9 Razones y funciones trigonométricas

Reloj de sol ***(pág. 518)***

Diapasón ***(pág. 510)***

Rueda de la fortuna ***(pág. 494)***

Terminador ***(pág. 476)***

Parasailing ***(pág. 465)***

Mantener el dominio de las matemáticas

Valor Absoluto

Ejemplo 1 **Ordena las expresiones por valor, de menor a mayor:** $|6|, |-3|, \dfrac{2}{|-4|}, |10-6|$

$$|6| = 6 \qquad |-3| = 3$$

El valor absoluto de un número negativo es positivo.

$$\frac{2}{|-4|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad |10-6| = |4| = 4$$

▶ Entonces, el orden es $\dfrac{2}{|-4|}, |-3|, |10-6|$ y $|6|$.

Ordena las expresiones por valor, de menor a mayor.

1. $|4|, |2-9|, |6+4|, -|7|$

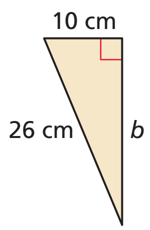
2. $|9-3|, |0|, |-4|, \dfrac{|-5|}{|2|}$

3. $|-8^3|, |-2 \cdot 8|, |9-1|, |9| + |-2| - |1|$

4. $|-4+20|, -|4^2|, |5| - |3 \cdot 2|, |-15|$

Teorema de Pitágoras

Ejemplo 2 **Halla la longitud de lado que falta en el triángulo.**



$a^2 + b^2 = c^2$ — Escribe el teorema de Pitágoras.

$10^2 + b^2 = 26^2$ — Sustituye 10 por *a* y 26 por *c*.

$100 + b^2 = 676$ — Evalúa las potencias.

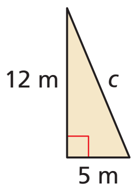
$b^2 = 576$ — Resta 100 de cada lado.

$b = 24$ — Saca la raíz cuadrada positiva de cada lado.

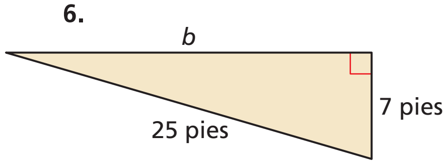
▶ Entonces, la longitud es 24 centímetros.

Halla la longitud de lado que falta en el triángulo.

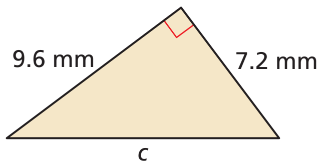
5.



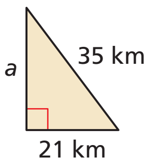
6.



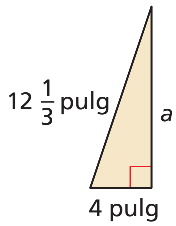
7.



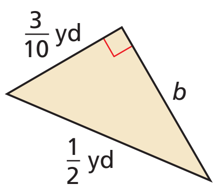
8.



9.



10.



11. **RAZOMANIENTO ABSTRACTO** Los segmentos de línea que conectan los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_1), y (x_2, y_2) forman un triángulo. ¿El triángulo es un triángulo rectángulo? Justifica tu respuesta.

Prácticas matemáticas

Los estudiantes que dominan las matemáticas razonan de manera cuantitativa al crear representaciones válidas de los problemas.

Razonar de manera abstracta y cuantitativa

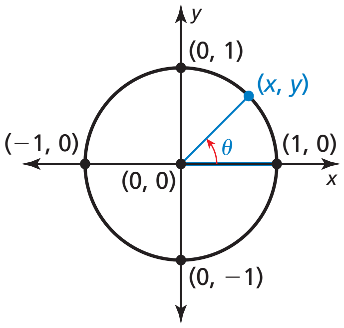
Concepto Esencial

El círculo unitario

El *círculo unitario* es un círculo en el plano de coordenadas. Su centro está en el origen y tiene un radio de 1 unidad. La ecuación del círculo unitario es

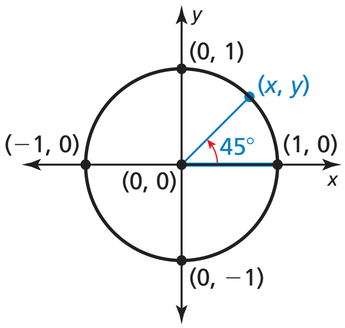
$x^2 + y^2 = 1.$ Ecuación del círculo unitario

Como el punto (x, y) comienza en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario, el ángulo θ (la letra griega *theta*) se mueve de 0° a 360°.



EJEMPLO 1 **Hallar las coordenadas de un punto en el círculo unitario**

Halla las coordenadas exactas del punto (x, y) en el círculo unitario.



SOLUCIÓN

Dado que $\theta = 45°$, (x, y) pertenece a la línea $y = x$.

$x^2 + y^2 = 1$ Escribe la ecuación del círculo unitario.

$x^2 + x^2 = 1$ Sustituye *x* por *y*.

$2x^2 = 1$ Suma los términos semejantes.

$x^2 = \frac{1}{2}$ Divide cada lado entre 2.

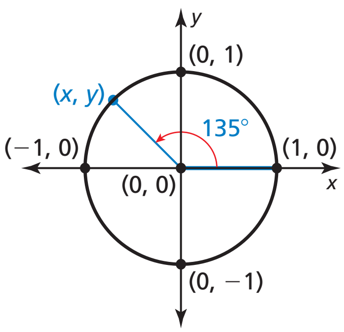
$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Saca la raíz cuadrada positiva de cada lado.

▶ Las coordenadas de (x, y) son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, o $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

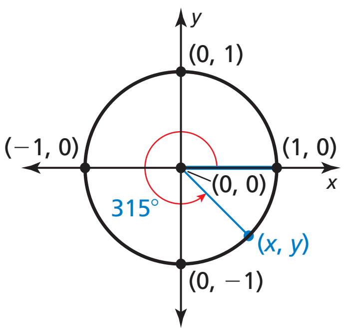
Monitoreo del progreso

Halla las coordenadas exactas del punto (x, y) en el círculo unitario.

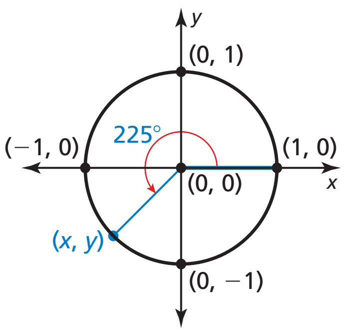
1.



2.



3.

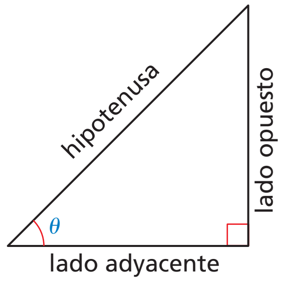


9.1 Trigonometría de triángulo rectángulo

Pregunta esencial

¿Cómo puedes hallar una función trigonométrica de un ángulo agudo de θ?

Considera uno de los ángulos agudos θ de un triángulo rectángulo. Las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se usan para definir las seis *funciones trigonométricas*, tal como se muestra.



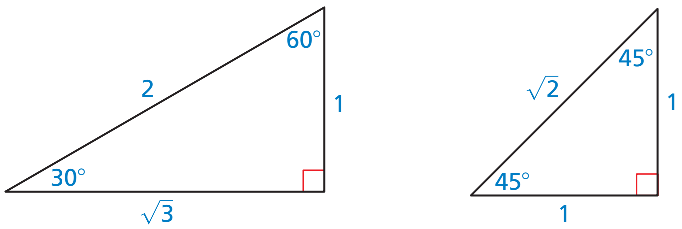
Seno $\quad \text{sen } \theta = \dfrac{\text{op.}}{\text{hip.}}$ **Coseno** $\quad \cos \theta = \dfrac{\text{ady.}}{\text{hip.}}$

Tangente $\quad \tan \theta = \dfrac{\text{op.}}{\text{ady.}}$ **Cotangente** $\quad \cot \theta = \dfrac{\text{ady.}}{\text{op.}}$

Secante $\quad \sec \theta = \dfrac{\text{hip.}}{\text{ady.}}$ **Cosecante** $\quad \csc \theta = \dfrac{\text{hip.}}{\text{op.}}$

EXPLORACIÓN 1 Funciones trigonométricas de ángulos especiales

Trabaja con un compañero. Halla los valores exactos de las funciones seno, coseno y tangente de los ángulos de 30°, 45° y 60° en los triángulos rectángulos que se muestran.



CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas entender y usar las suposiciones y definiciones enunciadas, y los resultados previamente establecidos al formular argumentos.

EXPLORACIÓN 2 Explorar identidades trigonométricas

Trabaja con un compañero.

Usa las definiciones de las funciones trigonométricas para explicar por qué cada *identidad trigonométrica* es verdadera.

a. $\text{sen } \theta = \cos(90° - \theta)$ **b.** $\cos \theta = \text{sen}(90° - \theta)$

c. $\text{sen } \theta = \dfrac{1}{\csc \theta}$ **d.** $\tan \theta = \dfrac{1}{\cot \theta}$

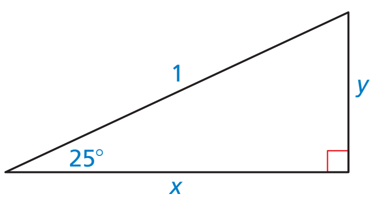
Usa las definiciones de las funciones trigonométricas para completar cada identidad trigonométrica.

e. $(\text{sen } \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \_\_\_\_$ **f.** $(\sec \theta)^2 - (\tan \theta)^2 = \_\_\_\_$

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes hallar una función trigonométrica de un ángulo agudo θ?

4. Usa una calculadora para hallar las longitudes x y y de los catetos del triángulo rectángulo que se muestra.



9.1 Lección

Vocabulario Esencial

seno, *pág. 462*
coseno, *pág. 462*
tangente, *pág. 462*
cosecante, *pág. 462*
secante, *pág. 462*
cotangente, *pág. 462*

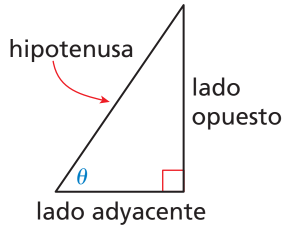
Anterior
triángulo rectángulo
hipotenusa
ángulo agudo
Teorema de Pitágoras
recíproco
ángulos complementarios

Qué aprenderás

- Evaluar las funciones trigonométricas de los ángulos agudos.
- Hallar las longitudes de lado desconocidas y las medidas de los ángulos de los triángulos rectángulos.
- Usar funciones trigonométricas para resolver problemas de la vida real.

Las seis funciones trigonométricas

Considera un triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo θ (la letra griega *theta*). Los tres lados del triángulo son la *hipotenusa*, el lado *opuesto* a θ, y el lado *adyacente* a θ.



Las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se usan para definir las seis funciones trigonométricas: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cosecante**, **secante** y **cotangente**. Las abreviaturas de estas seis funciones son sen, cos, tan, csc, sec y cot, respectivamente.

Concepto Esencial

Definiciones de las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo

Imagina que θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Las seis funciones trigonométricas de θ están definidas tal como se muestra:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

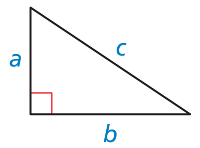
$$\csc \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Las abreviaturas *op.*, *ady.* e *hip.* se usan a menudo para representar las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Observa que las razones en la segunda fila son recíprocas de las razones en la primera fila.

$$\csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

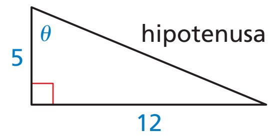
RECUERDA

El teorema de Pitágoras expresa que $a^2 + b^2 = c^2$ para un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud c y catetos de longitudes a y b.



EJEMPLO 1 Evaluar las funciones trigonométricas

Evalúa las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.



SOLUCIÓN

Según el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es

$$\begin{aligned} \text{hip.} &= \sqrt{5^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Usando ady. = 5, op. = 12 e hip. = 13, los valores de las seis funciones trigonométricas de θ son:

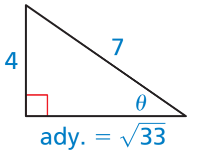
$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op.}}{\text{hip.}} = \frac{12}{13} \qquad \cos \theta = \frac{\text{ady.}}{\text{hip.}} = \frac{5}{13} \qquad \tan \theta = \frac{\text{op.}}{\text{ady.}} = \frac{12}{5}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{hip.}}{\text{op.}} = \frac{13}{12} \qquad \sec \theta = \frac{\text{hip.}}{\text{ady.}} = \frac{13}{5} \qquad \cot \theta = \frac{\text{ady.}}{\text{op.}} = \frac{5}{12}$$

EJEMPLO 2 Evaluar las funciones trigonométricas

En un triángulo rectángulo, θ es un ángulo agudo y sen $\theta = \frac{4}{7}$. Evalúa las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN



Paso 1 Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ de tal manera que el cateto opuesto a θ tenga una longitud de 4 y la hipotenusa tenga una longitud de 7.

Paso 2 Halla la longitud del lado adyacente. Según el teorema de Pitágoras, la longitud del otro cateto es

$$\text{ady.} = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}.$$

Paso 3 Halla los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes.

Dado que sen $\theta = \frac{4}{7}$, csc $\theta = \frac{\text{hip.}}{\text{opu.}} = \frac{7}{4}$. Los otros valores son:

$$\cos\theta = \frac{\text{ady.}}{\text{hip.}} = \frac{\sqrt{33}}{7} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op.}}{\text{ady.}} = \frac{4}{\sqrt{33}} = \frac{4\sqrt{33}}{33}$$

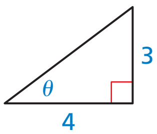
$$\sec\theta = \frac{\text{hip.}}{\text{ady.}} = \frac{7}{\sqrt{33}} = \frac{7\sqrt{33}}{33} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady.}}{\text{op.}} = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

Monitoreo del progreso

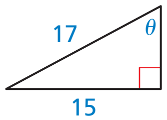
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Evalúa las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

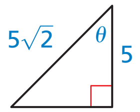
1.



2.



3.



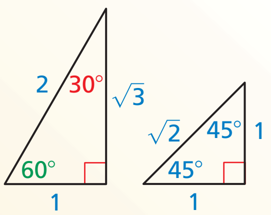
4. En un triángulo rectángulo, θ es un ángulo agudo y cos $\theta = \frac{7}{10}$. Evalúa las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

Los ángulos de 30°, 45° y 60° ocurren frecuentemente en trigonometría. Puedes usar los valores trigonométricos de estos ángulos para hallar longitudes de los lados desconocidas en los triángulos rectángulos especiales.

Conceptos Esenciales

Valores trigonométricos para ángulos especiales

La tabla da los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°. Puedes obtener estos valores de los triángulos que se muestran.

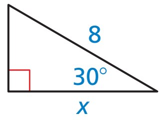


θ	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Hallar las longitudes de lados y las medidas de ángulos

EJEMPLO 3 Hallar una longitud de lado desconocida

Halla el valor de x para el triángulo rectángulo.



SOLUCIÓN

Escribe una ecuación usando una función trigonométrica que incluya la razón entre x y 8. Resuelve la ecuación para x.

$\cos 30° = \dfrac{\text{ady.}}{\text{hip.}}$ — Escribe la ecuación trigonométrica.

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{8}$ — Sustituye.

$4\sqrt{3} = x$ — Multiplica cada lado por 8.

▶ La longitud del lado es $x = 4\sqrt{3} \approx 6.93$.

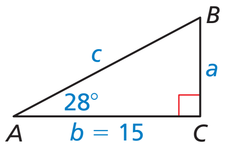
Hallar todas las longitudes desconocidas de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo se denomina *resolver el triángulo*. Resolver triángulos rectángulos que tengan ángulos agudos distintos de 30°, 45° y 60° puede requerir el uso de una calculadora. Asegúrate de que la calculadora esté en modo *grado*.

LEER

A lo largo de este capítulo, se usa una letra mayúscula para denotar tanto un ángulo de un triángulo como su medida. La misma letra en minúscula se usa para denotar la longitud del lado opuesto a ese ángulo.

EJEMPLO 4 Usar una calculadora para resolver un triángulo rectángulo

Resuelve $\triangle ABC$.



SOLUCIÓN

Dado que el triángulo es un triángulo rectángulo, A y B son ángulos complementarios. Entonces, $B = 90° - 28° = 62°$.

Luego, escribe dos ecuaciones usando funciones trigonométricas, una que incluya la razón de a y 15, y una que incluya c y 15. Resuelve la primera ecuación para a y la segunda ecuación para c.

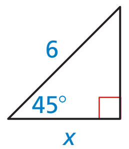
$\tan 28° = \dfrac{\text{op.}}{\text{ady.}}$	Escribe la ecuación trigonométrica.	$\sec 28° = \dfrac{\text{hip.}}{\text{ady.}}$
$\tan 28° = \dfrac{a}{15}$	Sustituye.	$\sec 28° = \dfrac{c}{15}$
$15(\tan 28°) = a$	Resuelve para hallar la variable.	$15\left(\dfrac{1}{\cos 28°}\right) = c$
$7.98 \approx a$	Usa una calculadora.	$16.99 \approx c$

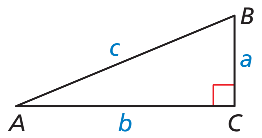
▶ Entonces, $B = 62°$, $a \approx 7.98$, y $c \approx 16.99$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

5. Halla el valor de x para el triángulo rectángulo que se muestra.





Resuelve $\triangle ABC$ usando el diagrama a la izquierda y las medidas dadas.

