMENTAR** El volumen de un cubo con longitud de lado $x$ está dado por $V(x) = x^3$. Tu amigo dice que cuando divides el volumen por la mitad, el volumen disminuye en mayor cantidad que cuando divides cada longitud de lado por la mitad. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Justifica tu respuesta.

**29. FINAL ABIERTO** Describe dos transformaciones de la gráfica de $f(x) = x^5$ donde el orden en el que se hacen las transformaciones sea importante. Luego describe dos transformaciones donde el orden *no* sea importante. Explica tu razonamiento.

**30. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe y haz una gráfica de una transformación de la gráfica de $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x - 4$ que tenga como resultado una gráfica con una intersección con el eje $y$ de $-2$.

**31. RESOLVER PROBLEMAS** Una porción del recorrido de vuelo que el colibrí hace mientras se alimenta se puede modelar mediante la función.

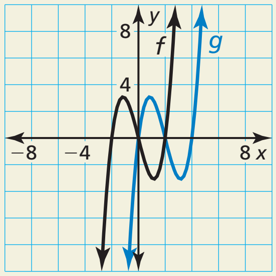
$$f(x) = -\frac{1}{5}x(x - 4)^2(x - 7),\ 0 \le x \le 7$$

donde $x$ es la distancia horizontal (en metros) y $f(x)$ es la altura (en metros.) El colibrí se alimenta cada vez que está a nivel del suelo.

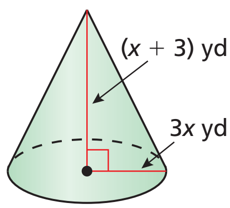
**a.** ¿A qué distancias se alimenta el colibrí?

**b.** Un segundo colibrí se alimenta 2 metros más allá del primero y vuela el doble de alto. Escribe una función para modelar el recorrido del segundo colibrí.

**32. ¿CÓMO LO VES?** Determina los ceros reales de cada función. Luego describe la transformación de la gráfica de *f* que resulte en la gráfica de *g*.




**33. CONEXIONES MATEMÁTICAS** Escribe una función $V$ para el volumen (en yardas cúbicas) del cono circular recto que se muestra. Luego escribe una función $W$ que dé el volumen (en yardas cúbicas) del cono cuando $x$ se mide en pies. Halla e interpreta $W(3)$.




## Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Halla el valor mínimo o el valor máximo de la función. Describe el dominio y el rango de la función y dónde la función es creciente y decreciente.** *(Sección 2.2)*

**34.** $h(x) = (x + 5)^2 - 7$ **35.** $f(x) = 4 - x^2$ **36.** $f(x) = 3(x - 10)(x + 4)$

**37.** $g(x) = -(x + 2)(x + 8)$ **38.** $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 3$ **39.** $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$

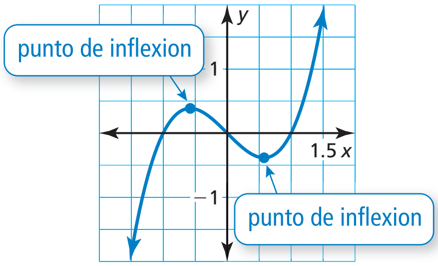
# 4.8 Analizar gráficas de funciones polinomiales

## Pregunta esencial

¿Cuántos puntos de inflexión puede tener la gráfica de una función polinomial?

Un *punto de inflexión* de la gráfica de una función polinomial es un punto en la gráfica en el que la función cambia de

- creciente a decreciente, o
- decreciente a creciente.




## EXPLORACIÓN 1 Aproximar los puntos de inflexión

**Trabaja con un compañero.** Une cada función polinomial con su gráfica. Explica tu razonamiento. Luego usa una calculadora gráfica para aproximar las coordenadas de los puntos de inflexión de la gráfica de la función. Redondea tus respuestas al centésimo más cercano.

**PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN**

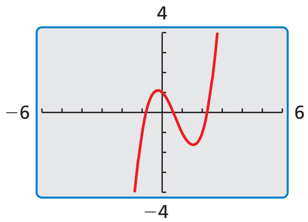
Para dominar las matemáticas, necesitas expresar las respuestas numéricas con un grado de precisión adecuado para el contexto del problema.

**a.** $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ **b.** $f(x) = x^2 + 3x + 2$

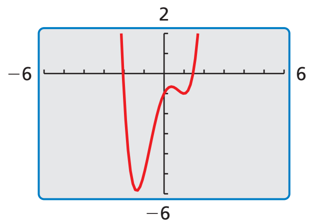
**c.** $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ **d.** $f(x) = -x^3 + 5x - 2$

**e.** $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ **f.** $f(x) = -2x^5 - x^2 + 5x + 3$

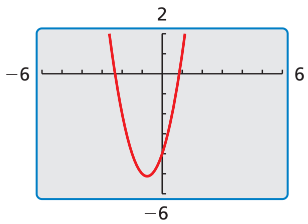
**A.**



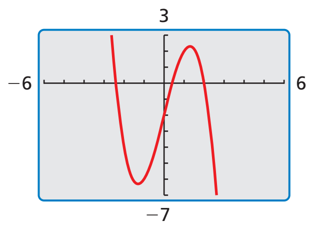

**B.**



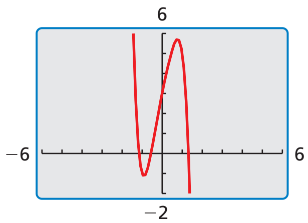

**C.**



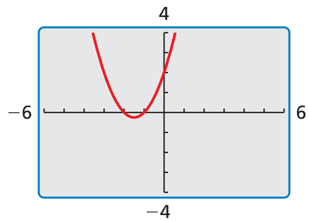

**D.**




**E.**




**F.**




## Comunicar tu respuesta

**2.** ¿Cuántos puntos de inflexión puede tener la gráfica de una función polinomial?

**3.** ¿Es posible dibujar la gráfica de una función polinomial que *no* tenga puntos de inflexión? Justifica tu respuesta.

# 4.8 Lección

## Vocabulario Esencial

máximo local, *pág. 214*
mínimo local, *pág. 214*
función par, *pág. 215*
función impar, *pág. 215*

***Anterior***
comportamiento de los extremos
creciente
decreciente
simétrica con respecto al eje *y*

## Qué aprenderás

- Usar intersecciones con el eje *x* para hacer una gráfica de las funciones polinomiales.
- Usar el principio de la ubicación para identificar los ceros de las funciones polinomiales.
- Hallar puntos de inflexión e identificar los máximos locales y mínimos locales de las gráficas de las funciones polinomiales.
- Identificar funciones pares e impares.

## Hacer una gráfica de las funciones polinomiales

En este capítulo, has aprendido que los ceros, los factores, las soluciones y las intersecciones con el eje *x* son conceptos estrechamente relacionados. Este es un resumen de esas relaciones.

## Resumen de conceptos

### Ceros, factores, soluciones e intersecciones

Imagina que $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ es una función polinomial. Los siguientes enunciados son equivalentes.

**Cero:** $k$ es un cero de la función polinomial $f$.

**Factor:** $x - k$ es un factor del polinomio $f(x)$,

**Solución:** $k$ es una solución (o raíz) de la ecuación polinomial $f(x) = 0$.

**Intersección con el eje *x*:** Si $k$ es un número real, entonces $k$ es una intersección con el eje $x$ de la gráfica de la función polinomial $f$. La gráfica de $f$ pasa por $(k, 0)$.

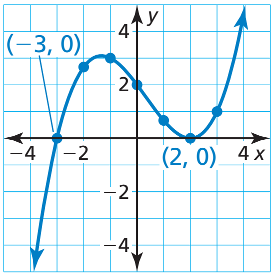
### EJEMPLO 1 Usar intersecciones con el eje *x* para hacer una gráfica de las funciones polinomiales

Haz una gráfica de la función.

$$f(x) = \tfrac{1}{6}(x + 3)(x - 2)^2.$$

**SOLUCIÓN**

**Paso 1** Marca las intersecciones con el eje $x$. Dado que $-3$ y $2$ son ceros de $f$, marca $(-3, 0)$ y $(2, 0)$.




**Paso 2** Marca los puntos entre y más allá de las intersecciones con el eje $x$.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{8}{3}$ | $3$ | $2$ | $\frac{2}{3}$ | $1$ |

**Paso 3** Determina el comportamiento de los extremos. Dado que $f(x)$ tiene tres factores de la forma $x - k$ y un factor constante de $\frac{1}{6}$, $f$ es una función cúbica con un coeficiente principal positivo. Entonces, $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to +\infty$.

**Paso 4** Dibuja la gráfica de manera que pase por los puntos marcados y tenga el comportamiento de extremos adecuado.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Haz una gráfica de la función.**

**1.** $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 4)^2$

**2.** $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)(x - 1)(x - 3)$

## El principio de la ubicación

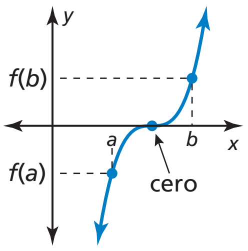
Puedes usar el *principio de la ubicación* para ayudarte a hallar los ceros reales de las funciones polinomiales.

### Concepto Esencial

**El principio de la ubicación**

Si $f$ es una función polinomial, y $a$ y $b$ son dos números reales tales que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $f$ tiene por lo menos un cero real entre $a$ y $b$.

Para usar este principio y ubicar los ceros reales de una función polinomial, halla un valor $a$ en el que la función polinomial es negativa y otro valor $b$ en el que la función es positiva. Puedes llegar a la conclusión de que la función tiene *por lo menos* un cero real entre $a$ y $b$.




**EJEMPLO 2** **Ubicar los ceros reales de una función polinomial**

Halla todos los ceros reales de

$$f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 17x - 6.$$

**SOLUCIÓN**

**Paso 1** Usa una calculadora gráfica para hacer una tabla.

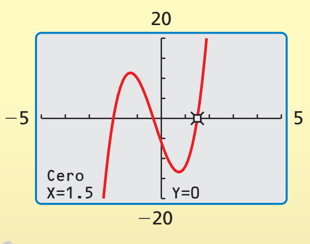
| X | Y1 | |
|---|---|---|
| 0 | −6 | |
| 1 | −12 | |
| 2 | 28 | |
| 3 | 150 | |
| 4 | 390 | |
| 5 | 784 | |
| 6 | 1368 | |
| X=1 | | |

**Paso 2** Usa el principio de ubicación. Basándote en la tabla que se muestra, puedes ver que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Entonces, por el principio de ubicación, $f$ tiene un cero entre 1 y 2. Dado que $f$ es una función polinomial de grado 3, tiene tres ceros. El único cero *racional* posible entre 1 y 2 es $\frac{3}{2}$. Usando la división sintética, puedes confirmar que $\frac{3}{2}$ es un cero.

**Paso 3** Escribe $f(x)$ en forma factorizada. Dividir $f(x)$ entre su factor conocido $x - \frac{3}{2}$ da un cociente de $6x^2 + 14x + 4$. Entonces, puedes factorizar $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \tfrac{3}{2}\right)(6x^2 + 14x + 4) \\ &= 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)(3x^2 + 7x + 2) \\ &= 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)(3x + 1)(x + 2). \end{aligned}$$

**Verifica**




▶ Basándose en la factorización, hay tres ceros. Los ceros de $f$ son

$\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y $-2$.

Verifícalo haciendo una gráfica de $f$.

### Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**3.** Halla todos los ceros reales de $f(x) = 18x^3 + 21x^2 - 13x - 6$.

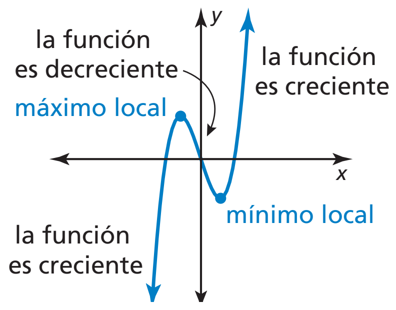
LEER

A veces se llama *máximo relativo* y *mínimo relativo* al máximo local y al mínimo local.

## Puntos de inflexión

Otra característica importante de las gráficas de las funciones polinomiales es que tiene *puntos de inflexión* correspondientes a valores locales máximos y mínimos.

- La coordenada $y$ de un punto de inflexión es un **máximo local** de la función si el punto es más alto que todos los puntos cercanos.
- La coordenada $y$ de un punto de inflexión es un **mínimo local** de la función si el punto es más bajo que todos los puntos cercanos.




Los puntos de inflexión de una gráfica ayudan a determinar los intervalos por los que una función es creciente o decreciente.

## Concepto Esencial

### Puntos de inflexión de las funciones polinomiales

1. La gráfica de toda función polinomial de grado $n$ tiene *como máximo* $n - 1$ puntos de inflexión.
2. Si una función polinomial tiene $n$ ceros reales diferenciados, entonces su gráfica tiene *exactamente* $n - 1$ puntos de inflexión.

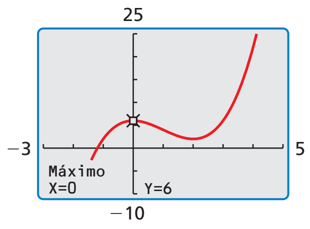
### EJEMPLO 3 Hallar los puntos de inflexión

Haz una gráfica de cada función. Identifica las intersecciones con el eje $x$ y los puntos donde los máximos locales y los mínimos locales ocurren. Determina los intervalos por los que cada función es creciente o decreciente.

**a.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ **b.** $g(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x - 3$

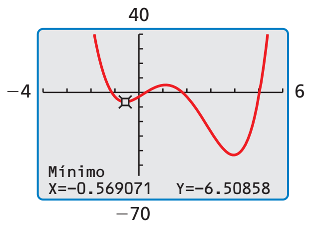
**SOLUCIÓN**

**a.** Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. La gráfica de $f$ tiene una intersección con el eje $x$ y dos puntos de inflexión. Usa las funciones *cero, máximo* y *mínimo* de la calculadora gráfica para aproximar las coordenadas de los puntos.




▶ La intersección con el eje $x$ de la gráfica es $x \approx -1.20$. La función tiene un máximo local en $(0, 6)$ y un mínimo local en $(2, 2.)$ La función es creciente cuando $x < 0$ y $x > 2$ y decreciente cuando $0 < x < 2$.

**b.** Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. La gráfica de $g$ tiene cuatro intersecciones con el eje $x$ y tres puntos de inflexión. Usa las funciones *cero, máximo* y *mínimo* de la calculadora gráfica para aproximar las coordenadas de los puntos.




▶ Las intersecciones con el eje $x$ de la gráfica son $x \approx -1.14$, $x \approx 0.29$, $x \approx 1.82$ y $x \approx 5.03$. La función tiene un máximo local en $(1.11, 5.11)$ y mínimos locales en $(-0.57, -6.51)$ y $(3.96, -43.04)$. La función es creciente cuando $-0.57 < x < 1.11$ y $x > 3.96$ y decreciente cuando $x < -0.57$ y $1.11 < x < 3.96$.

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. Haz una gráfica de $f(x) = 0.5x^3 + x^2 - x + 2$. Identifica las intersecciones con el eje $x$ y los puntos donde ocurren los máximos locales y los mínimos locales. Determina los intervalos por los que la función es creciente o decreciente.

## Funciones pares e impares

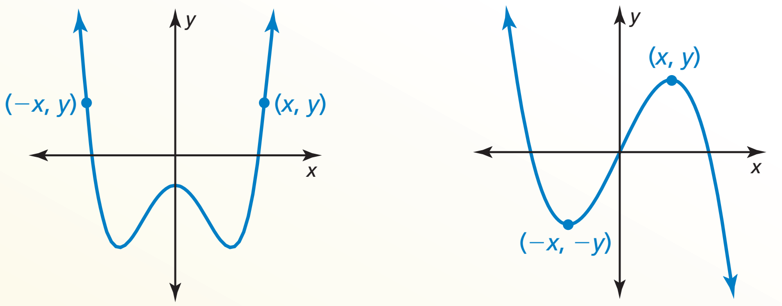
### Concepto Esencial

**Funciones pares e impares**

Una función $f$ es una **función par** cuando $f(-x) = f(x)$ para toda $x$ en su dominio. La gráfica de una función par es *simétrica con respecto al eje y*.

Una función $f$ es una **función impar** cuando $f(-x) = -f(x)$ para toda $x$ en su dominio. La gráfica de una función impar es *simétrica con respecto al origen*. Una manera de reconocer una gráfica simétrica con respecto al origen es que se ve igual después de una rotación de 180º con respecto al origen.

**Función par** **Función impar**




Para una función par, si $(x, y)$ está en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica.

Para una función impar, si $(x, y)$ está en la gráfica, entonces $(-x, -y)$ también está en la gráfica.

### EJEMPLO 4 Identificar funciones pares e impares

Determina si cada función es *par, impar* o *ninguna.*

**a.** $f(x) = x^3 - 7x$ **b.** $g(x) = x^4 + x^2 - 1$ **c.** $h(x) = x^3 + 2$

**SOLUCIÓN**

**a.** Reemplaza $x$ con $-x$ en la ecuación para $f$, y luego simplifica.

$$f(-x) = (-x)^3 - 7(-x) = -x^3 + 7x = -(x^3 - 7x) = -f(x)$$

▶ Dado que $f(-x) = -f(x)$, la función es impar.

**b.** Reemplaza $x$ con $-x$ en la ecuación para $g$, y luego simplifica.

$$g(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 1 = x^4 + x^2 - 1 = g(x)$$

▶ Dado que $g(-x) = g(x)$, la función es par.

**c.** Reemplazar $x$ con $-x$ en la ecuación para $h$ resulta en

$$h(-x) = (-x)^3 + 2 = -x^3 + 2.$$

▶ Dado que $h(x) = x^3 + 2$ y $-h(x) = -x^3 - 2$, puedes concluir que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x.)$ Entonces, la función no es ni par ni impar.

### Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Determina si la función es *par, impar* o *ninguna.***

**5.** $f(x) = -x^2 + 5$ **6.** $f(x) = x^4 - 5x^3$ **7.** $f(x) = 2x^5$

## Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Un máximo local o mínimo local de una función polinomial ocurre en un punto ______________ de la gráfica de la función.

2. **ESCRIBIR** Explica qué es el máximo local de una función y cómo puede ser diferente del valor máximo de la función.

## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**ANALIZAR RELACIONES En los Ejercicios 3–6, une la función con su gráfica.**

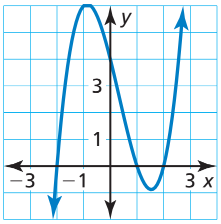
3. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$

4. $h(x) = (x + 2)^2(x + 1)$

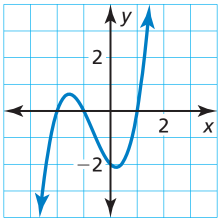
5. $g(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$

6. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

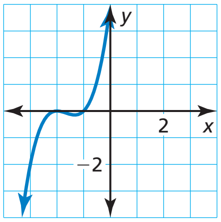
**A.**



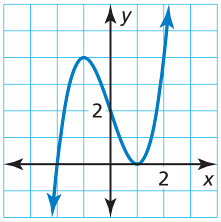

**B.**




**C.**




**D.**




**En los Ejercicios 7–14, haz una gráfica de la función.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

7. $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$

8. $f(x) = (x + 2)^2(x + 4)^2$

9. $h(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x - 3)$

10. $g(x) = 4(x + 1)(x + 2)(x - 1)$

11. $h(x) = \frac{1}{3}(x - 5)(x + 2)(x - 3)$

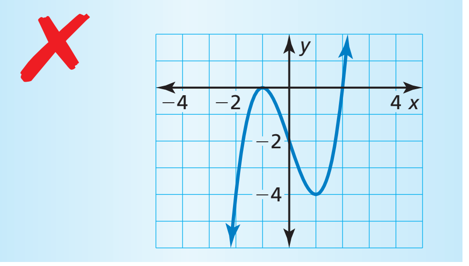
12. $g(x) = \frac{1}{12}(x + 4)(x + 8)(x - 1)$

13. $h(x) = (x - 3)(x^2 + x + 1)$

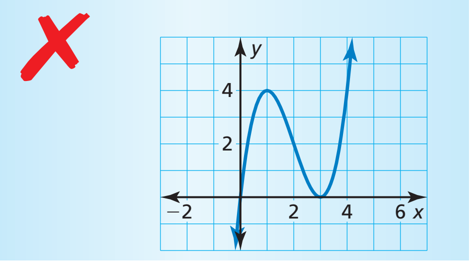
14. $f(x) = (x - 4)(2x^2 - 2x + 1)$

**ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 15 y 16, describe y corrige el error al usar factores para hacer una gráfica de *f*.**

15. $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$




16. $f(x) = x^2(x - 3)^3$




**En los Ejercicios 17–22, halla todos los ceros reales de la función.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

17. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

19. $h(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5x - 4$

20. $h(x) = 4x^3 - 2x^2 - 24x - 18$

21. $g(x) = 4x^3 + x^2 - 51x + 36$

22. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 32x - 15$

**En los Ejercicios 23–30, haz una gráfica de la función. Identifica las intersecciones con el eje $x$ y los puntos donde ocurren los máximos locales y los mínimos locales. Determina los intervalos por los que la función es creciente o decreciente.** *(Consulta el Ejemplo 3).*

**23.** $g(x) = 2x^3 + 8x^2 - 3$

**24.** $g(x) = -x^4 + 3x$

**25.** $h(x) = x^4 - 3x^2 + x$

**26.** $f(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 + 2$

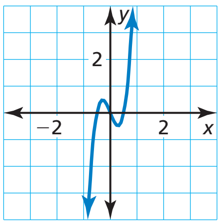
**27.** $f(x) = 0.5x^3 - 2x + 2.5$

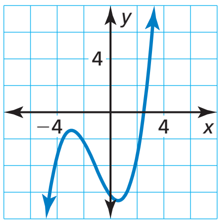
**28.** $f(x) = 0.7x^4 - 3x^3 + 5x$

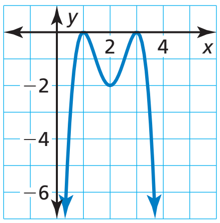
**29.** $h(x) = x^5 + 2x^2 - 17x - 4$

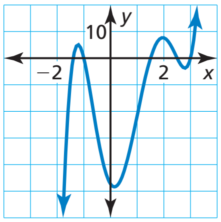
**30.** $g(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 3$

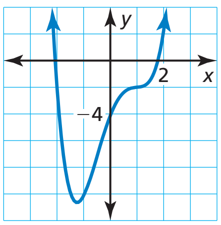
**En los Ejercicios 31–36, estima las coordenadas de cada punto de inflexión. Indica si cada uno es un máximo local o un mínimo local. Luego estima los ceros reales y halla el menor grado posible de la función.**

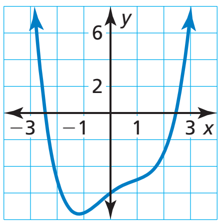
**31.**



**32.**



**33.**



**34.**



**35.**



**36.**



**FINAL ABIERTO En los Ejercicios 37 y 38, dibuja una gráfica de una función polinomial $f$ que tenga las características dadas.**

**37.**
- La gráfica de $f$ tiene intersecciones con el eje $x$ en $x = -4$, $x = 0$, y $x = 2$.
- $f$ tiene un valor máximo local cuando $x = 1$.
- $f$ tiene un valor mínimo local cuando $x = -2$.

**38.**
- La gráfica de $f$ tiene intersecciones con el eje $x$ en $x = -3$, $x = 1$, y $x = 5$.
- $f$ tiene un valor máximo local cuando $x = 1$.
- $f$ tiene un valor mínimo local cuando $x = -2$ y cuando $x = 4$.

**En los Ejercicios 39–46, determina si la función es *par, impar* o *ninguna*.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

**39.** $h(x) = 4x^7$

**40.** $g(x) = -2x^6 + x^2$

**41.** $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$

**42.** $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$

**43.** $g(x) = x^2 + 5x + 1$

**44.** $f(x) = -x^3 + 2x - 9$

**45.** $f(x) = x^4 - 12x^2$

**46.** $h(x) = x^5 + 3x^4$

**47. USAR HERRAMIENTAS** Cuando un nadador nada estilo pecho, la función

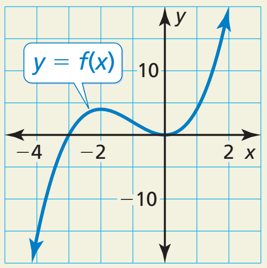
$$S = -241t^7 + 1060t^6 - 1870t^5 + 1650t^4 - 737t^3 + 144t^2 - 2.43t$$

representa la velocidad $S$ (en metros por segundo) del nadador durante una brazada completa, donde $t$ es el número de segundos desde el inicio de la brazada y $0 \leq t \leq 1.22$. Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. ¿En qué momento durante la brazada el nadador va más rápido?

**48. USAR HERRAMIENTAS** Durante un periodo de tiempo reciente, el número $S$ (en miles) de estudiantes inscritos en las escuelas públicas de cierto país se puede representar mediante $S = 1.64x^3 - 102x^2 + 1710x + 36{,}300$, donde $x$ es tiempo (en años.) Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función para el intervalo $0 \leq x \leq 41$. Luego, describe cómo cambia la inscripción de las escuelas públicas durante este periodo.

**49. ESCRIBIR** ¿Por qué el adjetivo *local*, que se usa para describir los máximos y mínimos de las funciones cúbicas, a veces no se necesita usar para las funciones cuadráticas?

**50.** **¿CÓMO LO VES?** Se muestra la gráfica de una función polinomial.



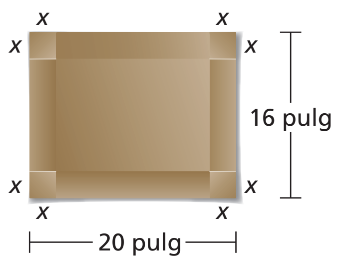

**a.** Halla los ceros, los valores máximo local y mínimo local de la función.

**b.** Compara las intersecciones con el eje $x$ de las gráficas de $y = f(x)$ y $y = -f(x)$.

**c.** Compara los valores máximos y mínimos de las funciones $y = f(x)$ y $y = -f(x)$.

**51.** **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que el producto de dos funciones impares es una función impar. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento

**52.** **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Estás haciendo una caja rectangular a partir de una pieza de cartón de 16 pulgadas por 20 pulgadas. La caja se formará haciendo los cortes mostrados en el diagrama y doblando los lados hacia arriba. Quieres que la caja tenga el mayor volumen posible.