6. $B = 45°, c = 5$

7. $A = 32°, b = 10$

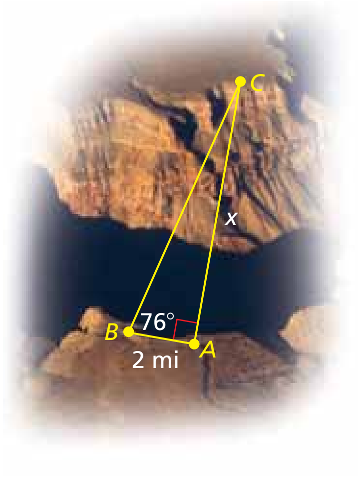
8. $A = 71°, c = 20$

9. $B = 60°, a = 7$

Resolver problemas de la vida real

EJEMPLO 5 Usar medidas indirectas

Haces una caminata cerca de un cañón. Al estar de pie en A, mides un ángulo de 90º entre B y C, tal como se muestra. Luego caminas a B y mides un ángulo de 76° entre A y C. La distancia entre A y B es de aproximadamente 2 millas. ¿Qué tan ancho es el cañón entre A y C?



HALLAR UN PUNTO DE ENTRADA

La función tangente se usa para hallar la distancia desconocida porque incluye la razón entre x y 2.

SOLUCIÓN

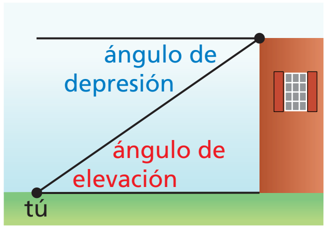
$$\tan 76° = \frac{x}{2}$$ Escribe la ecuación trigonométrica.

$$2(\tan 76°) = x$$ Multiplica cada lado por 2.

$$8.0 \approx x$$ Usa una calculadora.

▶ El ancho es de aproximadamente 8.0 millas.

Si miras a un punto sobre ti, como la parte más alta de un edificio, el ángulo que forma tu línea de visión con una línea paralela al suelo se denomina *ángulo de elevación*. En la parte más alta del edificio, el ángulo entre una línea paralela al suelo y tu línea de visión se denomina *ángulo de depresión*. Estos dos ángulos tienen la misma medida.

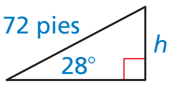


EJEMPLO 6 Usar un ángulo de elevación

Un parasailer está enganchado a un bote con una soga de 72 pies de largo. El ángulo de elevación del bote al parasailer es de 28°. Estima la altura del parasailer sobre el bote.

SOLUCIÓN

Paso 1 Dibuja un diagrama que represente la situación.



Paso 2 Escribe y resuelve una ecuación para hallar la altura h.

$$\text{sen } 28° = \frac{h}{72}$$ Escribe la ecuación trigonométrica.

$$72(\text{sen } 28°) = h$$ Multiplica cada lado por 72.

$$33.8 \approx h$$ Usa una calculadora.

▶ La altura del parasailer sobre el bote es de aproximadamente 33.8 pies.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

10. En el Ejemplo 5, halla la distancia entre B y C.

11. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 6, estima la altura del parasailer sobre el bote si el ángulo de elevación es de 38°.

9.1 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. COMPLETAR LA ORACIÓN En un triángulo rectángulo, las dos funciones trigonométricas de θ que están definidas usando las longitudes de la hipotenusa y el lado adyacente a θ son __________ y __________.

2. VOCABULARIO Compara un ángulo de elevación con un ángulo de depresión.

3. ESCRIBIR Explica lo que significa resolver un triángulo rectángulo.

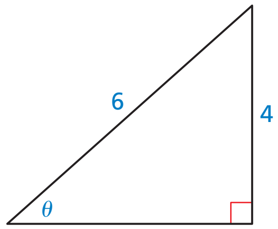
4. DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA ¿Cuál es diferente? Halla “ambas” respuestas.

¿Cuál es la cosecante de θ?

¿Cuál es $\dfrac{1}{\text{sen } \theta}$?

¿Cuál es la razón entre el lado opuesto a θ y la hipotenusa?

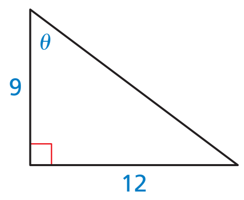
¿Cuál es la razón entre la hipotenusa y el lado opuesto a θ?



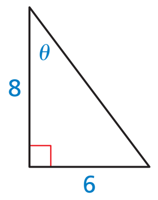
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–10, evalúa las seis funciones trigonométricas del ángulo θ. *(Consulta el Ejemplo 1).*

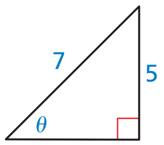
5.



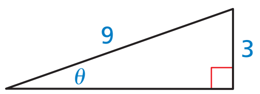
6.



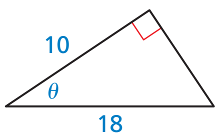
7.



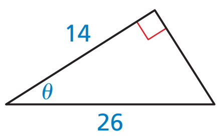
8.



9.



10.



11. RAZONAR Imagina que θ es un triángulo agudo de un triángulo recto. Usa las dos funciones trigonométricas $\tan \theta = \dfrac{4}{9}$ y $\sec \theta = \dfrac{\sqrt{97}}{9}$ para dibujar y rotular el triángulo rectángulo. Luego evalúa las otras cuatro funciones trigonométricas de θ.

12. ANALIZAR RELACIONES Evalúa las seis funciones trigonométricas del ángulo $90° - \theta$ en los Ejercicios 5–10. Describe las relaciones que observas.

En los Ejercicios 13–18, imagina que θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Evalúa las otras cinco funciones trigonométricas de θ. *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $\text{sen } \theta = \frac{7}{11}$

14. $\cos \theta = \frac{5}{12}$

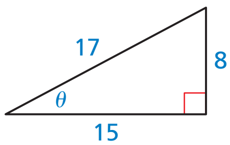
15. $\tan \theta = \frac{7}{6}$

16. $\csc \theta = \frac{15}{8}$

17. $\sec \theta = \frac{14}{9}$

18. $\cot \theta = \frac{16}{11}$

19. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar sen θ del triángulo siguiente.



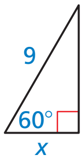
$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op.}}{\text{hip.}} = \frac{15}{17}$$

20. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar csc θ, dado que θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\cos \theta = \frac{7}{11}$.

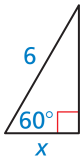
$$\csc \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{11}{7}$$

En los Ejercicios 21–26, halla el valor de *x* del triángulo rectángulo. *(Consulta el Ejemplo 3).*

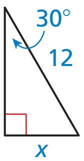
21.



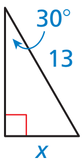
22.



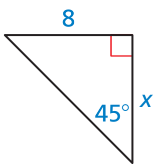
23.



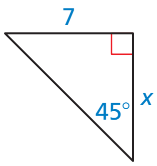
24.



25.



26.



USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 27–32, evalúa la función trigonométrica usando una calculadora. Redondea tu respuesta a 4 lugares decimales.

27. cos 14°

28. tan 31°

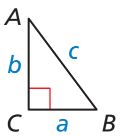
29. csc 59°

30. sen 23°

31. cot 6°

32. sec 11°

En los Ejercicios 33–40, resuelve $\triangle ABC$ usando el diagrama y las medidas dadas. *(Consulta el Ejemplo 4).*



33. $B = 36°, a = 23$

34. $A = 27°, b = 9$

35. $A = 55°, a = 17$

36. $B = 16°, b = 14$

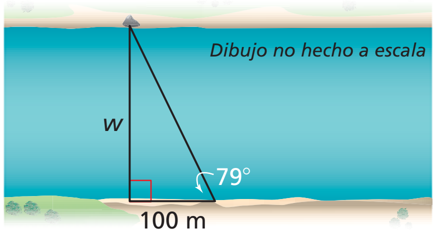
37. $A = 43°, b = 31$

38. $B = 31°, a = 23$

39. $B = 72°, c = 12.8$

40. $A = 64°, a = 7.4$

41. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Para medir el ancho de un río, plantas una estaca en un lado del río, directamente frente a una roca. Luego caminas 100 metros a la derecha de la estaca y mides un ángulo de 79° entre la estaca y la roca. ¿Cuál es el ancho *w* del río? *(Consulta el Ejemplo 5).*

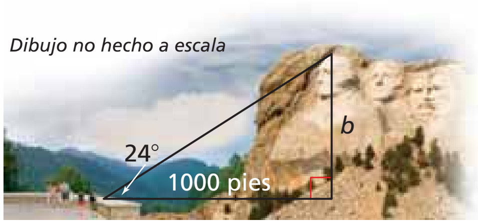


42. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS El ferrocarril turístico Katoomba en Australia tiene la vía ferroviaria más empinada del mundo. La vía ferroviaria forma un ángulo de aproximadamente 52º con el suelo. Los rieles se extienden horizontalmente aproximadamente 458 pies. ¿Cuál es la altura de la vía ferroviaria?

43. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Una persona cuyo nivel de los ojos es 1.5 metros sobre el suelo está de pie a 75 metros de la base del Edificio Jin Mao en Shanghái, China. La persona estima que el ángulo de elevación hasta la parte más alta del edificio es de aproximadamente 80º. ¿Cuál es la altura aproximada del edificio? *(Consulta el Ejemplo 6).*

44. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La pendiente Duquesne, en Pittsburgh, Pensilvania, tiene un ángulo de elevación de 30º. La vía férrea tiene una longitud de aproximadamente 800 pies. Halla la altura de la pendiente.

45. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Estás de pie en el mirador de la Terraza Grand View en el Monte Rushmore, a 1000 pies de la base del monumento.

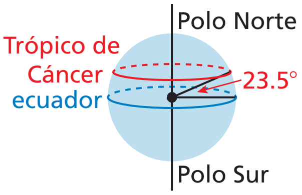


a. Miras hacia la cima del Monte Rushmore en un ángulo de 24º. ¿Qué tan alta está la cima del monumento desde donde estás parado? Presupón que tu nivel de los ojos está a 5.5 pies sobre el mirador.

b. La elevación de la Terraza Grand View es de 5280 pies. Usa tu respuesta de la parte (a) para hallar la elevación de la cima del Monte Rushmore.

46. ESCRIBIR Escribe un problema de la vida real que se pueda resolver usando un triángulo rectángulo. Luego resuelve tu problema.

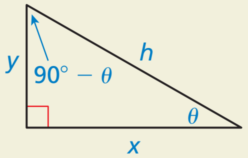
47. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** El Trópico de Cáncer es el círculo de latitud más hacia el norte del ecuador donde el sol puede brillar desde el cénit. Está situado a 23.5° al norte del ecuador, tal como se muestra.



a. Halla la circunferencia del Trópico de Cáncer usando 3960 millas como el radio aproximado de la Tierra.

b. ¿Cuál es la distancia entre dos puntos en el Trópico de Cáncer que están situados directamente uno frente al otro?

48. **¿CÓMO LO VES?** Usa la figura para contestar cada pregunta.

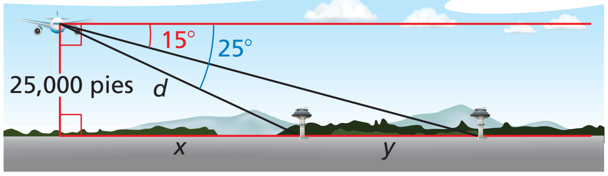


a. ¿Qué lado es adyacente a θ?

b. ¿Qué lado es el opuesto de θ?

c. ¿$\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$? Explica.

49. **RESOLVER PROBLEMAS** Un pasajero en un avión ve dos pueblos directamente a la izquierda del avión.



a. ¿Cuál es la distancia d del avión al primer pueblo?

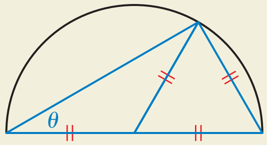
b. ¿Cuál es la distancia horizontal x del avión al primer pueblo?

c. ¿Cuál es la distancia y entre los dos pueblos? Explica el proceso que usaste para hallar tu respuesta.

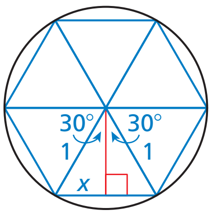
50. **RESOLVER PROBLEMAS** Mides el ángulo de elevación desde el suelo hasta la parte más alta de un edificio y la medición da 32°. Si te mueves 50 metros más cerca del edificio, el ángulo de elevación es 53°. ¿Cuál es la altura del edificio?

51. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que es posible dibujar un triángulo rectángulo de manera que los valores de la función coseno de los ángulos agudos sean iguales. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

52. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Considera un semicírculo con un radio de 1 unidad, tal como se muestra a continuación. Escribe los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ. Explica tu razonamiento.



53. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Un procedimiento para aproximar π basado en la obra de Arquímedes es inscribir un hexágono regular en un círculo.



a. Usa el diagrama para resolver x. ¿Cuál es el perímetro del hexágono?

b. Demuestra que un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio 1 tiene un perímetro de

$$2n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}.$$

c. Usa el resultado en la parte (b) para hallar una expresión en términos de n que se aproxime a π. Luego evalúa la expresión cuando $n = 50$.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Haz la conversión indicada. *(Manual de revisión de destrezas)*

54. 5 años a segundos

55. 12 pintas a galones

56. 5.6 metros a milímetros.

Halla la circunferencia y el área del círculo con el radio o diámetro dado. *(Manual de revisión de destrezas)*

57. $r = 6$ centímetros

58. $r = 11$ pulgadas

59. $d = 14$ pies

9.2 Ángulos y medida radián

Pregunta esencial

¿Cómo puedes hallar la medida de un ángulo en radianes?

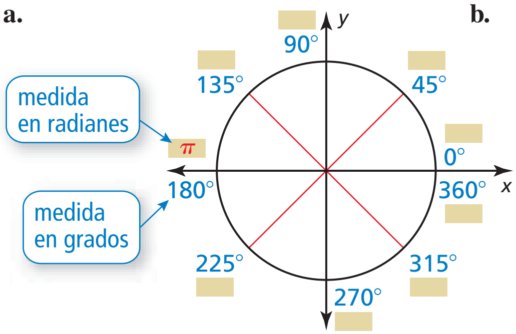
Imagina que el vértice de un ángulo está en el origen, con un lado del ángulo en el eje x positivo. La *medida radián* del ángulo es una medida de la longitud del arco intersecado en un círculo de radio 1. Para convertir grados a medida en radianes, usa el hecho de que

$$\frac{\pi \text{ radians}}{180^\circ} = 1.$$

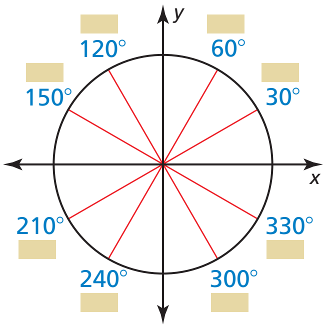
EXPLORACIÓN 1 Escribir medidas de ángulos en radianes

Trabaja con un compañero. Escribe la medida en radianes de cada ángulo con la medida en grados dada. Explica tu razonamiento.

a.

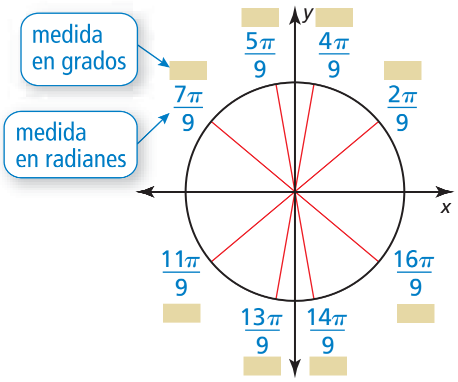


b.



EXPLORACIÓN 2 Escribir medidas de ángulos en grados

Trabaja con un compañero. Escribe la medida en grados de cada ángulo con la medida en radianes dada. Explica tu razonamiento.



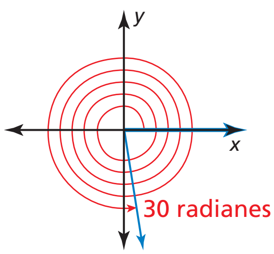
RAZONAR DE MANERA ABSTRACTA

Para dominar las matemáticas, necesitas darle sentido a las cantidades y sus relaciones en situaciones y problemas.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes hallar la medida de un ángulo en radianes?

4. La figura muestra un ángulo cuya medida es de 30 radianes. ¿Cuál es la medida del ángulo en grados? ¿Cuántas veces mayor es 30 radianes que 30 grados? Justifica tus respuestas.



9.2 Lección

Vocabulario Esencial

lado inicial, *pág. 470*
lado terminal, *pág. 470*
posición estándar, *pág. 470*
coterminal, *pág. 471*
radián, *pág. 471*
sector, *pág. 472*
ángulo central, *pág. 472*

Anterior
radio de un círculo
circunferencia de un círculo

Qué aprenderás

- Dibujar ángulos en posición estándar.
- Hallar ángulos coterminales.
- Usar la medida en radianes.

Dibujar ángulos en posición estándar

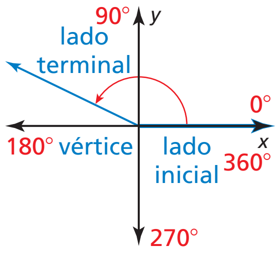
En esta lección, desarrollarás tu estudio de los ángulos para incluir ángulos con medidas que puedan ser cualquier número real.

Concepto Esencial

Ángulos en posición estándar

En un plano de coordenadas, un ángulo se puede formar fijando un rayo, denominado el **lado inicial**, y rotando el otro rayo, denominado el **lado terminal**, alrededor del vértice.