**a.** ¿De qué longitud debes hacer los cortes?

**b.** ¿Cuál es el volumen máximo?

**c.** ¿Cuáles son las dimensiones de la caja terminada?

**53.** **RESOLVER PROBLEMAS** Las barracas quonset son estructuras temporales multipropósito con forma de semicilindros. Tienes 1100 pies cuadrados de material para construir una barraca quonset.

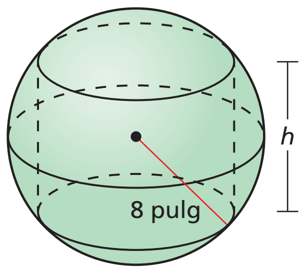
**a.** El área de la superficie $S$ de una barraca quonset está dada por $S = \pi r^2 + \pi r\ell$. Sustituye 1100 por $S$ y luego escribe una expresión para $\ell$ en términos de $r$.

**b.** El volumen $V$ de una barraca quonset está dado por $V = \frac{1}{2}\pi r^2\ell$. Escribe una ecuación que dé $V$ como función solo en términos de $r$.

**c.** Halla el valor de $r$ que maximice el volumen de la barraca.

**54.** **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe y haz una gráfica de una función polinomial que tenga un cero real en cada uno de los intervalos $-2 < x < -1$, $0 < x < 1$, y $4 < x < 5$. ¿Hay algún grado máximo que una función polinomial como esta pueda tener? Justifica tu respuesta.

**55.** **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Un cilindro está inscrito en una esfera cuyo radio tiene 8 pulgadas. Escribe una ecuación para el volumen del cilindro como función de $h$. Halla el valor de $h$ que maximice el volumen del cilindro inscrito. ¿Cuál es el volumen máximo del cilindro?




## Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Expresa si la tabla muestra *datos lineales, cuadráticos* o *ninguno*. Explica.** *(Sección 2.4)*

**56.**

| Meses, $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Ahorro (dólares), $y$ | 100 | 150 | 200 | 250 |

**57.**

| Tiempo (segundos), $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Altura (pies), $y$ | 300 | 284 | 236 | 156 |

# 4.9 Representar con funciones polinomiales

**Pregunta esencial** ¿Cómo puedes hallar un modelo polinomial para datos de la vida real?

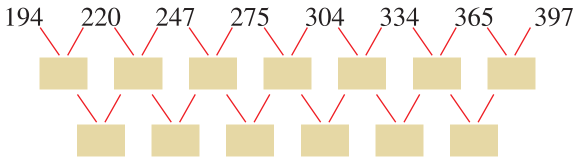
**EXPLORACIÓN 1** **Representar datos de la vida real**

**Trabaja con un compañero.** La distancia que recorre una pelota de béisbol después de que la golpean depende del ángulo en el que la golpearon y de la velocidad inicial. La tabla muestra las distancias que recorre una pelota de béisbol golpeada en un ángulo de 35° a diversas velocidades iniciales.

| **Velocidad inicial, *x* (millas por hora)** | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Distancia, *y* (pies)** | 194 | 220 | 247 | 275 | 304 | 334 | 365 | 397 |

**a.** Recuerda que cuando los datos tienen valores de $x$ igualmente espaciados, puedes analizar patrones en las diferencias de los valores $y$ para determinar qué tipo de función se puede usar para representar los datos. Si las primeras diferencias son constantes, entonces el conjunto de datos corresponde con un modelo lineal. Si las segundas diferencias son constantes, entonces el conjunto de datos corresponde con el modelo de una función cuadrática.

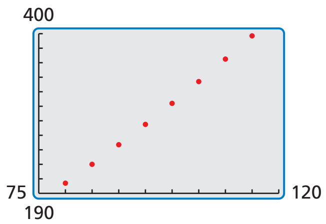
Halla las primeras y segundas diferencias de los datos. ¿Los datos son lineales o cuadráticos? Explica tu razonamiento.




### USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas usar herramientas tecnológicas para explorar y profundizar tu entendimiento de los conceptos.

**b.** Usa una calculadora gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos. ¿Los datos parecen lineales o cuadráticos? Usa la función *regresión* de la calculadora gráfica para hallar el modelo lineal o cuadrático que mejor corresponda con los datos.




**c.** Usa el modelo que hallaste en la parte (b) para hallar la distancia que recorre una pelota de béisbol cuando la golpean en un ángulo de 35° y se traslada a una velocidad inicial de 120 millas por hora.

**d.** De acuerdo con el *Almanaque de Béisbol*, “Todo lanzamiento de más de 400 pies es digno de destacarse. Un golpe de 450 pies muestra una fuerza excepcional, ya que la mayoría de jugadores de las grandes ligas no son capaces de golpear una pelota tan lejos. Todo golpe en el rango de los 500 pies es genuinamente histórico”. Estima la velocidad inicial de una pelota de béisbol que recorre una distancia de 500 pies.

## Comunicar tu respuesta

**2.** ¿Cómo puedes hallar un modelo polinomial para datos de la vida real?

**3.** ¿Qué tan bien corresponde con los datos el modelo que hallaste en la Exploración 1(b)? ¿Crees que el modelo es válido para cualquier velocidad inicial? Explica tu razonamiento.

# 4.9 Lección

## Vocabulario Esencial

diferencias finitas, *pág. 220*

***Anterior***

diagrama de dispersión

## Qué aprenderás

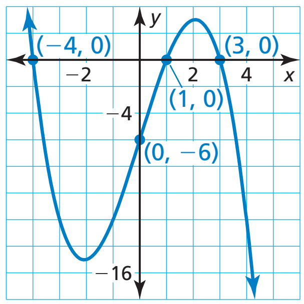
- Escribir funciones polinomiales para conjuntos de puntos.
- Escribir funciones polinomiales usando diferencias finitas.
- Usar la tecnología para hallar modelos para conjuntos de datos.

## Escribir funciones polinomiales para conjuntos de puntos

Sabes que dos puntos determinan una recta y tres puntos que no están en una recta determinan una parábola. En el Ejemplo 1, verás que cuatro puntos que no están en una recta o parábola determinan la gráfica de una función cúbica.

### EJEMPLO 1 Escribir una función cúbica

Escribe la función cúbica cuyo gráfico se muestra.




**SOLUCIÓN**

**Paso 1** Usa las tres intersecciones con el eje $x$ para escribir la función en forma factorizada.

$$f(x) = a(x + 4)(x - 1)(x - 3)$$

**Paso 2** Halla el valor de $a$ sustituyendo las coordenadas del punto $(0, -6)$.

$$-6 = a(0 + 4)(0 - 1)(0 - 3)$$

$$-6 = 12a$$

$$-\frac{1}{2} = a$$

La función es $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)(x - 1)(x - 3)$.

**Verifica**

Verifica el comportamiento de los extremos de $f$. El grado de $f$ es impar y $a < 0$. Entonces, $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to +\infty$, lo que corresponde con la gráfica. ✓

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Escribe una función cúbica cuya gráfica pase por los puntos dados.**

**1.** $(-4, 0)$, $(0, 10)$, $(2, 0)$, $(5, 0)$

**2.** $(-1, 0)$, $(0, -12)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$

## Diferencias finitas

Cuando los valores $x$ en un conjunto de datos están igualmente espaciados, las diferencias de los valores $y$ consecutivos se llaman **diferencias finitas**. Recuerda de la Sección 2.4 que las primeras y segundas diferencias de $y = x^2$ son:

Valores de $x$ igualmente espaciados

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

primeras diferencias: −5 −3 −1 1 3 5

segundas diferencias: 2 2 2 2 2

Observa que $y = x^2$ tiene grado *dos* y que las *segundas* diferencias son constantes y diferentes de cero. Esto ejemplifica la primera de las dos propiedades de las diferencias finitas que se muestran en la siguiente página.

## Concepto Esencial

### Propiedades de las diferencias finitas

1. Si una función polinomial $y = f(x)$ tiene grado $n$, entonces las enésimas diferencias de los valores de función para valores $x$ igualmente espaciados son diferentes de cero y constantes.
2. A la inversa, si las enésimas diferencias de datos igualmente espaciados son diferentes de cero y constantes, entonces los datos se pueden representar mediante una función polinomial de grado $n$.

La segunda propiedad de las diferencias finitas te permite escribir una función polinomial que represente un conjunto de datos igualmente espaciados.

### EJEMPLO 2 Escribir una función usando diferencias finitas

Usa las diferencias finitas para determinar el grado de la función polinomial que corresponda con los datos. Luego, usa herramientas tecnológicas para hallar la función polinomial.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |

**SOLUCIÓN**

**Paso 1** Escribe los valores de la función. Halla las primeras diferencias restando los valores consecutivos. Luego halla las segundas diferencias restando las primeras diferencias consecutivas. Continúa hasta que obtengas las diferencias que son diferentes de cero y constantes.

$f(1)$ $f(2)$ $f(3)$ $f(4)$ $f(5)$ $f(6)$ $f(7)$

1 4 10 20 35 56 84 — Escribe los valores de la función para valores de $x$ igualmente espaciados.

3 6 10 15 21 28 — Primeras diferencias

3 4 5 6 7 — Segundas diferencias

1 1 1 1 — Terceras diferencias

Dado que las terceras diferencias son diferentes de cero y constantes, puedes representar los datos *exactamente* con una función cúbica.

**Paso 2** Ingresa los datos en una calculadora gráfica y usa la regresión cúbica para obtener una función polinomial.

```
RegCúbica
y=ax³+bx²+cx+d
a=.1666666667
b=.5
c=.3333333333
d=0
R²=1
```

Dado que $\frac{1}{6} \approx 0.1666666667$, $\frac{1}{2} = 0.5$, y $\frac{1}{3} \approx 0.333333333$, una función polinomial que corresponda exactamente con los datos es

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x.$$

## Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

3. Usa las diferencias finitas para determinar el grado de la función polinomial que corresponda con los datos. Luego usa herramientas tecnológicas para hallar la función polinomial.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6 | 15 | 22 | 21 | 6 | −29 |

## Hallar modelos usando la tecnología

En los Ejemplos 1 y 2, hallaste un modelo cúbico que corresponde *exactamente* con un conjunto de datos. En muchas situaciones de la vida real, no puedes hallar modelos que correspondan exactamente con los datos. A pesar de esta limitación, aun así puedes usar herramientas tecnológicas para aproximar los datos con un modelo polinomial, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3 Uso en la vida real

De acuerdo con el Departamento de Energía de los Estados Unidos, la biomasa incluye "residuos agrícolas y forestales, desechos sólidos municipales, desechos industriales y cultivos terrestres y acuáticos desarrollados solo con fines energéticos". Entre los usos de la biomasa se encuentra la producción de electricidad y combustibles líquidos como el etanol.

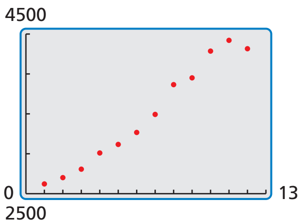
La tabla muestra el total de consumo de energía de biomasa de los Estados Unidos $y$ (en trillones de unidades térmicas inglesas o Btus) en el año $t$, donde $t = 1$ corresponde a 2001. Halla un modelo polinomial para los datos. Usa el modelo para estimar el total de consumo de energía de biomasa de los Estados Unidos en 2013.

| ***t*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 2622 | 2701 | 2807 | 3010 | 3117 | 3267 |

| ***t*** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 3493 | 3866 | 3951 | 4286 | 4421 | 4316 |

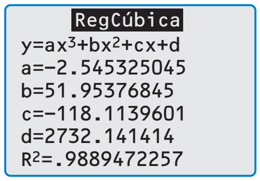
#### SOLUCIÓN

**Paso 1** Ingresa los datos en una calculadora gráfica y haz un diagrama de dispersión. Los datos sugieren un modelo cúbico.

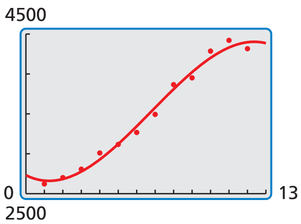



**Paso 2** Usa la función *regresión cúbica*. El modelo polinomial es

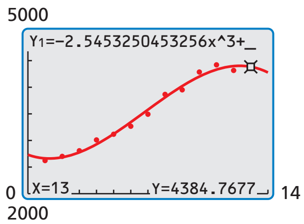
$$y = -2.545t^3 + 51.95t^2 - 118.1t + 2732.$$




**Paso 3** Verifica el modelo haciendo una gráfica del mismo y de los datos en la misma ventana de visualización.




**Paso 4** Usa la función *trazar* para estimar el valor del modelo cuando $t = 13$.




▶ El total aproximado del consumo de energía de biomasa de los Estados Unidos en 2013 fue alrededor de 4385 trillones de Btus.

### Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

**Usa una calculadora gráfica para hallar una función polinomial que corresponda con los datos.**

**4.**

| ***x*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 5 | 13 | 17 | 11 | 11 | 56 |

**5.**

| ***x*** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 8 | 0 | 15 | 69 | 98 | 87 |

 Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

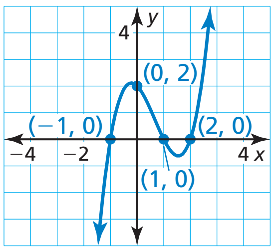
## Verificación de vocabulario y concepto esencial

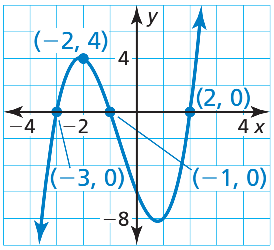
1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Cuando los valores de $x$ en un conjunto de datos están igualmente espaciados, las diferencias de los valores $y$ consecutivos se llaman ________________.

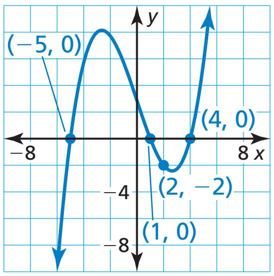
2. **ESCRIBIR** Explica cómo sabes cuándo un conjunto de datos se podría representar mediante una función cúbica.

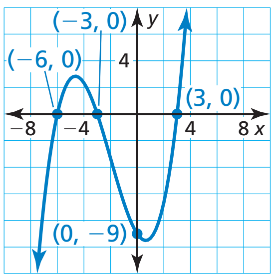
## Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

**En los Ejercicios 3–6 escribe una función cúbica cuya gráfica se muestra.** *(Consulta el Ejemplo 1).*

3.



4.



5.



6.



**En los Ejercicios 7–12, usa las diferencias finitas para determinar el grado de la función polinomial que corresponda con los datos. Luego usa herramientas tecnológicas para hallar la función polinomial.** *(Consulta el Ejemplo 2).*

7.

| $x$ | −6 | −3 | 0 | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −2 | 15 | −4 | 49 | 282 | 803 |

8.

| $x$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −14 | −5 | −2 | 7 | 34 | 91 |

9. $(-4, -317), (-3, -37), (-2, 21), (-1, 7), (0, -1), (1, 3), (2, -47), (3, -289), (4, -933)$

10. $(-6, 744), (-4, 154), (-2, 4), (0, -6), (2, 16), (4, 154), (6, 684), (8, 2074), (10, 4984)$

11. $(-2, 968), (-1, 422), (0, 142), (1, 26), (2, -4), (3, -2), (4, 2), (5, 2), (6, 16)$

12. $(1, 0), (2, 6), (3, 2), (4, 6), (5, 12), (6, -10), (7, -114), (8, -378), (9, -904)$

13. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error al escribir una función cúbica cuya gráfica pase por los puntos dados.

✗

$(-6, 0), (1, 0), (3, 0), (0, 54)$

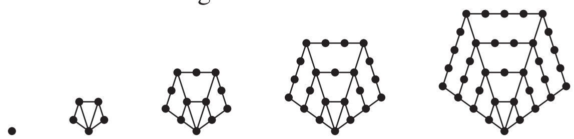
$54 = a(0 - 6)(0 + 1)(0 + 3)$

$54 = -18a$

$a = -3$

$f(x) = -3(x - 6)(x + 1)(x + 3)$

14. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Los patrones de puntos muestran números pentagonales. El número de puntos en el enésimo número pentagonal está dado por $f(n) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$. Demuestra que esta función tiene diferencias de segundo orden constantes.



15. **FINAL ABIERTO** Escribe tres funciones cúbicas diferentes que pasen por los puntos (3, 0), (4, 0) y (2, 6). Justifica tus respuestas.

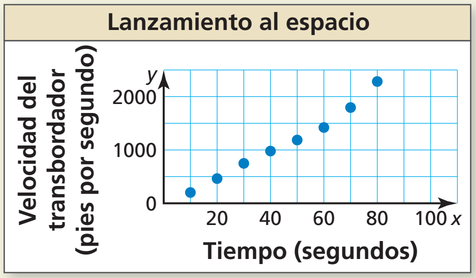
16. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La tabla muestra las edades de los gatos y sus edades correspondientes en años humanos. Halla un modelo polinomial para los datos de los primeros 8 años de la vida de un gato. Usa el modelo para estimar la edad (en años humanos) de un gato de 3 años de edad. *(Consulta el Ejemplo 3).*

| Edad del gato, $x$ | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Años humanos, $y$ | 15 | 24 | 32 | 40 | 44 | 48 |

17. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Los datos en la tabla muestran las velocidades $y$ promedio (en millas por hora) de un bote pontón para varias diferentes velocidades de motor $x$ (en cientos de revoluciones por minuto, o RPM.) Halla un modelo polinomial para los datos. Estima la velocidad promedio del bote pontón si la velocidad del motor es de 2800 RPM.

| $x$ | 10 | 20 | 25 | 30 | 45 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4.5 | 8.9 | 13.8 | 18.9 | 29.9 | 37.7 |

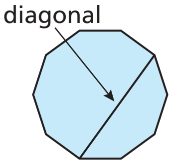
18. **¿CÓMO LO VES?** La gráfica muestra velocidades $y$ típicas (en pies por segundo) de un transbordador espacial $x$ segundos después de su lanzamiento.




a. ¿Qué tipo de función polinomial representa los datos? Explica.

b. ¿Qué diferencia finita de enésimo orden debería ser constante para la función en la parte (a)? Explica.

19. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** La tabla muestra el número de diagonales de polígonos que tienen $n$ lados. Halla una función polinomial que corresponda con los datos. Determina el número total de diagonales en el decágono que se muestra.




| Número de lados, $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de diagonales, $d$ | 0 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 |

20. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que no es posible determinar el grado de una función dadas las diferencias de primer orden. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

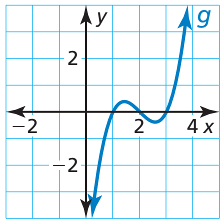
21. **ESCRIBIR** Explica por qué no puedes usar siempre diferencias finitas para hallar un modelo para conjuntos de datos de la vida real.

22. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** $A$, $B$ y $C$ son ceros de una función polinomial cúbica. Elige valores para $A$, $B$ y $C$ tales que la distancia de $A$ hacia $B$ sea menor o igual a la distancia de $A$ hacia $C$. Luego escribe la función usando los valores de $A$, $B$, y $C$ que elegiste.

23. **REPRESENTACIONES MÚLTIPLES** Ordena las funciones polinomiales de acuerdo con su grado, de menor a mayor.

**A.** $f(x) = -3x + 2x^2 + 1$

**B.**




**C.**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | $-2$ |

**D.**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k(x)$ | 25 | 6 | 7 | 4 | $-3$ | 10 |

24. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Sustituye las expresiones $z$, $z + 1$, $z + 2$, . . . , $z + 5$ para $x$ en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para generar seis pares ordenados con espacios iguales. Luego demuestra que las diferencias de tercer orden son constantes.

## Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

**Resuelve la ecuación usando raíces cuadradas.** *(Sección 3.1)*

**25.** $x^2 - 6 = 30$

**26.** $5x^2 - 38 = 187$

**27.** $2(x - 3)^2 = 24$

**28.** $\frac{4}{3}(x + 5)^2 = 4$

**Resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática.** *(Sección 3.4)*

**29.** $2x^2 + 3x = 5$

**30.** $2x^2 + \frac{1}{2} = 2x$

**31.** $2x^2 + 3x = -3x^2 + 1$

**32.** $4x - 20 = x^2$

# 4.5–4.9 ¿Qué aprendiste?

## Vocabulario Esencial

solución repetida, *pág. 190*
números complejos conjugados, *pág. 199*
máximo local, *pág. 214*
mínimo local, *pág. 214*
función par, *pág. 215*
función impar, *pág. 215*
diferencias, finitas, *pág. 220*

## Conceptos Esenciales

### Sección 4.5

El teorema de la raíz racional, *pág. 191*
El teorema de los valores conjugados irracionales, *pág. 193*

### Sección 4.6

El teorema fundamental del álgebra, *pág. 198*
El teorema de los números conjugados complejos, *pág. 199*
Regla de los signos de Descartes, *pág. 200*

### Sección 4.7

Transformaciones de las funciones polinomiales, *pág. 206*
Escribir funciones polinomiales transformadas, *pág. 207*

### Sección 4.8

Ceros, factores, soluciones e intersecciones, *pág. 212*
El principio de la ubicación, *pág. 213*
Puntos de inflexión de las funciones polinomiales, *pág. 214*
Funciones pares e impares, *pág. 215*

### Sección 4.9

Escribir funciones polinomiales para conjuntos de datos, *pág. 220*
Propiedades de las diferencias finitas, *pág. 221*

## Prácticas matemáticas

1. Explica cómo entender el teorema de conjugados complejos te permite construir tu argumento en el Ejercicio 46 de la página 203.
2. Describe cómo usas la estructura para unir correctamente cada gráfica con su transformación en los Ejercicios 7–10 de la página 209.

### Tarea de desempeño

# Por las aves – Protección de la vida silvestre

¿Cómo afecta la presencia de humanos a la población de gorriones en un parque? ¿Más humanos significa menos gorriones? ¿O la presencia de humanos aumenta el número de gorriones hasta cierto punto? ¿Existe un número mínimo de gorriones que se pueda hallar en un parque, sin importar cuántos humanos hayan? ¿Qué te puede indicar un modelo matemático?

Para explorar las respuestas a estas y más preguntas, visita ***BigIdeasMath.com***.

# 4 Repaso del capítulo

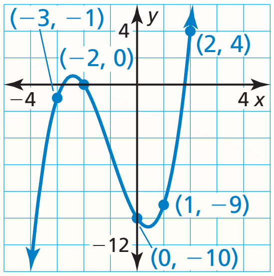
Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

## 4.1 Hacer gráficas de funciones polinomiales *(págs. 157–164)*

**Haz una gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 10$.**

Para hacer una gráfica de la función, haz una tabla de valores y marca los puntos correspondientes. Conecta los puntos con una curva suave y verifica el comportamiento de los extremos.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $0$ | $-5$ | $-10$ | $-9$ | $4$ | $35$ |




El grado es impar y el coeficiente principal es positivo. Entonces, $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to +\infty$.

**Decide si la función es una función polinomial. Si lo es, escríbela en forma estándar e indica su grado, tipo y coeficiente principal.**

**1.** $h(x) = -x^3 + 2x^2 - 15x^7$

**2.** $p(x) = x^3 - 5x^{0.5} + 13x^2 + 8$

**Haz una gráfica de la función polinomial.**

**3.** $h(x) = x^2 + 6x^5 - 5$

**4.** $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$

**5.** $g(x) = -x^4 + x + 2$

## 4.2 Sumar, restar y multiplicar polinomios *(págs. 165–172)*

**a. Multiplica $(x - 2)$, $(x - 1)$, y $(x + 3)$ en formato horizontal.**

$$\begin{aligned}(x-2)(x-1)(x+3) &= (x^2 - 3x + 2)(x + 3)\\ &= (x^2 - 3x + 2)x + (x^2 - 3x + 2)3\\ &= x^3 - 3x^2 + 2x + 3x^2 - 9x + 6\\ &= x^3 - 7x + 6\end{aligned}$$

**b. Usa el triángulo de Pascal para desarrollar $(4x + 2)^4$.**

Los coeficientes de la cuarta fila del triángulo de Pascal son 1, 4, 6, 4 y 1.

$$\begin{aligned}(4x+2)^4 &= 1(4x)^4 + 4(4x)^3(2) + 6(4x)^2(2)^2 + 4(4x)(2)^3 + 1(2)^4\\ &= 256x^4 + 512x^3 + 384x^2 + 128x + 16\end{aligned}$$

**Halla la suma o la diferencia.**

**6.** $(4x^3 - 12x^2 - 5) - (-8x^2 + 4x + 3)$

**7.** $(x^4 + 3x^3 - x^2 + 6) + (2x^4 - 3x + 9)$

**8.** $(3x^2 + 9x + 13) - (x^2 - 2x + 12)$

**Halla el producto.**

**9.** $(2y^2 + 4y - 7)(y + 3)$

**10.** $(2m + n)^3$

**11.** $(s + 2)(s + 4)(s - 3)$

**Usa el triángulo de Pascal para desarrollar el binomio.**

**12.** $(m + 4)^4$

**13.** $(3s + 2)^5$

**14.** $(z + 1)^6$

## 4.3 Dividir polinomios (págs. 173–178)

**Usa la división sintética para evaluar $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 8x + 10$ cuando $x = -3$.**

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-3 & -2 & 4 & 8 & 10 \\
 & & 6 & -30 & 66 \\
\hline
 & -2 & 10 & -22 & 76
\end{array}
$$

▶ El residuo es 76. Entonces por el teorema del residuo puedes llegar a la conclusión de que $f(-3) = 76$. Puedes verificar esto sustituyendo $x = -3$ en la función original.

**Verifica**

$$
\begin{aligned}
f(-3) &= -2(-3)^3 + 4(-3)^2 + 8(-3) + 10 \\
&= 54 + 36 - 24 + 10 \\
&= 76 \ ✓
\end{aligned}
$$

**Divide usando la división polinomial larga o la división sintética.**

**15.** $(x^3 + x^2 + 3x - 4) \div (x^2 + 2x + 1)$

**16.** $(x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 4)$

**17.** $(x^4 - x^2 - 7) \div (x + 4)$

**18.** Usa la división sintética para evaluar $g(x) = 4x^3 + 2x^2 - 4$ cuando $x = 5$.

## 4.4 Factorizar polinomios (págs. 179–186)

**a. Factoriza $x^4 + 8x$ completamente.**

$x^4 + 8x = x(x^3 + 8)$ — Factoriza el monomio común.