Un ángulo está en **posición estándar** cuando su vértice está en el origen y su lado inicial pertenece al eje x positivo.



La medida de un ángulo es positiva cuando la rotación de su lado terminal es en sentido contrario a las manecillas del reloj y es negativa cuando la rotación es en sentido de las manecillas del reloj. El lado terminal de un ángulo puede rotar más de 360°.

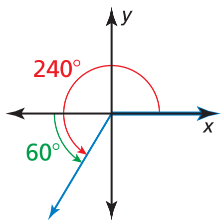
EJEMPLO 1 Dibujar ángulos en posición estándar

Dibuja un ángulo con la medida dada en posición estándar.

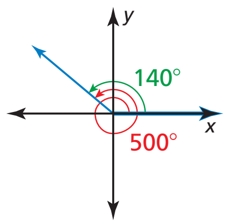
a. 240° **b.** 500° **c.** −50°

SOLUCIÓN

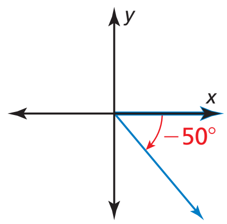
a. Dado que 240° está a 60° más que 180°, el lado terminal está a 60° en sentido contrario a las manecillas del reloj pasado el eje x negativo.



b. Dado que 500° está a 140° más que 360°, el lado terminal hace una rotación completa de 360° en sentido contrario a las manecillas del reloj más 140° adicionales.



c. Dado que −50° es negativo, el lado terminal está a 50° en sentido de las manecillas del reloj del eje x positivo.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Dibuja un ángulo con la medida dada en posición estándar.

1. 65° **2.** 300° **3.** −120° **4.** −450°

Hallar ángulos coterminales

En el Ejemplo 1(b), los ángulos 500° y 400° son **coterminales** porque sus lados terminales coinciden. Un ángulo coterminal con un ángulo dado se puede hallar sumando o restando múltiplos de 360°.

CONSEJO DE ESTUDIO

Si la diferencia de dos ángulos es un múltiplo de 360°, entonces los ángulos son coterminales.

EJEMPLO 2 **Hallar ángulos coterminales**

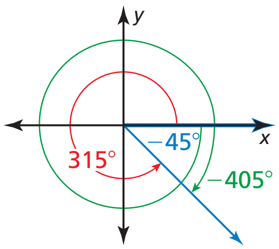
Halla un ángulo positivo y un ángulo negativo que sean coterminales con (a) $-45°$ y (b) 395°.

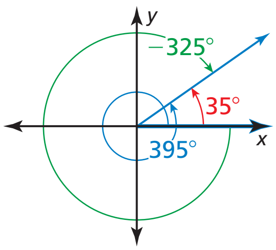
SOLUCIÓN

Hay muchos ángulos con esas características, dependiendo de qué múltiplo de 360° se sume o se reste.

a. $-45° + 360° = 315°$
$-45° - 360° = -405°$

b. $395° - 360° = 35°$
$395° - 2(360°) = -325°$





Monitoreo del progreso

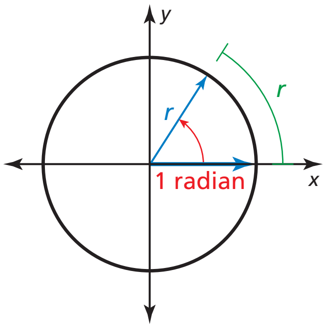
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla un ángulo positivo y un ángulo negativo que sean coterminales con el ángulo dado.

5. 80°   **6.** 230°   **7.** 740°   **8.** $-135°$

Usar la medida en radianes

Los ángulos también se pueden medir en *radianes*. Para definir un radián, considera un círculo de radio r centrado en el origen, tal como se muestra. Un **radián** es la medida de un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal interseca un arco de longitud r.



Dado que la circunferencia de un círculo es de $2\pi r$, hay 2π radianes en un círculo completo. Entonces, la medida en grados y la medida en radianes están relacionadas por la ecuación $360° = 2\pi$ radianes, o $180° = \pi$ radianes.

CONSEJO DE ESTUDIO

Nota que 1 radián equivale aproximadamente a 57.3°.

$180° = \pi$ radianes

$\frac{180°}{\pi} = 1$ radian

$57.3° \approx 1$ radian

Concepto Esencial

Convertir entre grados y radianes

Grados a radianes

Multiplica la medida en grados por

$$\frac{\pi \text{ radianes}}{180°}.$$

Radianes a grados

Multiplica la medida en radianes por

$$\frac{180°}{\pi \text{ radianes}}.$$

EJEMPLO 3 Convertir entre grados y radianes

Convierte la medida en grados a radianes o la medida en radianes a grados.

a. $120°$ **b.** $-\dfrac{\pi}{12}$

LEER

La unidad "radianes" a menudo se omite. Por ejemplo, la medida $-\dfrac{\pi}{12}$ radianes se puede escribir simplemente como $-\dfrac{\pi}{12}$.

SOLUCIÓN

a. $$120° = 120 \cancel{\text{grados}}\left(\frac{\pi \text{ radianes}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

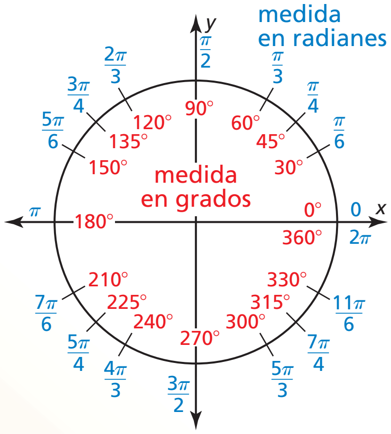
b. $$-\frac{\pi}{12} = \left(-\frac{\pi}{12} \cancel{\text{radianes}}\right)\left(\frac{180°}{\pi \cancel{\text{radianes}}}\right) = -15°$$

Resumen de conceptos

Medidas en grados y radianes de ángulos especiales

El diagrama muestra medidas equivalentes en grados y radianes para ángulos especiales de 0° a 360° (0 radianes a 2π radianes).

Puede serte útil memorizar las medidas equivalentes en grados y radianes de los ángulos especiales en el primer cuadrante y para $90° = \dfrac{\pi}{2}$ radianes. Todos los otros ángulos especiales que se muestran son múltiplos de estos ángulos.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Convierte la medida en grados a radianes o la medida en radianes a grados.

9. $135°$ **10.** $-40°$ **11.** $\dfrac{5\pi}{4}$ **12.** -6.28

Un **sector** es una región de un círculo que está unida por dos radios y un arco del círculo. El **ángulo central** θ de un sector es el ángulo formado por los dos radios. Hay fórmulas simples para la longitud del arco y el área de un sector cuando el ángulo central se mide en radianes.

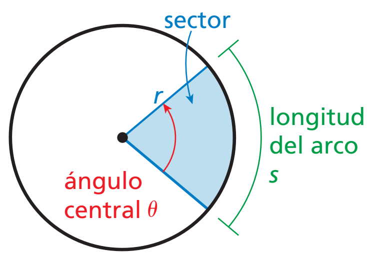
Concepto Esencial

Longitud del arco y área de un sector

La longitud del arco s y el área A de un sector con radio r y ángulo central θ (medido en radianes) son las siguientes.

Longitud del arco: $s = r\theta$

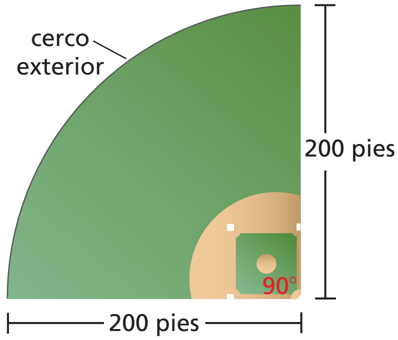
Área: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$



EJEMPLO 4 **Representar con matemáticas**

Un campo de sóftbol forma un sector con las dimensiones que se muestran. Halla la longitud del cerco exterior y del área del campo de juego.

SOLUCIÓN



1. **Comprende el problema** Te dan las dimensiones de un campo de sóftbol. Te piden hallar la longitud del cerco exterior y el área del campo de juego.

2. **Haz un plan** Halla la medida del ángulo central en radianes. Luego usa las fórmulas de longitud de arco y de área de un sector.

3. **Resuelve el problema**

Paso 1 Convierte la medida del ángulo central a radianes.

$$90^\circ = 90 \cancel{\text{grados}}\left(\frac{\pi \text{ radianes}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

Paso 2 Halla la longitud del arco y el área del sector.

Longitudes del arco: $s = r\theta$

$$= 200\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 100\pi$$
$$\approx 314$$

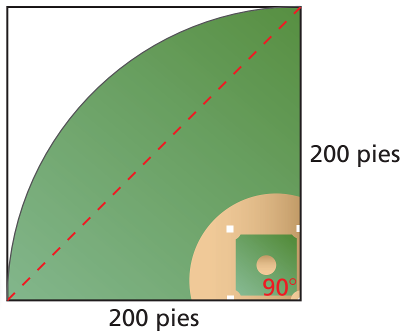
Área: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

$$= \frac{1}{2}(200)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 10{,}000\pi$$
$$\approx 31{,}416$$

La longitud del cerco exterior es de aproximadamente 314 pies. El área del campo es de aproximadamente 31,416 pies cuadrados.

4. **Verifícalo** Para verificar el área del campo, considera el cuadrado que se forma usando los dos lados de 200 pies.

Al dibujar la diagonal, puedes ver que el área del campo es menor que el área del cuadrado pero mayor que la mitad del área del cuadrado.



$\frac{1}{2}$ • (área del cuadrado)

área del cuadrado

$$\frac{1}{2}(200)^2 \overset{?}{<} 31{,}416 \overset{?}{<} 200^2$$

$$20{,}000 < 31{,}416 < 40{,}000 \checkmark$$

ERROR COMÚN

Debes escribir la medida de un ángulo en radianes cuando uses estas fórmulas para la longitud de arco y el área de un sector.

OTRA MANERA

Dado que el ángulo central es 90°, el sector representa $\frac{1}{4}$ de un círculo con un radio de 200 pies. Entonces,

$$s = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi(200)$$
$$= 100\pi$$

y

$$A = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi(200)^2$$
$$= 10{,}000\pi.$$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

13. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 4, el cerco exterior está a 220 pies de la base del bateador. Estima la longitud del cerco exterior y el área del campo de juego.

9.2 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Un ángulo está en posición estándar cuando su vértice está en el __________ y su __________ pertenece al eje x positivo.

2. **ESCRIBIR** Explica cómo el signo de la medida de un ángulo determina su dirección de rotación.

3. **VOCABULARIO** En tus propias palabras, define un radián.

4. **¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Qué ángulo *no* pertenece al grupo de los otros tres? Explica.

$-90°$	$450°$	$90°$	$-270°$

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–8, dibuja un ángulo con las medidas dadas en posición estándar. *(Consulta el Ejemplo 1).*

5. $110°$
6. $450°$
7. $-900°$
8. $-10°$

En los Ejercicios 9–12, halla un ángulo positivo y un ángulo negativo que sean coterminales con el ángulo dado. *(Consulta el Ejemplo 2).*

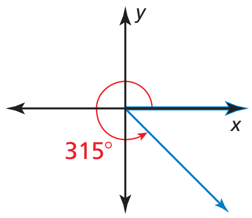
9. $70°$
10. $255°$
11. $-125°$
12. $-800°$

En los Ejercicios 13–20, convierte la medida en grados a radianes o la medida en radianes a grados. *(Consulta el Ejemplo 3).*

13. $40°$
14. $315°$
15. $-260°$
16. $-500°$
17. $\frac{\pi}{9}$
18. $\frac{3\pi}{4}$
19. -5
20. 12

21. **ESCRIBIR** El lado terminal de un ángulo en posición estándar rota un sexto de una revolución en sentido antihorario del eje x positivo. Describe cómo hallar la medida del ángulo en grados y radianes.

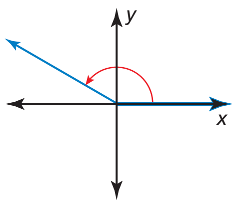
22. **FINAL ABIERTO** Usando la medida en radianes, da un ángulo positivo y un ángulo negativo que sean coterminales con el ángulo que se muestra. Justifica tus respuestas.



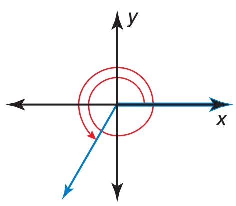
ANALIZAR RELACIONES En los Ejercicios 23–26, une la medida del ángulo con el ángulo.

23. $600°$
24. $-\frac{9\pi}{4}$
25. $\frac{5\pi}{6}$
26. $-240°$

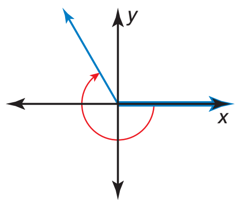
A.



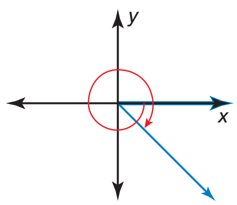
B.



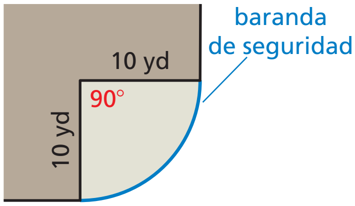
C.



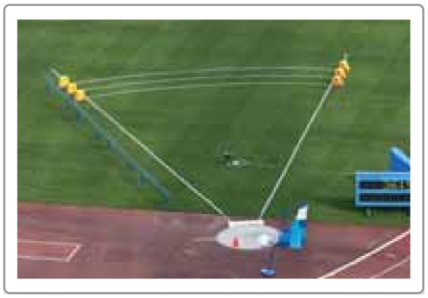
D.



27. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La terraza de observación de un edificio forma un sector con las dimensiones que se muestran. Halla la longitud de la baranda de seguridad y el área de la terraza. *(Consulta el Ejemplo 4).*



28. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS En la competencia masculina de lanzamiento de bala de los Juegos Olímpicos de Verano de 2012, la longitud del lanzamiento ganador fue 21.89 metros. El lanzamiento de la bala debe caer dentro de un sector que tenga un ángulo central de 34.92° para ser considerado válido.



a. Los encargados dibujan un arco a través del área de la zona de caída, marcando el tiro más lejano. Halla la longitud del arco.

b. Todos los tiros válidos de las olimpiadas de 2012 cayeron dentro de un sector delimitado por el arco de la parte (a). ¿Cuál es el área de este sector?

29. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al convertir la medida en grados a radianes.

$$24° = 24\,\cancel{\text{grados}}\left(\frac{180\,\cancel{\text{grados}}}{\pi\ \text{radianes}}\right)$$
$$= \frac{4320}{\pi}\ \text{radianes}$$
$$\approx 1375.1\ \text{radianes}$$

30. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar el área de un sector con un radio de 6 centímetros y un ángulo central de 40°.

$$A = \frac{1}{2}(6)^2(40) = 720\ \text{cm}^2$$

31. RESOLVER PROBLEMAS Si un tocadiscos CD lee información desde el borde exterior de un CD, el CD gira aproximadamente a 200 revoluciones por minuto. A esa velocidad, ¿por qué ángulo gira un punto en el CD en un minuto? Da tu respuesta tanto en medidas en grados como en radianes.

32. RESOLVER PROBLEMAS Trabajas cada sábado de 9:00 A.M. a 5:00 P.M. Dibuja un diagrama que muestre la rotación completada por la manecilla de la hora de un reloj durante ese tiempo. Halla la medida del ángulo generado por la manecilla de la hora tanto en grados como en radianes. Compara este ángulo con el ángulo generado por el minutero desde las 9:00 A.M. hasta las 5:00 P.M.

USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 33–38, usa una calculadora para evaluar la función trigonométrica.

33. $\cos \frac{4\pi}{3}$

34. $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{8}$

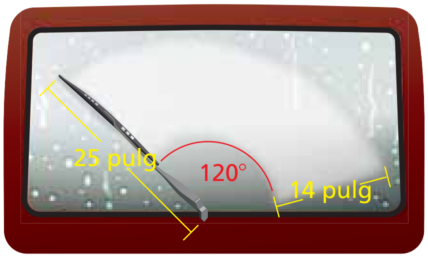
35. $\csc \frac{10\pi}{11}$

36. $\cot\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$

37. $\cot(-14)$

38. $\cos 6$

39. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS El limpiaparabrisas trasero de un carro rota 120°, tal como se muestra. Halla el área limpiada por la pluma.



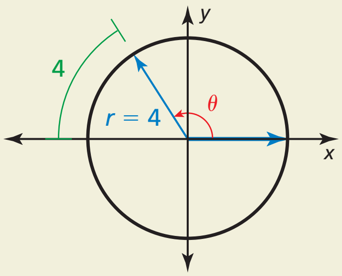
40. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Un científico llevó a cabo un experimento para estudiar los efectos de la fuerza de gravedad en los seres humanos. Para que los humanos experimentaran el doble de la gravedad de la Tierra, se les ubicó en una centrífuga de 58 pies de largo y se les hizo girar a una velocidad de 15 revoluciones por minuto.

a. ¿Por cuántos radianes rotaron las personas cada segundo?

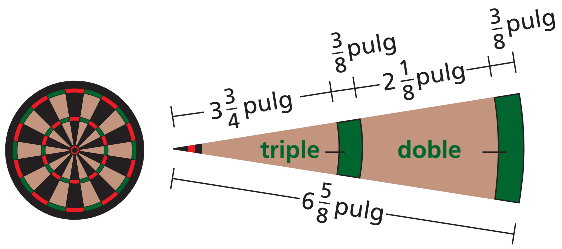
b. Halla la longitud del arco por el cual las personas rotaron cada segundo.