$= x(x^3 + 2^3)$ — Escribe $x^3 + 8$ como $a^3 + b^3$.

$= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ — Patrón de suma de dos cubos.

**b. Determina si $x + 4$ es un factor de $f(x) = x^5 + 4x^4 + 2x + 8$.**

Halla $f(-4)$ mediante la división sintética.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 8 \\
 & & -4 & 0 & 0 & 0 & -8 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{array}
$$

▶ Dado que $f(-4) = 0$, el binomio $x + 4$ es un factor de $f(x) = x^5 + 4x^4 + 2x + 8$.

**Factoriza completamente el polinomio.**

**19.** $64x^3 - 8$

**20.** $2z^5 - 12z^3 + 10z$

**21.** $2a^3 - 7a^2 - 8a + 28$

**22.** Demuestra que $x + 2$ es un factor de $f(x) = x^4 + 2x^3 - 27x - 54$. Luego factoriza $f(x)$ completamente.

## 4.5 Resolver ecuaciones polinomiales (págs. 189–196)

**a. Halla todas las soluciones reales de $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$.**

**Paso 1** Enumera las posibles soluciones racionales. El coeficiente principal del polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$, y el término constante es $-12$. Entonces, las posibles soluciones racionales De $f(x) = 0$ son

$$x = \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{6}{1}, \pm\frac{12}{1}.$$

**Paso 2** Prueba las soluciones posibles usando la división sintética hasta hallar una solución.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & 2 & 6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -16 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$f(2) \neq 0$, entonces $x - 2$ no es un factor de $f(x)$. $f(-2) = 0$, entonces $x + 2$ es un factor de $f(x)$.

**Paso 3** Factoriza completamente usando el resultado de la división sintética.

$(x + 2)(x^2 - x - 6) = 0$ Escribe como un producto de factores.

$(x + 2)(x + 2)(x - 3) = 0$ Factoriza el trinomio.

▶ Entonces, las soluciones son $x = -2$ y $x = 3$.

**b. Escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1 y los ceros $-4$ y $1 + \sqrt{2}$.**

**Según el Teorema de los valores conjugados irracionales, $1 - \sqrt{2}$ tiene que ser también un cero de $f$.**

$f(x) = (x + 4)\left[x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right]\left[x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right]$ Escribe $f(x)$ en forma factorizada.

$= (x + 4)\left[(x - 1) - \sqrt{2}\right]\left[(x - 1) + \sqrt{2}\right]$ Reagrupa los términos.

$= (x + 4)\left[(x - 1)^2 - 2\right]$ Multiplica.

$= (x + 4)\left[(x^2 - 2x + 1) - 2\right]$ Desarrolla el binomio.

$= (x + 4)(x^2 - 2x - 1)$ Simplifica.

$= x^3 - 2x^2 - x + 4x^2 - 8x - 4$ Multiplica.

$= x^3 + 2x^2 - 9x - 4$ Combina los términos semejantes.

**Halla todas las soluciones reales de la ecuación.**

**23.** $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$

**24.** $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$

**Escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1, y los ceros dados.**

**25.** $1, 2 - \sqrt{3}$

**26.** $2, 3, \sqrt{5}$

**27.** $-2, 5, 3 + \sqrt{6}$

**28.** Usas 240 pulgadas cúbicas de arcilla para hacer una escultura en forma de prisma rectangular. El ancho es 4 pulgadas menos que la longitud y la altura es 2 pulgadas más que la longitud multiplicada por tres. ¿Cuáles son las dimensiones de la escultura? Justifica tu respuesta.

## 4.6 El teorema fundamental del álgebra (págs. 197–204)

**Halla todos los ceros de $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27$.**

**Paso 1** Halla los ceros racionales de $f$. Dado que $f$ es una función polinomial de grado 4, tiene cuatro ceros. Los ceros racionales posibles son $\pm 1$, $\pm 3$, $\pm 9$ y $\pm$ 27. Con la división sintética, puedes determinar que 1 es un cero y $-3$ también es un cero.

**Paso 2** Escribe $f(x)$ en forma factorizada. Dividir $f(x)$ entre sus propios factores $x - 1$ y $x + 3$ da un cociente de $x^2 + 9$. Entonces,

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)(x^2 + 9).$$

**Paso 3** Halla los ceros complejos de $f$. Al resolver $x^2 + 9 = 0$, obtienes $x = \pm 3i$. Esto significa que $x^2 + 9 = (x + 3i)(x - 3i)$.

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 3i)(x - 3i)$$

▶ A partir de la factorización, hay cuatro ceros. Los ceros de $f$ son 1, $-3$, $-3i$ y $3i$.

**Escribe una función polinomial $f$ de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1 y los ceros dados.**

**29.** $3, 1 + 2i$

**30.** $-1, 2, 4i$

**31.** $-5, -4, 1 - i\sqrt{3}$

**Determina los números posibles de ceros reales positivos, ceros reales negativos y ceros imaginarios para la función.**

**32.** $f(x) = x^4 - 10x + 8$

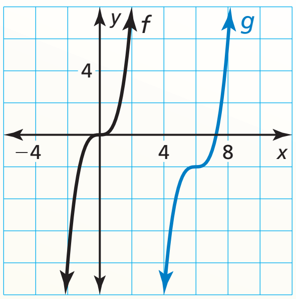
**33.** $f(x) = -6x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 18$

## 4.7 Transformaciones de funciones polinomiales (págs. 205–210)

**Describe la transformación de $f(x) = x^3$ representado mediante $g(x) = (x - 6)^3 - 2$. Luego haz una gráfica de cada función.**

Observa que la función es de la forma $g(x) = (x - h)^3 + k$. Vuelve a escribir la función para identificar $h$ y $k$.

$$g(x) = (x - \underset{h}{\underset{\uparrow}{6}})^3 + (\underset{k}{\underset{\uparrow}{-2}})$$




▶ Dado que $h = 6$ y $k = -2$, la gráfica de $g$ es una traslación de 6 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia debajo de la gráfica de $f$.

**Describe la transformación de $f$ representada mediante $g$. Luego haz una gráfica de cada función.**

**34.** $f(x) = x^3$, $g(x) = (-x)^3 + 2$

**35.** $f(x) = x^4$, $g(x) = -(x + 9)^4$

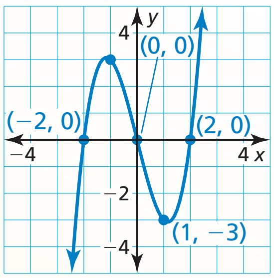
**Escribe una regla para $g$.**

**36.** Imagina que la gráfica de $g$ sea un ajuste horizontal por un factor de 4, seguido de una traslación de 3 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia debajo de la gráfica de $f(x) = x^5 + 3x$.

**37.** Imagina que la gráfica de $g$ sea una traslación de 5 unidades hacia arriba, seguida de una reflexión en el eje $y$ de la gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12$.

## 4.8 Analizar gráficas de funciones polinomiales *(págs. 211–218)*

**Haz una gráfica de la función $f(x) = x(x + 2)(x - 2)$. Luego, estima los puntos donde ocurren los máximos locales y los mínimos locales.**

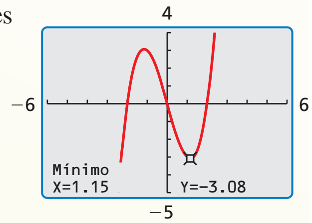



**Paso 1** Marca las intersecciones con el eje $x$. Dado que $-2$, 0, y 2 son ceros de $f$, marca $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

**Paso 2** Marca puntos entre las intersecciones con el eje $x$ y más allá de las mismas.

| ***x*** | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | −15 | 0 | 3 | 0 | −3 | 0 | 15 |

**Paso 3** Determina el comportamiento de los extremos. Dado que $f(x)$ tiene tres factores de la forma $x - k$ y un factor constante de 1, $f$ es una función cúbica con un coeficiente principal positivo. Entonces $f(x) \to -\infty$ en tanto que $x \to -\infty$ y $f(x) \to +\infty$ en tanto que $x \to +\infty$.




**Paso 4** Dibuja la gráfica de tal manera que pase por los puntos marcados y que tenga el comportamiento de los extremos adecuado.

▶ La función tiene un máximo local en $(-1.15, 3.08)$ y un mínimo local en $(1.15, -3.08.)$

**Haz una gráfica de la función. Identifica las intersecciones con el eje *x* y los puntos donde ocurren los máximos locales y los mínimos locales. Determina los intervalos para los que la función es creciente o decreciente.**

**38.** $f(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$

**39.** $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 8x + 2$

**Determina si la función es *par*, *impar*, o *ninguna*.**

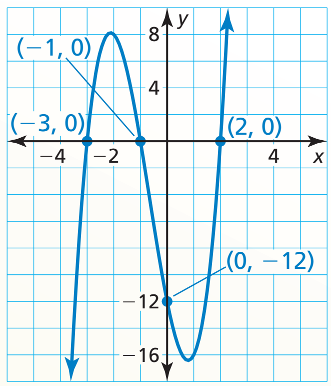
**40.** $f(x) = 2x^3 + 3x$

**41.** $g(x) = 3x^2 - 7$

**42.** $h(x) = x^6 + 3x^5$

## 4.9 Representar con funciones polinomiales *(págs. 219–224)*

**Escribe la función cúbica cuya gráfica se muestra.**




**Paso 1** Usa las tres intersecciones con el eje $x$ para escribir la función en forma factorizada.

$$f(x) = a(x + 3)(x + 1)(x - 2)$$

**Paso 2** Halla el valor de $a$ sustituyendo las coordenadas del punto $(0, -12)$.

$$-12 = a(0 + 3)(0 + 1)(0 - 2)$$
$$-12 = -6a$$
$$2 = a$$

▶ La función es $f(x) = 2(x + 3)(x + 1)(x - 2)$.

**43.** Escribe una función cúbica cuya gráfica pase por los puntos $(-4, 0)$, $(4, 0)$ $(0, 6)$, y $(2, 0)$.

**44.** Usa las diferencias finitas para determinar el grado de la función polinomial que corresponde con los datos. Luego usa herramientas tecnológicas para hallar la función polinomial.

| ***x*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | −11 | −24 | −27 | −8 | 45 | 144 | 301 |

# 4 Prueba del capítulo

**Escribe una función polinomial *f* de menor grado que tenga coeficientes racionales, un coeficiente principal de 1 y los ceros dados.**

**1.** $3, 1 - \sqrt{2}$

**2.** $-2, 4, 3i$

**Halla el producto o el cociente.**

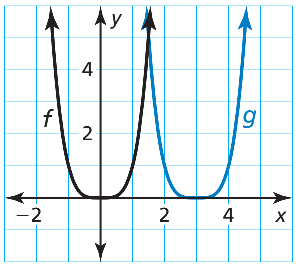
**3.** $(x^6 - 4)(x^2 - 7x + 5)$

**4.** $(3x^4 - 2x^3 - x - 1) \div (x^2 - 2x + 1)$

**5.** $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1) \div (x + 2)$

**6.** $(2x + 3)^3$

**7.** Se muestran las gráficas de $f(x) = x^4$ y $g(x) = (x - 3)^4$.




**a.** ¿Cuántos ceros tiene cada función? Explica.

**b.** Describe la transformación de *f* representada mediante *g*.

**c.** Determina los intervalos por los que la función *g* es creciente o decreciente.

**8.** El volumen *V* (en pies cúbicos) de un acuario está representado mediante la función polinomial $V(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, donde *x* es la longitud del tanque.

**a.** Explica cómo sabes que $x = 4$ *no* es un cero racional posible.

**b.** Demuestra que $x - 1$ es un factor de $V(x)$. Luego factoriza $V(x)$ completamente.

**c.** Halla las dimensiones del acuario que se muestra.

Volumen = 3 pies$^3$

**9.** Un patrón de producto especial es $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Usando el triangulo de Pascal para expandir $(a - b)^2$ da $1a^2 + 2a(-b) + 1(-b)^2$. ¿Son equivalentes las dos expresiones? Explica.

**10.** ¿Puedes usar el proceso de división sintética que aprendiste en este capítulo para dividir cualquier dos polinomios? Explica.

**11.** Imagina que *T* sea el número (en millares) de ventas de camionetas nuevas. Imagina que *C* sea el número (en millares) de ventas de carros nuevos. Durante un periodo de 10 años, *T* y *C* se pueden representar mediante las siguientes ecuaciones, donde *t* es tiempo (en años).

$$T = 23t^4 - 330t^3 + 3500t^2 - 7500t + 9000$$

$$C = 14t^4 - 330t^3 + 2400t^2 - 5900t + 8900$$

**a.** Halla un nuevo modelo *S* para el número total de ventas de vehículos nuevos.

**b.** ¿La función *S* es *par*, *impar* o *ninguna*? Explica tu razonamiento.

**12.** Tu amigo ha iniciado un negocio de caddies de golf. La tabla muestra las ganancias *p* (en dólares) del negocio en los primeros 5 meses. Usa las diferencias finitas para hallar un modelo polinomial para los datos. Luego usa el modelo para predecir la ganancia después de 7 meses.

| **Mes, *t*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia, *p*** | 4 | 2 | 6 | 22 | 56 |

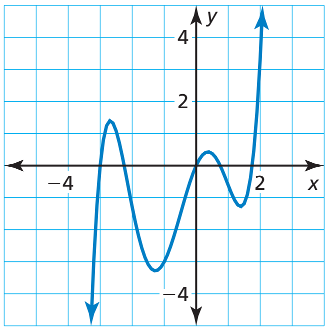
# 4 Evaluación acumulativa

**1.** La división sintética a continuación representa $f(x) \div (x - 3)$. Elige un valor para $m$ de manera que $x - 3$ sea un factor de $f(x)$. Justifica tu respuesta.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & m & 3 \\ & & 3 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

| | |
|---|---|
| $-3$ | $3$ |
| $-2$ | $2$ |
| $-1$ | $1$ |

**2.** Analiza la gráfica de la función polinomial para determinar el signo del coeficiente principal, el grado de la función y el número de ceros reales. Explica.




**3.** ¿Qué enunciado acerca de la gráfica de la ecuación $12(x - 6) = -(y + 4)^2$ *no* es verdadero?

Ⓐ El vértice es $(6, -4.)$

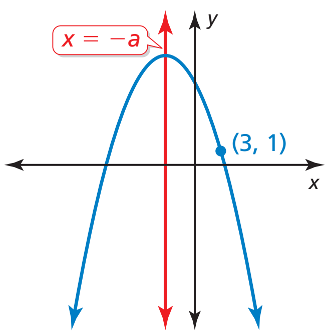
Ⓑ El eje de simetría es $y = -4$

Ⓒ El foco es $(3, -4)$.

Ⓓ La gráfica representa una función.

**4.** Una parábola pasa por el punto que se muestra en la gráfica. La ecuación del eje de simetría es $x = -a$. ¿Cuál de los puntos dados podría estar sobre la parábola? Si el eje de simetría fuera $x = a$, ¿qué puntos podrían estar sobre la parábola? Explica tu razonamiento.

| | | |
|---|---|---|
| $(1, 1)$ | $(0, 1)$ | $(-2, 1)$ |
| $(-3, 1)$ | $(-4, 1)$ | $(-5, 1)$ |



**5.** Selecciona valores para que la función represente cada transformación en la gráfica de $f(x) = x$.

$$g(x) = \square\left(x - \square\right) + \square$$

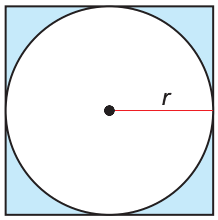
**a.** La gráfica es una traslación de 2 unidades hacia arriba y 3 unidades hacia la izquierda.

**b.** La gráfica es una traslación de 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo.

**c.** La gráfica es un alargamiento vertical por un factor de 2, seguido de una traslación de 2 unidades hacia arriba.

**d.** La gráfica es una traslación de 3 unidades hacia la derecha y un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{2}$, seguida de una traslación de 4 unidades hacia abajo.

**6.** El diagrama muestra un círculo inscrito en un cuadrado. El área de la región sombreada es 21. 5 metros cuadrados. Al décimo de metro más cercano, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?




Ⓐ 4.6 metros    Ⓑ 8.7 metros    Ⓒ 9.7 metros    Ⓓ 10.0 metros

**7.** Clasifica cada función como *par, impar* o *ninguna*. Justifica tu respuesta.

**a.** $f(x) = 3x^5$

**b.** $f(x) = 4x^3 + 8x$

**c.** $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 1$

**d.** $f(x) = 2x^4$

**e.** $f(x) = x^{11} - x^7$

**f.** $f(x) = 2x^8 + 4x^4 + x^2 - 5$

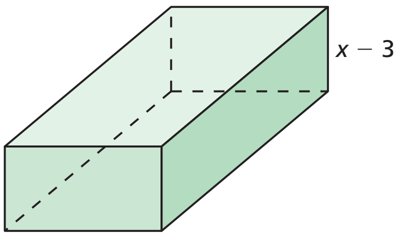
**8.** El volumen del prisma rectangular que se muestra está dado por $V = 2x^3 + 7x^2 - 18x - 63$. ¿Qué polinomio representa el área de la base del prisma?

Ⓐ $2x^2 + x - 21$

Ⓑ $2x^2 + 21 - x$

Ⓒ $13x + 21 + 2x^2$

Ⓓ $2x^2 - 21 - 13x$




**9.** El número $R$ (en decenas de miles) de jubilados que reciben beneficios del seguro social está representado mediante la función

$$R = 0.286t^3 - 4.68t^2 + 8.8t + 403, \quad 0 \leq t \leq 10$$

donde $t$ representa el número de años desde 2000. Identifica todo punto de inflexión en el intervalo dado. ¿Qué representa un punto de inflexión en esta situación?