41. **RAZONAR** En astronomía, el *terminador* es la línea que separa el día de la noche en un planeta, que divide el planeta en regiones de día y regiones de noche. El terminador se mueve por la superficie de un planeta en la medida en que el planeta rota. El terminador de la Tierra necesita aproximadamente 4 horas para cruzar los Estados Unidos continentales. ¿Por qué ángulo ha rotado la Tierra durante este tiempo? Da tu respuesta en medidas en grados y en radianes.

42. **¿CÓMO LO VES?** Usa la gráfica para hallar la medida de θ. Explica tu razonamiento.



43. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un tablero de dardos está dividido en 20 sectores. Cada sector tiene un valor en puntaje de 1 a 20 y tiene regiones sombreadas que duplican o triplican este valor. A continuación se muestra un sector. Halla las áreas del sector completo, de la región que duplica el puntaje y de la región que lo triplica.



44. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** π es un número irracional, lo que significa que no se puede escribir como la razón de dos números enteros. Sin embargo, π se puede escribir exactamente como una *fracción continua*, de la siguiente manera.

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}$$

Demuestra cómo usar esta fracción continua para obtener una aproximación decimal de π.

45. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que cuando la longitud del arco de un sector es igual al radio, el área se puede dar mediante $A = \frac{s^2}{2}$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica.

46. **RESOLVER PROBLEMAS** Una escalera en espiral tiene 15 escalones. Cada escalón es un sector con un radio de 42 pulgadas y un ángulo central de $\frac{\pi}{8}$.

a. ¿Cuál es la longitud del arco formado por el borde exterior del escalón?

b. ¿Por qué ángulo rotarías al subir las escaleras?

c. ¿Cuántas pulgadas cuadradas de alfombra necesitarías para cubrir los 15 escalones?

47. **REPRESENTACIONES MÚLTIPLES** Hay 60 *minutos* en 1 grado de arco, y 60 *segundos* en 1 minuto de arco. La notación 50° 30′ 10″ representa un ángulo con una medida de 50 grados, 30 minutos y 10 segundos.

a. Escribe la medida del ángulo 70.55° usando la notación anterior.

b. Escribe la medida del ángulo 110° 45′ 30″ a la centésima de grado más cercana. Justifica tu respuesta.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla la distancia entre los dos puntos. *(Manual de revisión de destrezas)*

48. (1, 4), (3, 6)

49. (−7, −13), (10, 8)

50. (−3, 9), (−3, 16)

51. (2, 12), (8, −5)

52. (−14, −22), (−20, −32)

53. (4, 16), (−1, 34)

9.3 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Pregunta esencial

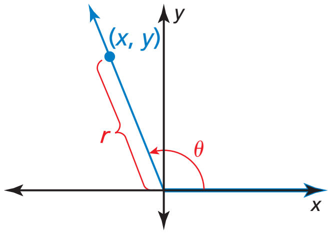
¿Cómo puedes usar el círculo unitario para definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo?

Imagina que θ es un ángulo en posición estándar con un punto (x, y) en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. Las seis funciones trigonométricas de θ están definidas tal como se muestra.

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} \qquad \csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$$

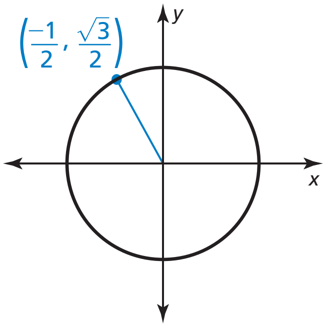
$$\tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$



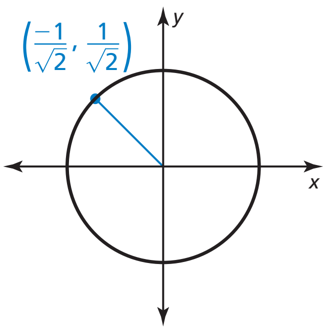
EXPLORACIÓN 1 **Escribir funciones trigonométricas**

Trabaja con un compañero. Halla el seno, coseno y la tangente del ángulo θ en posición estándar cuyo lado terminal interseca el círculo unitario en el punto (x, y) que se muestra.

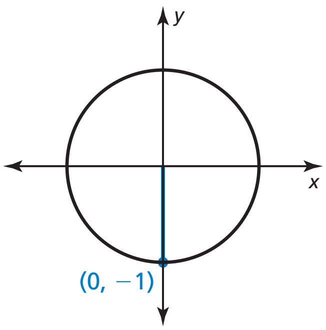
a.



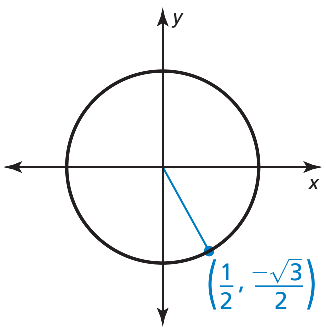
b.



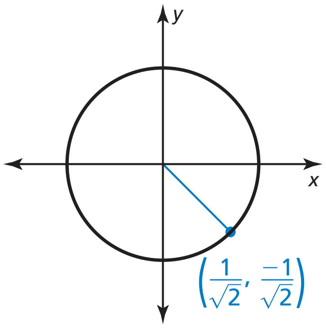
c.



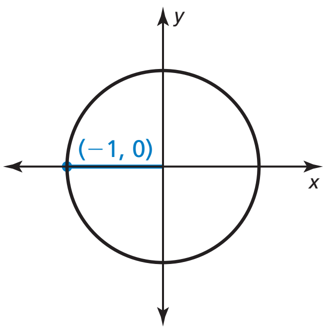
d.



e.



f.



CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas comprender y usar las suposiciones enunciadas y los resultados previamente establecidos.

Comunicar tu respuesta

2. ¿Cómo puedes usar el círculo unitario para definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo?

3. ¿Para qué ángulos son indefinidas cada una de las funciones? Explica tu razonamiento.

a. tangente **b.** cotangente **c.** secante **d.** cosecante

9.3 Lección

Vocabulario Esencial

círculo unitario, *pág. 479*
ángulo cuadrantal, *pág. 479*
ángulo de referencia, *pág. 480*

Anterior
círculo
radio
Teorema de Pitágoras

Qué aprenderás

- Evaluar funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
- Hallar y usar ángulos de referencia para evaluar funciones trigonométricas.

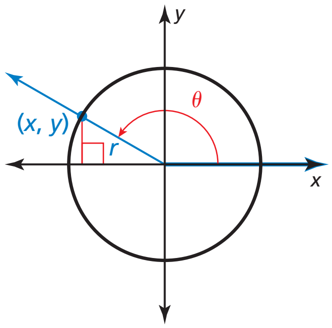
Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Puedes generalizar las definiciones del triángulo rectángulo de las funciones trigonométricas de manera que rijan para cualquier ángulo en posición estándar.

Concepto Esencial

Definiciones generales de las funciones trigonométricas

Imagina que θ es un ángulo en posición estándar y que (x, y) es el punto en el que el lado terminal de θ interseca el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Las seis funciones trigonométricas de θ se definen tal como se muestra.



$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} \qquad \csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

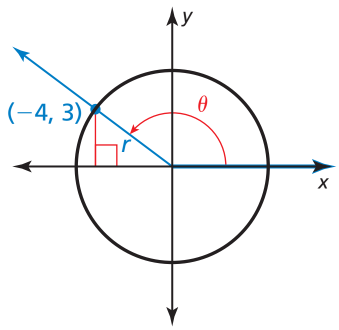
$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

Estas funciones a veces se denominan *funciones circulares*.

EJEMPLO 1 Evaluar funciones trigonométricas dado un punto

Imagina que $(-4, 3)$ es un punto en el lado terminal de un ángulo θ en posición estándar. Evalúa las seis funciones trigonométricas de θ.



SOLUCIÓN

Usa el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de r.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Usando $x = -4$, $y = 3$, y $r = 5$, los valores de las seis funciones trigonométricas de θ son:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5} \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{4}{5} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{5}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$$

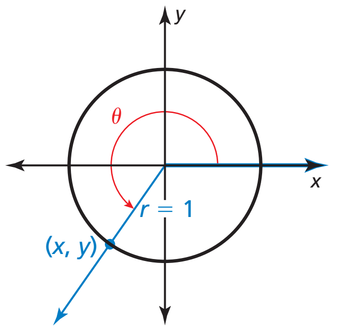
Concepto Esencial

El círculo unitario

El círculo $x^2 + y^2 = 1$, que tiene un centro (0, 0) y radio 1, se denomina **círculo unitario**. Los valores de sen θ y cos θ son simplemente la coordenada y y la coordenada x, respectivamente, del punto donde el lado terminal de θ interseca el círculo unitario.

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$



OTRA MANERA

El círculo general $x^2 + y^2 = r^2$ también se puede usar para hallar las seis funciones trigonométricas de θ. El lado terminal de θ interseca el círculo en $(0, -r)$. Entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1.$$

Las otras funciones se pueden evaluar en forma similar.

Es conveniente usar el círculo unitario para hallar las funciones trigonométricas de los **ángulos cuadrantales**. Un ángulo cuadrantal es un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal está situado en el eje. La medida de un ángulo cuadrantal es siempre un múltiplo de 90°, o $\frac{\pi}{2}$ radianes.

EJEMPLO 2 Usar el círculo unitario

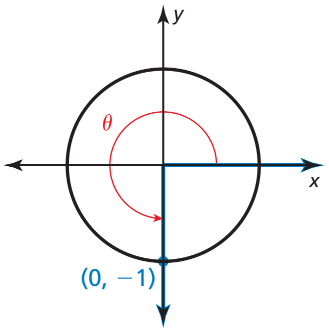
Usa el círculo unitario para evaluar las seis funciones trigonométricas de $\theta = 270°$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Dibuja un círculo unitario con el ángulo $\theta = 270°$ en posición estándar.

Paso 2 Identifica el punto donde el lado terminal de θ interseca el círculo unitario. El lado terminal de θ interseca el círculo unitario en $(0, -1)$.

Paso 3 Halla los valores de las seis funciones trigonométricas. Imagina que $x = 0$ y $y = -1$ para evaluar las funciones trigonométricas.



$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} = \cancel{\frac{1}{0}} \quad \text{indefinido}$$

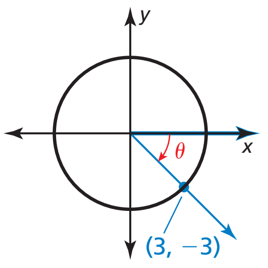
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cancel{\frac{-1}{0}} \quad \text{indefinido} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

Monitoreo del progreso

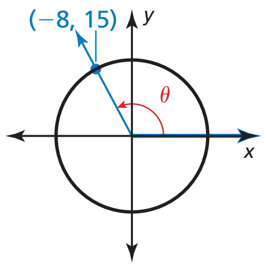
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Evalúa las seis funciones trigonométricas de θ.

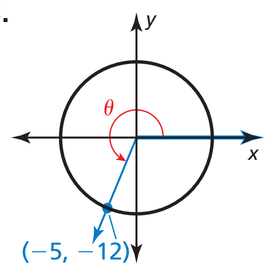
1.



2.



3.



4. Halla el círculo unitario para evaluar las seis funciones trigonométricas de $\theta = 180°$.

Ángulos de referencia

Concepto Esencial

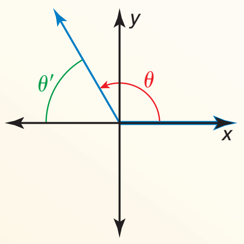
LEER

El símbolo θ' se lee “theta prima”.

Relaciones del ángulo de referencia

Imagina que θ es un ángulo en posición estándar. El **ángulo de referencia** para θ es el ángulo agudo θ' formado por el lado terminal de θ y el eje x. La relación entre θ y θ' se muestra a continuación para los ángulos no cuadrantales θ de tal manera que $90° < \theta < 360°$ o, en radianes, $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

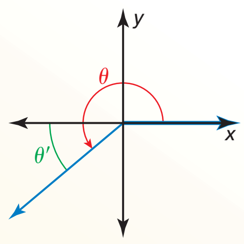
Cuadrante II



Grados: $\theta' = 180° - \theta$

Radianes: $\theta' = \pi - \theta$

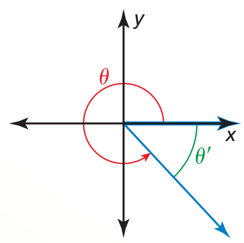
Cuadrante III



Grados: $\theta' = \theta - 180°$

Radianes: $\theta' = \theta - \pi$

Cuadrante IV



Grados: $\theta' = 360° - \theta$

Radianes: $\theta' = 2\pi - \theta$

EJEMPLO 3 **Hallar ángulos de referencia**

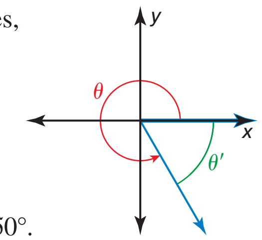
Halla el ángulo de referencia θ' para (a) $\theta = \frac{5\pi}{3}$ y (b) $\theta = -130°$.

SOLUCIÓN

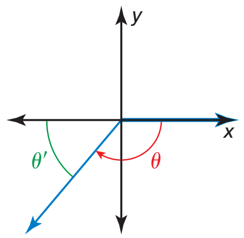
a. El lado terminal de θ pertenece al Cuadrante IV. Entonces,

$\theta' = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. La figura a la derecha muestra

$\theta = \frac{5\pi}{3}$ y $\theta' = \frac{\pi}{3}$.



b. Observa que θ es coterminal con 230°, cuyo lado terminal pertenece al Cuadrante III. Entonces, $\theta' = 230° - 180° = 50°$. La figura a la izquierda muestra $\theta = -130°$ y $\theta' = 50°$.



Los ángulos de referencia te permiten evaluar una función trigonométrica para cualquier ángulo θ. El signo del valor de la función trigonométrica depende del cuadrante al que pertenezca θ.

Conceptos Esenciales

Evaluar funciones trigonométricas

Usa estos pasos para evaluar una función trigonométrica para cualquier ángulo θ:

Paso 1 Halla el ángulo de referencia θ'.

Paso 2 Evalúa la función trigonométrica para θ'.

Paso 3 Determina el signo del valor de la función trigonométrica desde el cuadrante al que pertenece θ.

Signos del valor de la función

Cuadrante II	Cuadrante I
sen θ, csc θ: +	sen θ, csc θ: +
cos θ, sec θ: −	cos θ, sec θ: +
tan θ, cot θ: −	tan θ, cot θ: +
Cuadrante III	**Cuadrante IV**
sen θ, csc θ: −	sen θ, csc θ: −
cos θ, sec θ: −	cos θ, sec θ: +
tan θ, cot θ: +	tan θ, cot θ: −

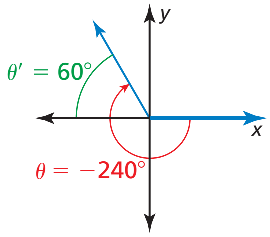
EJEMPLO 4 Usar ángulos de referencia para evaluar funciones

Evalúa (a) $\tan(-240°)$ y (b) $\csc \dfrac{17\pi}{6}$.

SOLUCIÓN

a. El ángulo $-240°$ es coterminal con $120°$. El ángulo de referencia es $\theta' = 180° - 120° = 60°$. La función tangente es negativa en el Cuadrante II, entonces

$$\tan(-240°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

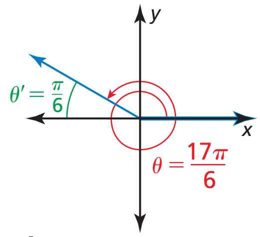


b. El ángulo $\dfrac{17\pi}{6}$ es coterminal con $\dfrac{5\pi}{6}$. El ángulo de referencia es

$$\theta' = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

La función cosecante es positiva en el Cuadrante II, entonces

$$\csc \frac{17\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6} = 2.$$



INTERPRETAR LOS MODELOS

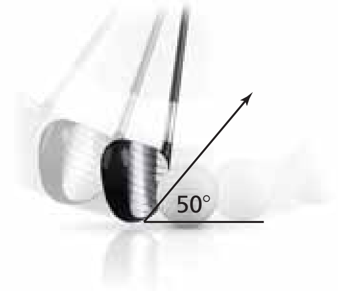
Este modelo deja de lado la resistencia del aire y presupone que las alturas inicial y final del proyectil son iguales.

EJEMPLO 5 Resolver problemas de la vida real

La distancia horizontal d (en pies) recorrida por un proyectil lanzado en un ángulo θ y con una velocidad inicial y (en pies por segundo) está dada por

$$d = \frac{v^2}{32} \text{ sen } 2\theta. \qquad \text{Modelo para la distancia horizontal}$$

Estima la distancia horizontal recorrida por una pelota de golf golpeada en un ángulo de $50°$ con una velocidad inicial de 105 pies por segundo.



SOLUCIÓN

Observa que la pelota de golf es lanzada en un ángulo de $\theta = 50°$ con una velocidad inicial de $v = 105$ pies por segundo.

$$d = \frac{v^2}{32} \text{ sen } 2\theta \qquad \text{Escribe un modelo para la distancia horizontal.}$$

$$= \frac{105^2}{32} \text{ sen}(2 \cdot 50°) \qquad \text{Sustituye 105 por } v \text{ y } 50° \text{ por } \theta.$$

$$\approx 339 \qquad \text{Usa una calculadora.}$$

▶ La pelota de golf recorre una distancia horizontal de aproximadamente 339 pies.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Dibuja el ángulo. Luego halla su ángulo de referencia.

5. $210°$ **6.** $-260°$ **7.** $\dfrac{-7\pi}{9}$ **8.** $\dfrac{15\pi}{4}$

Evalúa la función sin usar una calculadora.

9. $\cos(-210°)$ **10.** $\sec \dfrac{11\pi}{4}$

11. Usa el modelo dado en el Ejemplo 5 para estimar la distancia horizontal recorrida por un atleta de salto largo que salta en un ángulo de $20°$ y con una velocidad inicial de 27 pies por segundo.

 Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

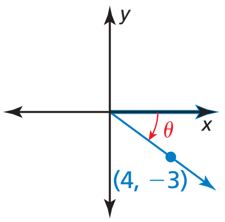
Verificación de vocabulario y concepto esencial

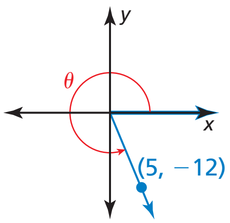
1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Un ___________ es un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal está situado en un eje.

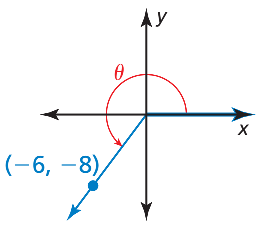
2. **ESCRIBIR** Dado un ángulo θ en posición estándar con su lado terminal en el Cuadrante III, explica cómo puedes usar un ángulo de referencia para hallar cos θ.

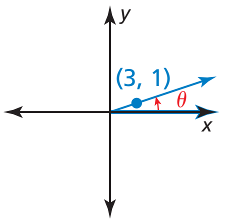
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

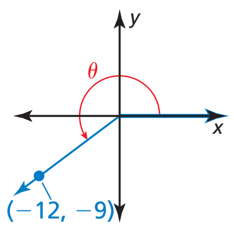
En los Ejercicios 3–8, evalúa las seis funciones trigonométricas de θ. *(Consulta el Ejemplo 1).*

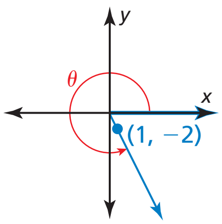
3.


4.


5.


6.


7.


8.


En los Ejercicios 9–14, usa el círculo unitario para evaluar las seis funciones trigonométricas de θ. *(Consulta el Ejemplo 2).*

9. $\theta = 0°$ **10.** $\theta = 540°$

11. $\theta = \frac{\pi}{2}$ **12.** $\theta = \frac{7\pi}{2}$

13. $\theta = -270°$ **14.** $\theta = -2\pi$

En los Ejercicios 15–22, dibuja el ángulo. Luego halla su ángulo de referencia. *(Consulta el Ejemplo 3).*

15. $-100°$ **16.** $150°$

17. $320°$ **18.** $-370°$

19. $\frac{15\pi}{4}$ **20.** $\frac{8\pi}{3}$

21. $-\frac{5\pi}{6}$ **22.** $-\frac{13\pi}{6}$

23. ANÁLISIS DE ERRORES Imagina que $(-3, 2)$ es un punto en el lado terminal de un ángulo θ en posición estándar. Describe y corrige el error cometido al hallar tan θ.

✗ $\tan\theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{2}$

24. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar el ángulo de referencia θ' para $\theta = 650°$.

✗ θ es coterminal con $290°$, cuyo lado terminal pertenece al Cuadrante IV.

Entonces, $\theta' = 290° - 270° = 20°$.

En los Ejercicios 25–32, evalúa la función sin usar una calculadora. *(Consulta el Ejemplo 4).*

25. sec $135°$ **26.** tan $240°$

27. sen$(-150°)$ **28.** csc$(-420°)$

29. $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **30.** $\cot\left(\frac{-8\pi}{3}\right)$

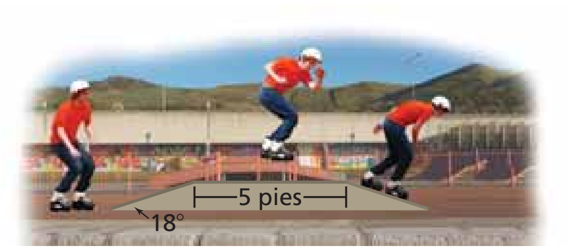
31. $\cos\frac{7\pi}{4}$ **32.** $\sec\frac{11\pi}{6}$

En los Ejercicios 33–36, usa el modelo para la distancia horizontal dado en el Ejemplo 5.

33. Pateas una pelota de futbol americano en un ángulo de 60° con una velocidad inicial de 49 pies por segundo. Estima la distancia horizontal recorrida por la pelota. *(Consulta el Ejemplo 5).*

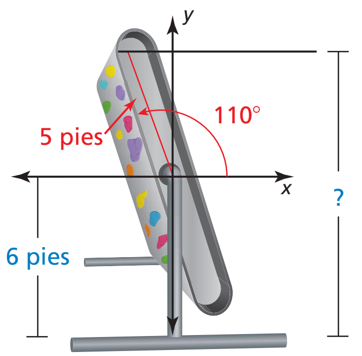
34. El “frogbot” es un robot diseñado para explorar terrenos difíciles en otros planetas. Puede saltar en un ángulo de 45° con una velocidad inicial de 14 pies por segundo. Estima la distancia horizontal que el frogbot puede saltar en la Tierra.

35. ¿A qué velocidad debe saltar de la rampa el patinador en línea para caer al otro lado de la rampa?



36. Para ganar una competencia de lanzamiento de jabalina, tu último lanzamiento debe recorrer una distancia horizontal de por lo menos 100 pies. Sueltas la jabalina en un ángulo de 40° con una velocidad inicial de 71 pies por segundo. ¿Ganas la competencia? Justifica tu respuesta.

37. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Un escalador usa una cinta para escalar de 10 metros de largo. El escalador comienza situándose horizontalmente en la cinta, que luego se rota alrededor de su punto medio 110°, de manera que el escalador escale hacia la cima. Si el punto medio de la cinta está a seis pies sobre el suelo, ¿a qué altura sobre el suelo está la parte superior de la cinta?



38. RAZONAR Una rueda de la fortuna tiene un radio de 75 pies. Subes a un carro en la base de la rueda de la fortuna, que está a 10 pies sobre el suelo, y rota a 255° en sentido contrario a las manecillas del reloj antes de que el juego se detenga temporalmente. ¿A qué altura sobre el suelo estás cuando se detiene el juego? Si el radio de la rueda de la fortuna se duplica, ¿se duplica tu altura sobre el suelo? Explica tu razonamiento.

39. SACAR CONCLUCIONES Se usa un aspersor a nivel del suelo para regar un jardín. El agua que sale del aspersor tiene una velocidad inicial de 25 pies por segundo.

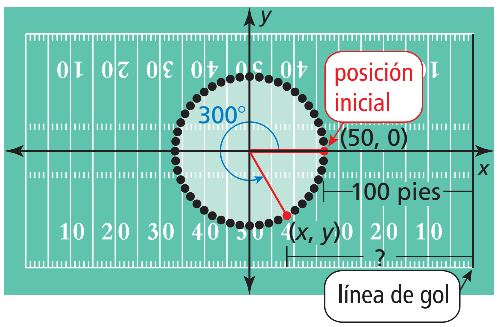
a. Usa el modelo para la distancia horizontal dado en el Ejemplo 5 para completar la tabla.

Ángulo del aspersor, θ	Distancia horizontal que recorre el agua, d
30°	
35°	
40°	
45°	
50°	
55°	
60°	

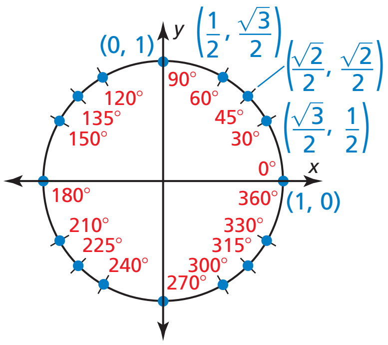
b. ¿Qué valor de θ parece maximizar la distancia horizontal recorrida por el agua? Usa el modelo para la distancia horizontal y el círculo unitario para explicar por qué tu respuesta tiene sentido.

c. Compara la distancia horizontal recorrida por el agua si $\theta = (45 - k)°$ con la distancia si $\theta = (45 + k)°$, para $0 < k < 45$.

40. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La banda escolar de tu escuela toca durante el medio tiempo de un juego de futbol americano. En la última formación, los miembros de la banda forman un círculo de 100 pies de ancho en el centro del campo. Comienzas en un punto del círculo a 100 pies de la línea de gol, marchas 300° alrededor del círculo y luego caminas hacia la línea de gol para salir del campo. ¿Qué tan lejos estás de la línea de gol en el punto en el que abandonas el círculo?



41. ANALIZAR RELACIONES Usa la simetría y la información dada para rotular las coordenadas de los otros puntos correspondientes a ángulos especiales en el círculo unitario.



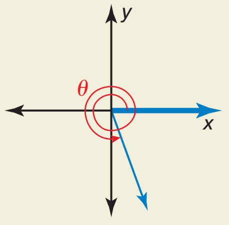
42. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Usa la herramienta del círculo unitario interactivo en *BigIdeasMath.com* para describir todos los valores de θ para cada situación.

a. sen $\theta > 0$, cos $\theta < 0$, y tan $\theta > 0$

b. sen $\theta > 0$, cos $\theta < 0$, y tan $\theta < 0$

43. PENSAMIENTO CRÍTICO Escribe tan θ como la razón de otras dos funciones trigonométricas. Usa esta razón para explicar por qué tan 90° es indefinida pero cot 90° = 0.

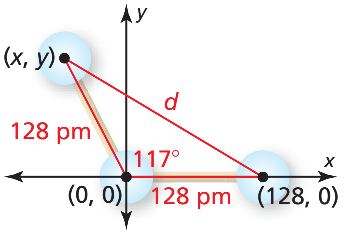
44. ¿CÓMO LO VES? Determina si cada una de las seis funciones trigonométricas de θ es *positiva*, *negativa* o *cero*. Explica tu razonamiento.



45. USAR LA ESTRUCTURA Una línea con pendiente m pasa a través del origen. Un ángulo θ en posición estándar tiene un lado terminal que coincide con la línea. Usa una función trigonométrica para relacionar la pendiente de la línea con el ángulo.

46. ARGUMENTAR Tu amigo dice que la única solución para la ecuación trigonométrica tan $\theta = \sqrt{3}$ es $\theta = 60°$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

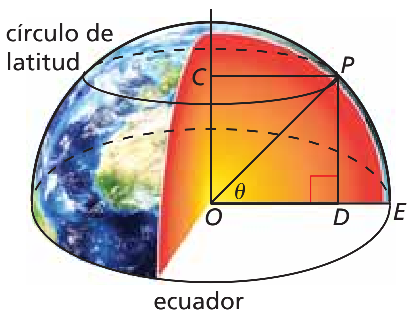
47. RESOLVER PROBLEMAS Si dos átomos en una molécula están enlazados a un átomo común, a los químicos les interesa tanto el ángulo del enlace como las longitudes de los enlaces. Una molécula de ozono está formada por dos átomos de oxígeno enlazados con un tercer átomo de oxígeno, tal como se muestra.



a. En el diagrama, las coordenadas están dadas en picómetros (pm). (*Nota*: 1 pm = 10^{-12} m). Halla las coordenadas (x, y) del centro del átomo de oxígeno en el Cuadrante II.

b. Halla la distancia d (en picómetros) entre los centros de los dos átomos de oxígeno no enlazados.

48. CONEXIONES MATEMÁTICAS La latitud de un punto en la Tierra es la medida en grados del arco más corto desde ese punto hasta el ecuador. Por ejemplo, la latitud del punto P en el diagrama es igual a la medida en grados del arco PE. ¿A qué latitud θ es la circunferencia del círculo de latitud en P la mitad de la distancia alrededor del ecuador?



Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla todos los ceros reales de la función polinomial. *(Sección 4.6)*

49. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$

50. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 14x^2 - 15x - 18$

Haz una gráfica de la función. *(Sección 4.8)*

51. $f(x) = 2(x + 3)^2(x - 1)$

52. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 4)(x + 5)(x + 9)$

53. $f(x) = x^2(x + 1)^3(x - 2)$

9.4 Hacer gráficas de las funciones seno y coseno

Pregunta esencial ¿Cuáles son las características de las gráficas de las funciones seno y coseno?

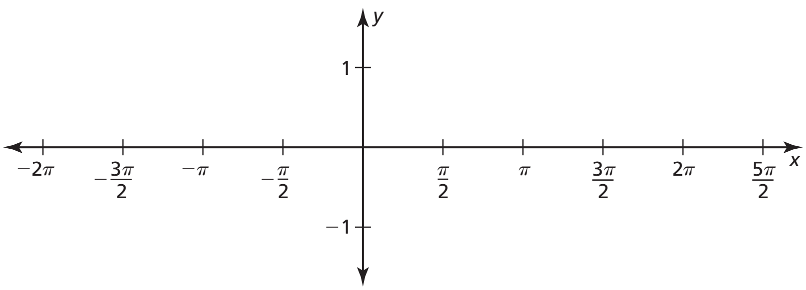
EXPLORACIÓN 1 Hacer una gráfica de la función seno

Trabaja con un compañero.

a. Completa la tabla para $y = \text{sen } x$, donde x es una medida de ángulo en radianes.

x	-2π	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
$y = \text{sen } x$									
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
$y = \text{sen } x$									

b. Marca los puntos (x, y) de la parte (a). Dibuja una curva suave por los puntos para dibujar la gráfica de $y = \text{sen } x$.



c. Usa la gráfica para identificar las intersecciones con el eje x, los valores de x donde ocurren las máximas y mínimas locales, y los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente sobre $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. ¿La función seno es *par*, *impar* o *ninguna* de las dos?

EXPLORACIÓN 2 Hacer una gráfica de la función coseno

Trabaja con un compañero.

a. Completa la tabla para $y = \cos x$ usando los mismos valores de x que los usados en la Exploración 1.

b. Marca los puntos (x, y) de la parte (a) y dibuja la gráfica de $y = \cos x$.

c. Usa la gráfica para identificar las intersecciones con el eje x, los valores de x donde ocurren las máximas y mínimas locales, y los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente sobre $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. ¿La función coseno es *par*, *impar* o *ninguna* de las dos?

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas, necesitas observar con atención para discernir un patrón o estructura.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cuáles son las características de las gráficas de las funciones seno y coseno?

4. Describe el comportamiento de los extremos de la gráfica de $y = \text{sen } x$.

9.4 Lección

Vocabulario Esencial

amplitud, *pág. 486*
función periódica, *pág. 486*
ciclo, *pág. 486*
periodo, *pág. 486*
desplazamiento de fase, *pág. 488*
línea media, *pág. 488*

Anterior
transformaciones
intersección con el eje *x*

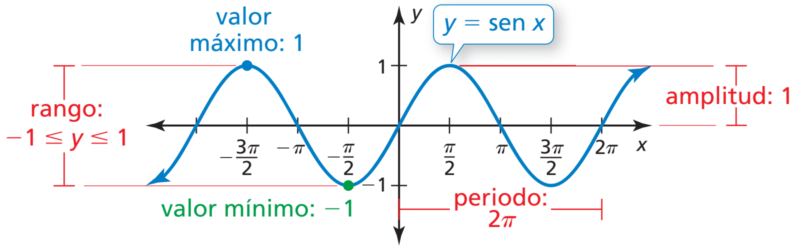
Qué aprenderás

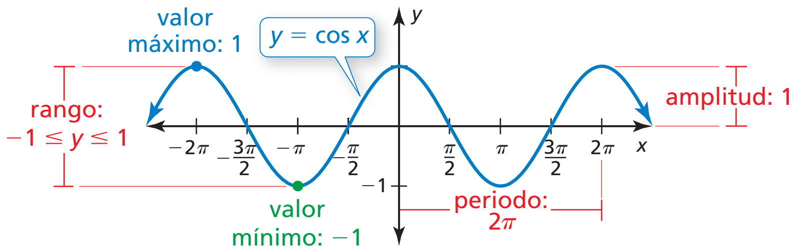
- Explorar las características de las funciones seno y coseno.
- Alargar y encoger gráficas de las funciones seno y coseno.
- Trasladar gráficas de las funciones seno y coseno.
- Reflejar gráficas de las funciones seno y coseno.

Explorar las características de las funciones seno y coseno

En esta lección aprenderás a hacer gráficas de las funciones seno y coseno. Las gráficas de las funciones seno y coseno están relacionadas con las gráficas de las funciones madre $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$, que se muestran a continuación.

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen } x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1





Concepto Esencial

Características de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$

- El dominio de cada función es todos los números reales.
- El rango de cada función es $-1 \leq y \leq 1$. Entonces, el valor mínimo de cada función es -1 y el valor máximo es 1.
- La **amplitud** de la gráfica de cada función es la mitad de la diferencia del valor máximo y el valor mínimo, o $\frac{1}{2}[1 - (-1)] = 1$.
- Cada función es **periódica**, lo que significa que su gráfica tiene un patrón que se repite. La porción periódica más corta de la gráfica se denomina **ciclo**. La longitud horizontal de cada ciclo se denomina **periodo**. Cada gráfica que se muestra arriba tiene un periodo de 2π.
- Las intersecciones con el eje x para $y = \text{sen } x$ ocurren si $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$.
- Las intersecciones con el eje y para $y = \cos x$ ocurren si $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$.

Alargar y encoger las funciones seno y coseno

Las gráficas de $y = a$ sen bx y $y = a \cos bx$ representan transformaciones de sus funciones madre. El valor de a indica un alargamiento vertical ($a > 1$) o un encogimiento vertical ($0 < a < 1$) y cambia la amplitud de la gráfica. El valor de b indica un alargamiento horizontal ($0 < b < 1$) o un encogimiento horizontal ($b > 1$) y cambia el periodo de la gráfica.

$$y = a \text{ sen } bx$$
$$y = a \cos bx$$

alargamiento o encogimiento vertical por un factor de a

alargamiento o encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{b}$

RECUERDA

La gráfica de $y = a \cdot f(x)$ es un alargamiento o encogimiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de a.

La gráfica de $y = f(bx)$ es un alargamiento o encogimiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de $\frac{1}{b}$.

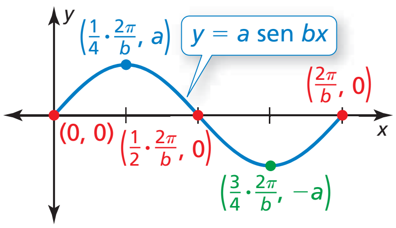
Concepto Esencial

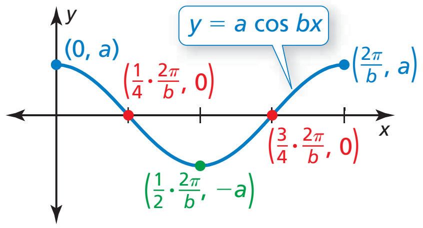
Amplitud y periodo

La amplitud y el periodo de las gráficas de $y = a$ sen bx y $y = a \cos bx$, donde a y b son números reales distintos de cero, son las siguientes:

$$\text{Amplitud} = |a| \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{|b|}$$

Cada gráfica a continuación muestra cinco puntos clave que hacen la partición del intervalo $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{|b|}$ en cuatro partes iguales. Puedes usar estos puntos para dibujar las gráficas de $y = a$ sen bx y $y = a \cos bx$. Las intersecciones con el eje x, el máximo y el mínimo ocurren en estos puntos.



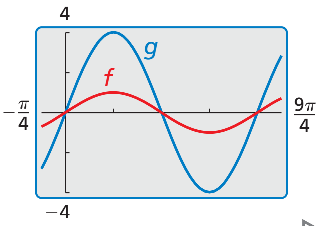


EJEMPLO 1 **Hacer una gráfica de la función seno**

Identifica la amplitud y el periodo de $g(x) = 4$ sen x. Luego haz una gráfica de la función y describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) =$ sen x.

RECUERDA

Un alargamiento vertical de una gráfica no cambia su(s) intersección(es) con el eje x. Entonces, tiene sentido que las intersecciones con el eje x de $g(x) = 4$ sen x y $f(x) =$ sen x sean iguales.



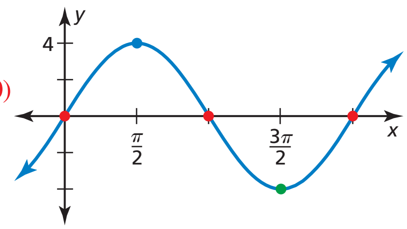
SOLUCIÓN

La función es de la forma $g(x) = a$ sen bx donde $a = 4$ y $b = 1$. Entonces, la amplitud es $a = 4$ y el periodo es $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Intersecciones: $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi, 0\right) = (\pi, 0)$; $(2\pi, 0)$

Máximo: $\left(\frac{1}{4} \cdot 2\pi, 4\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$

Mínimo: $\left(\frac{3}{4} \cdot 2\pi, -4\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, -4\right)$



▶ La gráfica de g es un alargamiento vertical por un factor de 4 de la gráfica de f.

EJEMPLO 2 Hacer una gráfica de la función coseno

Identifica la amplitud y el periodo de $g(x) = \frac{1}{2}\cos 2\pi x$. Luego haz la gráfica de la función y describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) = \cos x$.

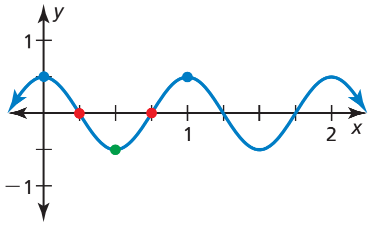
SOLUCIÓN

La función es de la forma $g(x) = a \cos bx$ donde $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2\pi$. Entonces, la amplitud es $a = \frac{1}{2}$ y el periodo es $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Intersecciones: $\left(\frac{1}{4} \bullet 1, 0\right) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$; $\left(\frac{3}{4} \bullet 1, 0\right) = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$

Máximos: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Mínimo: $\left(\frac{1}{2} \bullet 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



▶ La gráfica de g es un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{2}$ y un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{2\pi}$ de la gráfica de f.

CONSEJO DE ESTUDIO

Después de dibujar un ciclo completo de la gráfica en el Ejemplo 2 en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, puedes ampliar la gráfica repitiendo el ciclo tantas veces como quieras a la izquierda y a la derecha de $0 \leq x \leq 1$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Identifica la amplitud y el periodo de la función. Luego haz una gráfica de la función y describe la gráfica de *g* como una transformación de la gráfica de su función madre.

1. $g(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$ **2.** $g(x) = \cos 2x$ **3.** $g(x) = 2\operatorname{sen} \pi x$ **4.** $g(x) = \frac{1}{3}\cos \frac{1}{2}x$

RECUERDA

La gráfica de $y = f(x) + k$ es una traslación vertical de la gráfica de $y = f(x)$.

La gráfica de $y = f(x - h)$ es una traslación horizontal de la gráfica de $y = f(x)$.

Trasladar las funciones seno y coseno

Las gráficas de $y = a \operatorname{sen} b(x - h) + k$ y $y = a \cos b(x - h) + k$ representan traslaciones de $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$. El valor de k indica una traslación hacia arriba ($k > 0$) o hacia abajo ($k < 0$). El valor de h indica una traslación a la izquierda ($h < 0$) o a la derecha ($h > 0$). Una traslación horizontal de una función periódica se denomina **desplazamiento de fase**.

Concepto Esencial

Hacer una gráfica de $y = a \operatorname{sen} b(x - h) + k$ y $y = a \cos b(x - h) + k$

Para hacer la gráfica de $y = a \operatorname{sen} b(x - h) + k$ o $y = a \cos b(x - h) + k$ donde $a > 0$ y $b > 0$, sigue los siguientes pasos.

Paso 1 Identifica la amplitud a, el periodo $\frac{2\pi}{b}$, el desplazamiento horizontal h, y el desplazamiento vertical k de la gráfica.

Paso 2 Dibuja la línea horizontal $y = k$, denominada la **línea media** de la gráfica.

Paso 3 Halla los cinco puntos clave trasladando los puntos clave de $y = a \operatorname{sen} bx$ o $y = a \cos bx$ horizontalmente h unidades y verticalmente k unidades.

Paso 4 Dibuja la gráfica pasando a través de los cinco puntos clave trasladados.

EJEMPLO 3 Hacer una gráfica de una traslación vertical

Haz una gráfica de $g(x) = 2 \text{ sen } 4x + 3$.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

La gráfica de g es una traslación 3 unidades a la derecha de la gráfica de $f(x) = 2 \text{ sen } 4x$. Entonces, suma 3 a las coordenadas de y de los cinco puntos clave de f.

SOLUCIÓN

Paso 1 Identifica la amplitud, el periodo, el desplazamiento horizontal y el desplazamiento vertical.

Amplitud: $a = 2$

Desplazamiento horizontal: $h = 0$

Periodo: $\dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

Desplazamiento vertical: $k = 3$

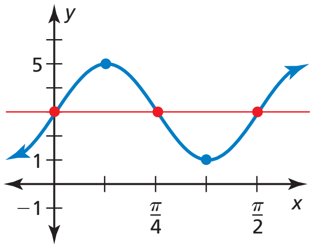
Paso 2 Dibuja la línea media de la gráfica, $y = 3$.

Paso 3 Halla los cinco puntos clave.

En $y = k$ $(0, 0 + 3) = (0, 3)$; $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0 + 3\right) = \left(\dfrac{\pi}{4}, 3\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0 + 3\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$

Máximo: $\left(\dfrac{\pi}{8}, 2 + 3\right) = \left(\dfrac{\pi}{8}, 5\right)$

Mínimo: $\left(\dfrac{3\pi}{8}, -2 + 3\right) = \left(\dfrac{3\pi}{8}, 1\right)$



Paso 4 Dibuja la gráfica pasando por los puntos clave.

EJEMPLO 4 Hacer una gráfica de traslación horizontal

Haz una gráfica de $g(x) = 5 \cos \dfrac{1}{2}(x - 3\pi)$.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

La gráfica de g es una traslación 3π unidades a la derecha de la gráfica de $f(x) = 5 \cos \frac{1}{2}x$. Entonces, suma 3π a las coordenadas de x de los cinco puntos clave de f.

SOLUCIÓN

Paso 1 Identifica la amplitud, el periodo, el desplazamiento horizontal y el desplazamiento vertical.

Amplitud: $a = 5$

Desplazamiento horizontal: $h = 3\pi$

Periodo: $\dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Desplazamiento vertical: $k = 0$

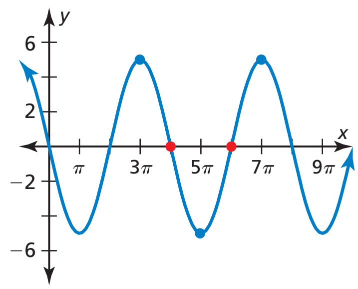
Paso 2 Dibuja la línea media de la gráfica. Dado que $k = 0$, la línea media es el eje x.

Paso 3 Halla los cinco puntos clave.

En $y = k$: $(\pi + 3\pi, 0) = (4\pi, 0)$;
$(3\pi + 3\pi, 0) = (6\pi, 0)$

Máximos: $(0 + 3\pi, 5) = (3\pi, 5)$;
$(4\pi + 3\pi, 5) = (7\pi, 5)$

Mínimo: $(2\pi + 3\pi, -5) = (5\pi, -5)$



Paso 4 Dibuja la gráfica pasando a través de los puntos clave.

Monitoreo del progreso

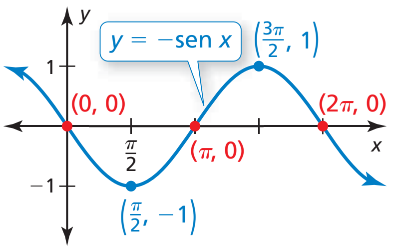
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

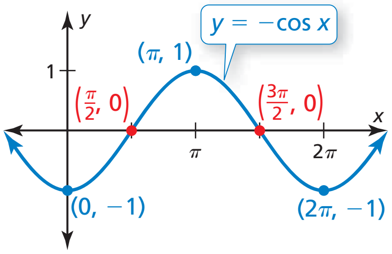
Haz una gráfica de la función.

5. $g(x) = \cos x + 4$ **6.** $g(x) = \dfrac{1}{2} \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **7.** $g(x) = \text{sen}(x + \pi) - 1$

Reflejar las funciones seno y coseno

Has hecho gráficas de funciones de la forma $y = a \text{ sen } (x - h) + k$ y $y = a \cos b(x - h) + k$, donde $a > 0$ y $b > 0$. Para ver qué pasa si $a < 0$, considera las gráficas de $y = -\text{sen } x$ y $y = -\cos x$.





RECUERDA

Este resultado tiene sentido porque la gráfica de $y = -f(x)$ es una reflexión en el eje x de la gráfica de $y = f(x)$.

Las gráficas son reflexiones de las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ en el eje x. En general, cuando $a < 0$, las gráficas de $y = a \text{ sen } b(x - h) + k$ y $y = a \cos b(x - h) + k$ son reflexiones de las gráficas de $y = |a| \text{ sen } b(x - h) + k$ y $y = |a| \cos b(x - h) + k$, respectivamente, en la línea media $y = k$.

EJEMPLO 5 Hacer una gráfica de una reflexión

Haz una gráfica de $g(x) = -2 \text{ sen } \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Identifica la amplitud, el periodo, el desplazamiento horizontal y el desplazamiento vertical.

Amplitud: $|a| = |-2| = 2$ Desplazamiento horizontal: $h = \frac{\pi}{2}$

Periodo: $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$ Desplazamiento vertical: $k = 0$

Paso 2 Dibuja la línea media de la gráfica. Dado que $k = 0$, la línea media es el eje x.

Paso 3 Halla los cinco puntos clave de $f(x) = |-2| \text{ sen } \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

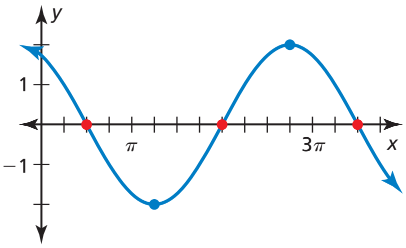
En $y = k$: $\left(0 + \frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, 0\right) = (2\pi, 0)$; $\left(3\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{7\pi}{2}, 0\right)$

Máximo: $\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, 2\right) = \left(\frac{5\pi}{4}, 2\right)$ Mínimo: $\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, -2\right) = \left(\frac{11\pi}{4}, -2\right)$

CONSEJO DE ESTUDIO

En el Ejemplo 5, el valor máximo y el valor mínimo de f son el valor mínimo y el valor máximo de g, respectivamente.

Paso 4 Refleja la gráfica. Dado que $a < 0$, la gráfica está reflejada en la línea media $y = 0$. Entonces, $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\right)$ se convierte en $\left(\frac{5\pi}{4}, -2\right)$ y $\left(\frac{11\pi}{4}, -2\right)$ se convierte en $\left(\frac{11\pi}{4}, 2\right)$.



Paso 5 Dibuja la gráfica pasando a través de los puntos clave.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Haz una gráfica de la función.

8. $g(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **9.** $g(x) = -3 \text{ sen } \frac{1}{2}x + 2$ **10.** $g(x) = -2 \cos 4x - 1$

9.4 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La porción periódica más corta de la gráfica de una función periódica se denomina un (una)__________.

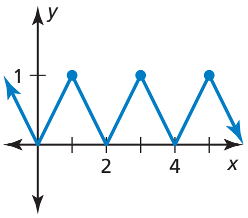
2. **ESCRIBIR** Compara las amplitudes y los periodos de las funciones $y = \frac{1}{2}\cos x$ y $y = 3\cos 2x$.

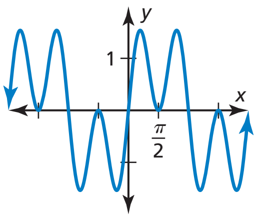
3. **VOCABULARIO** ¿Qué es un desplazamiento de fase? Da un ejemplo de una función seno que tenga un desplazamiento de fase.

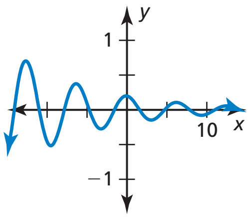
4. **VOCABULARIO** ¿Cuál es la línea media de la gráfica de la función $y = 2\text{ sen } 3(x + 1) - 2$?

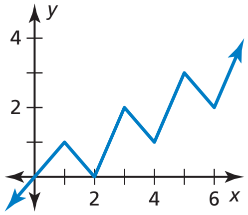
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

USAR LA ESTRUCTURA En los Ejercicios 5–8, determina si la gráfica representa una función periódica. Si es así, identifica el periodo.

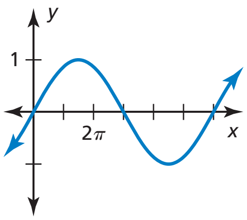
5.


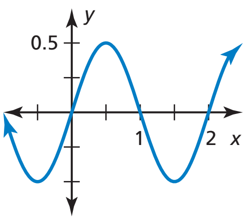
6.


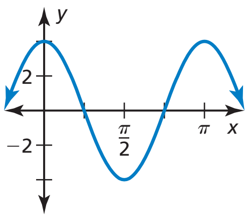
7.


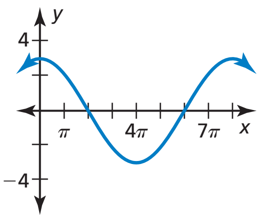
8.


En los Ejercicios 9–12, identifica la amplitud y el periodo de la gráfica de la función.

9.


10.


11.


12.


En los Ejercicios 13–20, identifica la amplitud y el periodo de la función. Luego haz una gráfica de la función y describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de su función madre. *(Consulta los Ejemplos 1 y 2).*

13. $g(x) = 3\text{ sen } x$

14. $g(x) = 2\text{ sen } x$

15. $g(x) = \cos 3x$

16. $g(x) = \cos 4x$

17. $g(x) = \text{sen } 2\pi x$

18. $g(x) = 3\text{ sen } 2x$

19. $g(x) = \frac{1}{3}\cos 4x$

20. $g(x) = \frac{1}{2}\cos 4\pi x$

21. **ANALIZAR ECUACIONES** ¿Qué funciones tienen una amplitud de 4 y un periodo de 2?

    (A) $y = 4\cos 2x$

    (B) $y = -4\text{ sen } \pi x$

    (C) $y = 2\text{ sen } 4x$

    (D) $y = 4\cos \pi x$

22. **ESCRIBIR ECUACIONES** Escribe una ecuación de la forma $y = a\text{ sen } bx$, donde $a > 0$ y $b > 0$, de manera que la gráfica tenga la amplitud y el periodo dados.

    a. amplitud: 1
    periodo: 5

    b. amplitud: 10
    periodo: 4

    c. amplitud: 2
    periodo: 2π

    d. amplitud: $\frac{1}{2}$
    periodo: 3π

23. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El movimiento de un péndulo se puede representar mediante la función $d = 4\cos 8\pi t$, donde d es el desplazamiento horizontal (en pulgadas) del péndulo relativo a su posición en reposo y t es el tiempo (en segundos). Halla e interpreta el periodo y la amplitud en el contexto de esta situación. Luego haz la gráfica de la función.

24. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Una boya se mece de arriba abajo con el pasar de las olas. El desplazamiento vertical y (en pies) de la boya con respecto al nivel del mar puede representarse por $y = 1.75 \cos \frac{\pi}{3}t$, donde t es el tiempo (en segundos). Halla e interpreta el periodo y la amplitud en el contexto del problema. Luego haz una gráfica de la función.

En los Ejercicios 25–34, haz una gráfica de la función. *(Consulta los Ejemplos 3 y 4).*

25. $g(x) = \text{sen } x + 2$

26. $g(x) = \cos x - 4$

27. $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

28. $g(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

29. $g(x) = 2 \cos x - 1$

30. $g(x) = 3 \text{ sen } x + 1$

31. $g(x) = \text{sen } 2(x + \pi)$

32. $g(x) = \cos 2(x - \pi)$

33. $g(x) = \text{sen } \frac{1}{2}(x + 2\pi) + 3$

34. $g(x) = \cos \frac{1}{2}(x - 3\pi) - 5$

35. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar el periodo de la función $y = \text{sen } \frac{2}{3}x$.

Periodo: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{\left|\frac{2}{3}\right|}{2\pi} = \frac{1}{3\pi}$

36. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al determinar el punto en el que ocurre el valor máximo de la función $y = 2 \text{ sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Máximo:

$$\left(\left(\frac{1}{4} \cdot 2\pi\right) - \frac{\pi}{2}, 2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, 2\right)$$
$$= (0, 2)$$

USAR LA ESTRUCTURA En los Ejercicios 37–40, describe la transformación de la gráfica de f representada por la función g.

37. $f(x) = \cos x,\ g(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

38. $f(x) = \text{sen } x,\ g(x) = 3 \text{ sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

39. $f(x) = \text{sen } x,\ g(x) = \text{sen } 3(x + 3\pi) - 5$

40. $f(x) = \cos x,\ g(x) = \cos 6(x - \pi) + 9$

En los Ejercicios 41–48, haz una gráfica de la función. *(Consulta el Ejemplo 5).*

41. $g(x) = -\cos x + 3$

42. $g(x) = -\text{sen } x - 5$

43. $g(x) = -\text{sen } \frac{1}{2}x - 2$

44. $g(x) = -\cos 2x + 1$

45. $g(x) = -\text{sen}(x - \pi) + 4$

46. $g(x) = -\cos(x + \pi) - 2$

47. $g(x) = -4 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

48. $g(x) = -5 \text{ sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$

49. USAR ECUACIONES ¿Cuál de los siguientes es un punto en el que ocurre el valor máximo de la gráfica de $y = -4 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$?

Ⓐ $\left(-\frac{\pi}{2}, 4\right)$

Ⓑ $\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$

Ⓒ $(0, 4)$

Ⓓ $(\pi, 4)$

50. ANALIZAR RELACIONES Une cada función con su gráfica. Explica tu razonamiento.

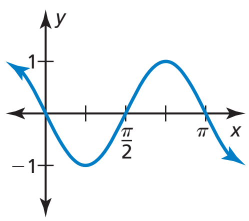
a. $y = 3 + \text{sen } x$

b. $y = -3 + \cos x$

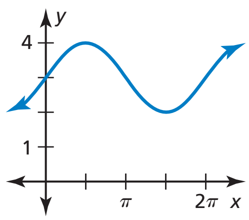
c. $y = \text{sen } 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d. $y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

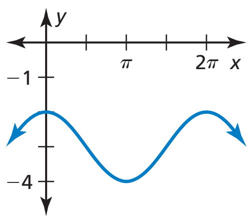
A.



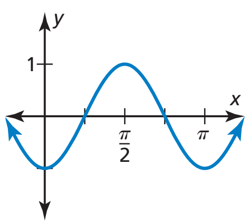
B.



C.



D.



ESCRIBIR ECUACIONES **En los Ejercicios 51–54, escribe una regla para g que represente las transformaciones indicadas de la gráfica de f.**

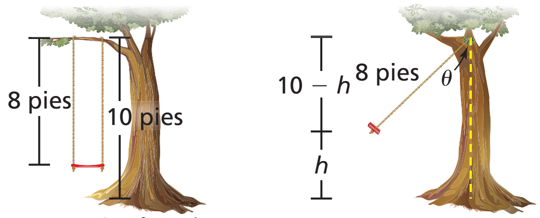
51. $f(x) = 3 \text{ sen } x$; traslación 2 unidades hacia arriba y π unidades a la derecha

52. $f(x) = \cos 2\pi x$; traslación 4 unidades hacia abajo y 3 unidades a la izquierda

53. $f(x) = \frac{1}{3} \cos \pi x$; traslación 1 unidad hacia abajo, seguida de una reflexión en la línea $y = -1$

54. $f(x) = \frac{1}{2} \text{ sen } 6x$; traslación $\frac{3}{2}$ hacia abajo y 1 unidad a la derecha, seguida de una reflexión en la línea $y = -\frac{3}{2}$

55. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La altura h (en pies) de un columpio sobre el suelo se puede representar mediante la función $h = -8 \cos \theta + 10$, donde el pivote está a 10 pies sobre el suelo, la soga es de 8 pies de largo y θ es el ángulo que forma la soga con la vertical. Haz la gráfica de la función. ¿Cuál es la altura del columpio si θ es 45°?



Vista frontal *Vista lateral*

56. **SACAR UNA CONCLUSIÓN** En una región en particular, la población L (en miles) de linces (el depredador) y la población H (en miles) de liebres (la presa) se puede representar mediante las ecuaciones

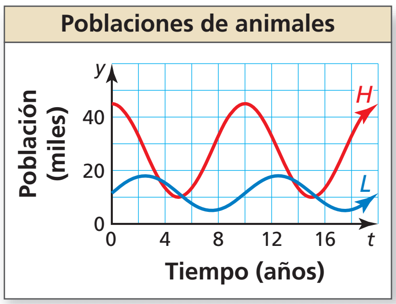
$$L = 11.5 + 6.5 \text{ sen } \frac{\pi}{5}t$$

$$H = 27.5 + 17.5 \cos \frac{\pi}{5}t$$

donde t es el tiempo en años.

a. Determina la razón entre liebres y linces cuando $t = 0$, 2.5, 5 y 7.5 años.

b. Usa la figura para explicar cómo parecen estar relacionados los cambios en las dos poblaciones.



57. **USAR HERRAMIENTAS** La velocidad promedio del viento s (en millas por hora) en el Puerto de Boston se puede aproximar mediante

$$s = 3.38 \text{ sen } \frac{\pi}{180}(t + 3) + 11.6$$

donde t es el tiempo en días y $t = 0$ representa el 1ro de enero. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función. ¿En qué días del año la velocidad promedio del viento es de 10 millas por hora? Explica tu razonamiento.

58. **USAR HERRAMIENTAS** La profundidad del agua d (en pies) de la Bahía de Fundy se puede representar mediante $d = 35 - 28 \cos \frac{\pi}{6.2}t$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ representa la medianoche. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función. ¿A qué hora(s) la profundidad del agua es de 7 pies? Explica.

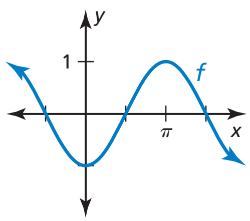
59. **REPRESENTACIONES MÚLTIPLES** Halla la tasa de cambio promedio de cada función sobre el intervalo $0 < x < \pi$.

a. $y = 2 \cos x$

b.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -\cos x$	-1	0	1	0	-1

c.



60. **RAZONAR** Considera las funciones $y = \text{sen}(-x)$ y $y = \cos(-x)$.

a. Construye una tabla de valores para cada ecuación usando los ángulos cuadrantales en el intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$.

b. Haz una gráfica de cada función.

c. Describe las transformaciones de las gráficas de las funciones madre.

61. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Estás en una rueda de la fortuna que da vueltas por 180 segundos. Tu altura h (en pies) sobre el suelo en cualquier momento t (en segundos) se puede representar mediante la ecuación

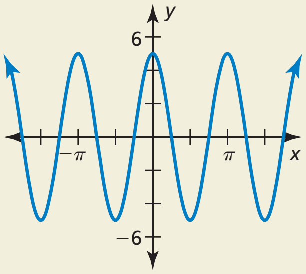
$$h = 85 \text{ sen } \frac{\pi}{20}(t - 10) + 90.$$

a. Haz una gráfica de la función.

b. ¿Cuántos ciclos hace la rueda de la fortuna en 180 segundos?

c. ¿Cuáles son tus alturas máxima y mínima?

62. ¿CÓMO LO VES? Usa la gráfica para responder cada pregunta.



a. ¿La gráfica representa una función de la forma $f(x) = a \text{ sen } bx$ o $f(x) = a \cos bx$? Explica.

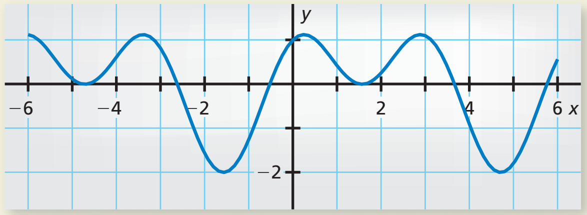
b. Identifica el valor máximo, el valor mínimo, el periodo y la amplitud de la función.

63. HALLAR UN PATRÓN Escribe una expresión en términos del entero n que represente a todas las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función $y = \cos 2x$. Justifica tu respuesta.

64. ARGUMENTAR Tu amigo dice que para las funciones de la forma $y = a \text{ sen } bx$ y $y = a \cos bx$, los valores de a y b afectan las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica.

65. PENSAMIENTO CRÍTICO Describe una transformación de la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ que tenga como resultado la gráfica de $g(x) = \cos x$.

66. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Usa una calculadora gráfica para hallar una función de la forma $y = \text{sen } b_1x + \cos b_2x$ cuya gráfica corresponda con la que se muestra a continuación.



67. RESOLVER PROBLEMAS Para una persona en reposo, la presión sanguínea P (en milímetros de mercurio) en el tiempo t (en segundos) está dada por la función

$$P = 100 - 20 \cos \frac{8\pi}{3}t.$$

Haz una gráfica de la función. Un ciclo equivale a un latido del corazón. ¿Cuál es el pulso (en latidos por minuto) de la persona?

68. RESOLVER PROBLEMAS El movimiento de un resorte se puede representar mediante $y = A \cos kt$, donde y es el desplazamiento vertical (en pies) del resorte relativo a su posición en reposo, A es el desplazamiento inicial (en pies), k es una constante que mide la elasticidad del resorte y t es el tiempo (en segundos).

a. Tienes un resorte cuyo movimiento se puede representar mediante la función $y = 0.2 \cos 6t$. Halla el desplazamiento inicial y el periodo del resorte. Luego haz una gráfica de la función.

b. Cuando se aplica una fuerza amortiguadora al resorte, el movimiento del resorte se puede representar mediante la función $y = 0.2e^{-4.5t} \cos 4t$. Haz una gráfica de esta función. ¿Qué efecto tiene la fuerza amortiguadora en el movimiento?

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Simplifica la expresión racional, si es posible. *(Sección 7.3)*

69. $\dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ **70.** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 24x}{x^2 - 2x - 24}$ **71.** $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 4x - 5}$ **72.** $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$

Halla el mínimo común múltiplo de las expresiones. *(Sección 7.4)*

73. $2x, 2(x - 5)$ **74.** $x^2 - 4, x + 2$ **75.** $x^2 + 8x + 12, x + 6$

9.1–9.4 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

seno, *pág. 462*
coseno, *pág. 462*
tangente, *pág. 462*
cosecante, *pág. 462*
secante, *pág. 462*
cotangente, *pág. 462*
lado inicial, *pág. 470*
lado terminal, *pág. 470*
posición estándar, *pág. 470*
coterminal, *pág. 471*
radián, *pág. 471*
sector, *pág. 472*
ángulo central, *pág. 472*
círculo unitario, *pág. 479*
ángulo cuadrantal, *pág. 479*
ángulo de referencia, *pág. 480*
amplitud, *pág. 486*
función periódica, *pág. 486*
ciclo, *pág. 486*
periodo, *pág. 486*
desplazamiento de fase, *pág. 488*
línea media, *pág. 488*

Conceptos Esenciales

Sección 9.1

Definiciones de las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo, *pág. 462*
Valores trigonométricos para ángulos especiales, *pág. 463*

Sección 9.2

Ángulos en posición estándar, *pág. 470*
Convertir entre grados y radianes, *pág. 471*
Medidas en grados y radianes de ángulos especiales, *pág.* 472
Longitud del arco y área de un sector, *pág. 472*

Sección 9.3

Definiciones generales de las funciones trigonométricas, *pág. 478*
El círculo unitario, *pág. 479*
Relaciones del ángulo de referencia, *pág. 480*
Evaluar funciones trigonométricas, *pág. 480*

Sección 9.4

Características de $y = \text{sen}\ x$ y $y = \cos x$, *pág. 486*
Amplitud y periodo, *pág. 487*
Hacer una gráfica de $y = a\ \text{sen}\ b(x - h) + k$ y $y = a \cos b(x - h) + k$, *pág. 488*

Prácticas matemáticas

1. Haz una conjetura acerca de las distancias horizontales recorridas en la parte (c) del Ejercicio 39 de la página 483.

2. Explica por qué las cantidades en la parte (a) del Ejercicio 56 de la página 493 tienen sentido en el contexto de la situación.

Destrezas de estudio

Formar un grupo de estudio para el examen final

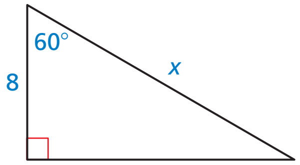
Forma un grupo de estudio varias semanas antes del examen final. La intención de este grupo es revisar lo que ya has aprendido, a la vez que continúas aprendiendo material nuevo.

9.1–9.4 Prueba

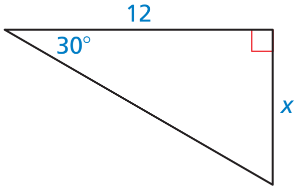
1. En un triángulo rectángulo, θ es un ángulo agudo y sen $\theta = \frac{2}{7}$. Evalúa las otras cinco funciones trigonométricas de θ. *(Sección 9.1)*

Halla el valor de *x* para el triángulo rectángulo. *(Sección 9.1)*

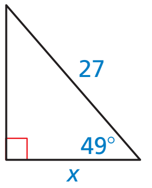
2.



3.



4.



Dibuja un ángulo con la medida dada en posición estándar. Luego halla un ángulo positivo y un ángulo negativo que sean coterminales con el ángulo dado. *(Sección 9.2)*

5. $40°$

6. $\frac{5\pi}{6}$

7. $-960°$

Convierte la medida en grados a radianes o la medida en radianes a grados. *(Sección 9.2)*

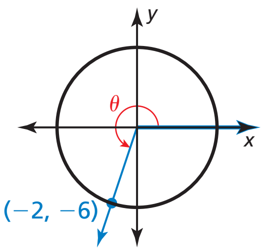
8. $\frac{3\pi}{10}$

9. $-60°$

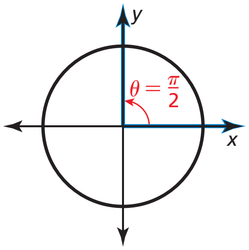
10. $72°$

Evalúa las seis funciones trigonométricas de θ. *(Sección 9.3)*

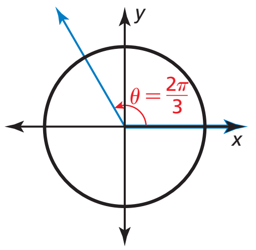
11.



12.



13.



14. Identifica la amplitud y el periodo de $g(x) = 3$ sen x. Luego haz una gráfica de la función y describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) =$ sen x. *(Sección 9.4)*

15. Identifica la amplitud y el periodo de $g(x) = \cos 5\pi x + 3$. Luego haz una gráfica de la función y describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) = \cos x$. *(Sección 9.4)*

16. Vuelas una cometa en un ángulo de 70°. Has soltado un total de 400 pies de hilo y sostienes firme el carrete 4 pies sobre el suelo. *(Sección 9.1)*

a. ¿Qué tan alto sobre el suelo está la cometa?

b. Un amigo que observa la cometa estima que el ángulo de elevación de la cometa es 85°. ¿A cuánta distancia de tu amigo estás parado?

17. La cima de la torre Space Needle en Seattle, Washington, es un restaurante circular giratorio. El restaurante tiene un radio de 47.25 pies y hace una revolución completa en aproximadamente una hora. Cenas en una mesa con vista a la ventana de 7:00 P.M. a 8:55 P.M. Compara la distancia que giras con la distancia de una persona sentada a 5 pies de las ventanas. *(Sección 9.2)*

9.5 Hacer gráficas de otras funciones trigonométricas

Pregunta esencial ¿Cuáles son las características de la gráfica de la función tangente?

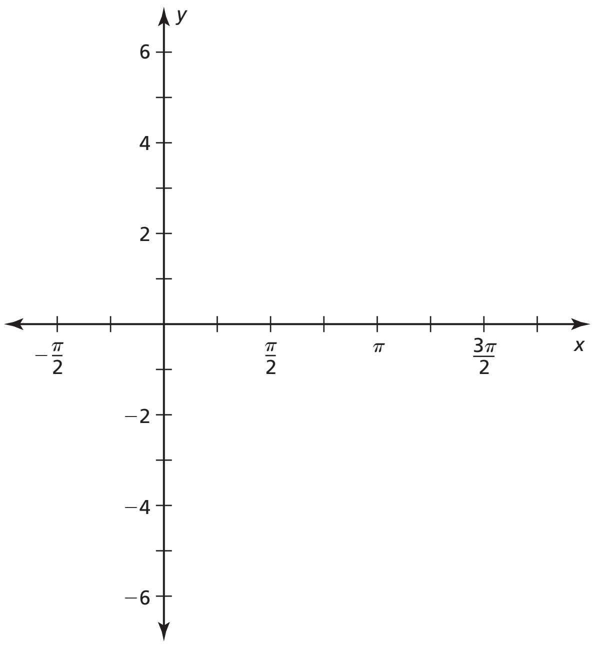
EXPLORACIÓN 1 Hacer una gráfica de la función tangente

Trabaja con un compañero.

a. Completa la tabla para $y = \tan x$, donde x es una medida de ángulo en radianes.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$									
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$y = \tan x$									

b. La gráfica de $y = \tan x$ tiene asíntotas verticales en valores de x dondetan x es indefinida. Marca los puntos (x, y) de la parte (a). Luego usa las asíntotas para dibujar la gráfica de $y = \tan x$.



c. Para la gráfica de $y = \tan x$, identifica las asíntotas, las intersecciones con el eje x y los intervalos para los cuales la función es creciente o decreciente sobre $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. ¿La función tangente es *par*, *impar* o *ninguna* de las dos?

Comunicar tu respuesta

2. ¿Cuáles son las características de la gráfica de la función tangente?

3. Describe las asíntotas de la gráfica de $y = \cot x$ en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS

Para dominar las matemáticas, necesitas considerar problemas análogos e intentar resolver casos especiales del problema original para tener una mayor comprensión de su solución.

9.5 Lección

Vocabulario Esencial

Anterior
asíntota
periodo
amplitud
intersección con el eje *x*
transformaciones

Qué aprenderás

- Explorar las características de las funciones tangente y cotangente.
- Hacer gráficas de las funciones tangente y cotangente.
- Hacer gráficas de las funciones secante y cosecante.

Explorar las funciones tangente y cotangente

Las gráficas de las funciones tangente y cotangente están relacionadas con las gráficas de las funciones madre $y = \tan x$ y $y = \cot x$, que están dibujadas abajo.

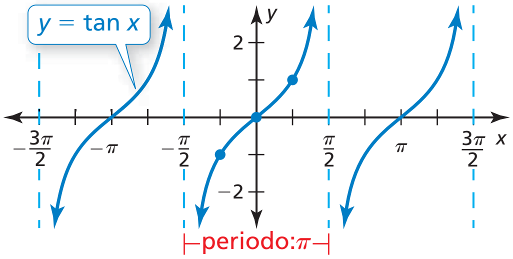
← *x* se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ *x* se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ →

x	$-\frac{\pi}{2}$	-1.57	-1.5	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	1.5	1.57	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	Indef.	-1256	-14.10	-1	0	1	14.10	1256	Indef.

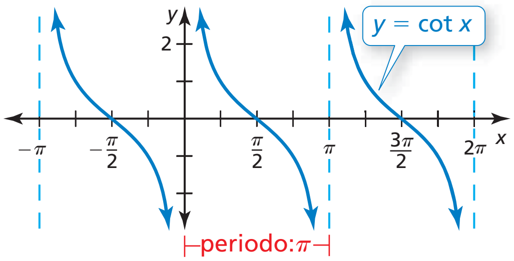
← tan *x* se aproxima a $-\infty$ tan *x* se aproxima a ∞ →

Dado que $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, $\tan x$ es indefinida para los valores de x en los que $\cos x = 0$, tal como $x = \pm\frac{\pi}{2} \approx \pm 1.571$.

La tabla indica que la gráfica tiene asíntotas en estos valores. La tabla representa un ciclo de la gráfica, de manera que el periodo de la gráfica es π.



Puedes usar un enfoque similar para hacer la gráfica de $y = \cot x$. Dado que $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$, $\cot x$ es indefinida para los valores de x en los que $\text{sen } x = 0$, que son múltiplos de π. La gráfica tiene asíntotas en estos valores. El periodo de la gráfica es también π.



Concepto Esencial

Características de $y = \tan x$ y $y = \cot x$

Las funciones $y = \tan x$ y $y = \cot x$ tienen las siguientes características.

- El dominio de $y = \tan x$ son todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. En estos valores de x, la gráfica tiene asíntotas verticales.
- El dominio de $y = \cot x$ son todos los números reales excepto los múltiplos de π. En estos valores de x, la gráfica tiene asíntotas verticales.
- El rango de cada función son todos los números reales. Entonces, las funciones no tienen valores máximos o mínimos, y las gráficas no tienen una amplitud.
- El periodo de cada gráfica es π.
- Las intersecciones del eje x para $y = \tan x$ ocurren si $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$.
- Las intersecciones del eje x para $y = \cot x$ ocurren si $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$.

CONSEJO DE ESTUDIO

Los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ son valores como estos:

$\pm 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \pm\frac{\pi}{2}$

$\pm 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \pm\frac{3\pi}{2}$

$\pm 5 \cdot \frac{\pi}{2} = \pm\frac{5\pi}{2}$

Hacer gráficas de las funciones tangente y cotangente

Las gráficas de $y = a \tan bx$ y $y = a \cot bx$ representan transformaciones de sus funciones madre. El valor de a indica un alargamiento vertical ($a > 1$) o un encogimiento vertical ($0 < a < 1$). El valor de b indica un alargamiento horizontal ($0 < b < 1$) o un encogimiento horizontal ($b > 1$) y cambia el periodo de la gráfica.

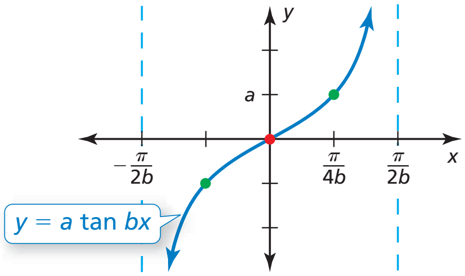
Concepto Esencial

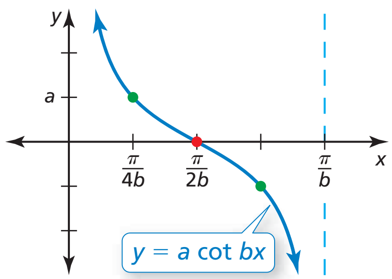
Periodo y asíntotas verticales de $y = a \tan bx$ y $y = a \cot bx$

El periodo y las asíntotas verticales de $y = a \tan bx$ y $y = a \cot bx$, donde a y b son números reales distintos de cero, son los siguientes.

- El periodo de la gráfica de cada función es $\dfrac{\pi}{|b|}$.
- Las asíntotas verticales para $y = a \tan bx$ están en múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2|b|}$.
- Las asíntotas verticales para $y = a \cot bx$ están en múltiplos de $\dfrac{\pi}{|b|}$.

Cada gráfica a continuación muestra cinco valores de x clave que puedes usar para dibujar las gráficas de $y = a \tan bx$ y $y = a \cot bx$ para $a > 0$ y $b > 0$. Estos son la intersección con el eje x, los valores de x donde ocurren las asíntotas, y los valores de x en el punto intermedio entre la intersección con el eje x y las asíntotas. En cada punto intermedio, el valor de la función es a o $-a$.





EJEMPLO 1 **Hacer una gráfica de una función tangente**

Haz la gráfica de un periodo de $g(x) = 2 \tan 3x$. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN

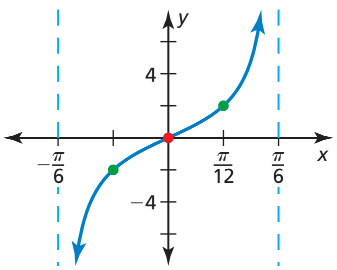
La función es de la forma $g(x) = a \tan bx$ donde $a = 2$ y $b = 3$. Entonces, el periodo es $\dfrac{\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{3}$.

Intersección: $(0, 0)$

Asíntotas: $x = \dfrac{\pi}{2|b|} = \dfrac{\pi}{2(3)}$, o $x = \dfrac{\pi}{6}$; $\quad x = -\dfrac{\pi}{2|b|} = -\dfrac{\pi}{2(3)}$, o $x = -\dfrac{\pi}{6}$

Puntos intermedios: $\left(\dfrac{\pi}{4b}, a\right) = \left(\dfrac{\pi}{4(3)}, 2\right) = \left(\dfrac{\pi}{12}, 2\right)$;

$$\left(-\frac{\pi}{4b}, -a\right) = \left(-\frac{\pi}{4(3)}, -2\right) = \left(-\frac{\pi}{12}, -2\right)$$

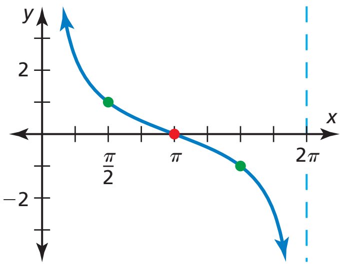


▶ La gráfica de g es un alargamiento vertical por un factor de 2 y un encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{3}$ de la gráfica de f.

EJEMPLO 2 Hacer una gráfica de una función cotangente

Haz la gráfica de un periodo de $g(x) = \cot \frac{1}{2}x$. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) = \cot x$.

SOLUCIÓN



La función es de la forma $f(x) = a \cot bx$ donde $a = 1$ y $b = \frac{1}{2}$. Entonces, el periodo es $\dfrac{\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$.

Intersección: $\left(\dfrac{\pi}{2b}, 0\right) = \left(\dfrac{\pi}{2\left(\frac{1}{2}\right)}, 0\right) = (\pi, 0)$

Asíntotas: $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}$, o $x = 2\pi$

Puntos intermedios: $\left(\dfrac{\pi}{4b}, a\right) = \left(\dfrac{\pi}{4\left(\frac{1}{2}\right)}, 1\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$; $\left(\dfrac{3\pi}{4b}, -a\right) = \left(\dfrac{3\pi}{4\left(\frac{1}{2}\right)}, -1\right) = \left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$

► La gráfica de g es un alargamiento horizontal por un factor de 2 de la gráfica de f.

CONSEJO DE ESTUDIO

Dado que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\sec x$ es indefinida para valores de x en la que $\cos x = 0$. La gráfica de $y = \sec x$ tiene asíntotas verticales en estos valores de x. Puedes usar razonamiento similar para comprender las asíntotas verticales de la gráfica de $y = \csc x$.

Monitoreo del progreso

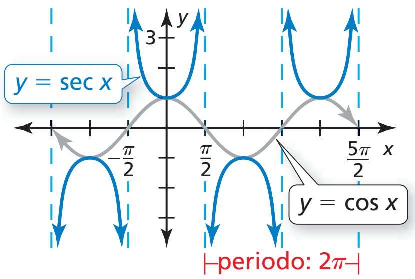
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

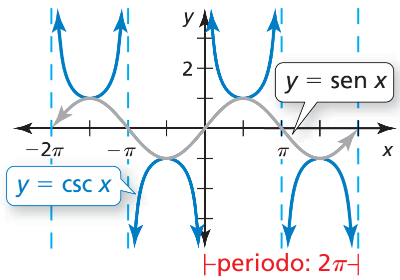
Haz la gráfica de un periodo de la función. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de su función madre.

1. $g(x) = \tan 2x$ **2.** $g(x) = \frac{1}{3}\cot x$ **3.** $g(x) = 2 \cot 4x$ **4.** $g(x) = 5 \tan \pi x$

Hacer gráficas de las funciones secante y cosecante

Las gráficas de las funciones secante y cosecante están relacionadas con las gráficas de las funciones madre $y = \sec x$ y $y = \csc x$, que se muestran a continuación.





Concepto Esencial

Características de $y = \sec x$ y $y = \csc x$

Las funciones $y = \sec x$ y $y = \csc x$ tienen las siguientes características.

- El dominio de $y = \sec x$ son todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$. En estos valores de x, la gráfica tiene asíntotas verticales.
- El dominio de $y = \csc x$ son todos los números reales excepto los múltiplos de π. En estos valores de x, la gráfica tiene asíntotas verticales.
- El rango de cada función es $y \leq -1$ y $y \geq 1$. Entonces, las gráficas no tienen una amplitud.
- El periodo de cada gráfica es 2π.

Para hacer la gráfica de $y = a \sec bx$ o $y = a \csc bx$, primero haz la gráfica de la función $y = a \cos bx$ o $y = a \operatorname{sen} bx$, respectivamente. Luego usa las asíntotas y varios puntos para dibujar una gráfica de la función. Observa que el valor de b representa un alargamiento o encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{b}$, entonces el periodo de $y = a \sec bx$ y $y = a \csc bx$ es $\frac{2\pi}{|b|}$.

EJEMPLO 3 Hacer una gráfica de una función secante

Haz la gráfica de un periodo de $g(x) = 2 \sec x$. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) = \sec x$.

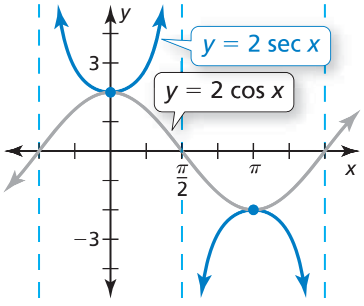
SOLUCIÓN

Paso 1 Haz una gráfica de la función $y = 2 \cos x$.

El periodo es $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Paso 2 Haz una gráfica de las asíntotas de g. Dado que las asíntotas de g ocurren si $2 \cos x = 0$, dibuja $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

Paso 3 Marca puntos en g, tales como $(0, 2)$ y $(\pi, -2)$. Luego usa las asíntotas para dibujar la curva.



▶ La gráfica de g es un alargamiento vertical por un factor de 2 de la gráfica de f.

EJEMPLO 4 Hacer una gráfica de una función cosecante

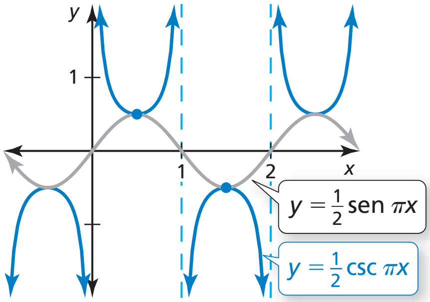
Haz la gráfica de un periodo de $g(x) = \frac{1}{2} \csc \pi x$. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) = \csc x$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Haz la gráfica de la función $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi x$. El periodo es $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Paso 2 Dibuja las asíntotas de g. Dado que las asíntotas de g ocurren si $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi x = 0$, dibuja $x = 0$, $x = 1$, y $x = 2$.

Paso 3 Marca los puntos en g, tales como $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Luego usa las asíntotas para dibujar la curva.



BUSCAR UN PATRÓN

En los Ejemplos 3 y 4, observa que los puntos marcados están en ambas gráficas. También, estos puntos representan un máximo local en una gráfica y un mínimo local en la otra gráfica.

▶ La gráfica de g es un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{2}$ y un encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{\pi}$ de la gráfica de f.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Haz la gráfica de un periodo de la función. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de su función madre.

5. $g(x) = \csc 3x$ **6.** $g(x) = \frac{1}{2} \sec x$ **7.** $g(x) = 2 \csc 2x$ **8.** $g(x) = 2 \sec \pi x$

9.5 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Explica por qué las gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante no tienen amplitud.

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Las funciones _______ y _______ son indefinidas para los valores de x en los que sen $x = 0$.

3. **COMPLETAR LA ORACIÓN** El periodo de la función $y = \sec x$ es _____. Y el periodo de $y = \cot x$ es _____.

4. **ESCRIBIR** Explica cómo dibujar una función de la forma $y = a \sec bx$.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–12, haz la gráfica de un periodo de la función. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de su función madre. *(Consulta los Ejemplos1 y 2).*

5. $g(x) = 2 \tan x$
6. $g(x) = 3 \tan x$
7. $g(x) = \cot 3x$
8. $g(x) = \cot 2x$
9. $g(x) = 3 \cot \frac{1}{4}x$
10. $g(x) = 4 \cot \frac{1}{2}x$
11. $g(x) = \frac{1}{2} \tan \pi x$
12. $g(x) = \frac{1}{3} \tan 2\pi x$

13. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al hallar el periodo de la función $y = \cot 3x$.

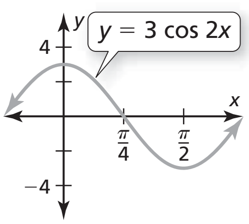
Periodo: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

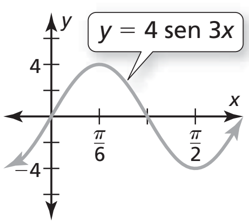
14. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al describir la transformación de $f(x) = \tan x$ representada por $g(x) = 2 \tan 5x$.

Un alargamiento vertical por un factor de 5 y un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{2}$.

15. **ANALIZAR RELACIONES** Usa la gráfica dada para hacer la gráfica de cada función.

a. $f(x) = 3 \sec 2x$ **b.** $f(x) = 4 \csc 3x$





16. **USAR ECUACIONES** ¿Cuál de las siguientes son asíntotas de la gráfica de $y = 3 \tan 4x$?

Ⓐ $x = \frac{\pi}{8}$ Ⓑ $x = \frac{\pi}{4}$

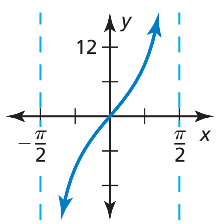
Ⓒ $x = 0$ Ⓓ $x = -\frac{5\pi}{8}$

En los Ejercicios 17–24, haz la gráfica de un periodo de la función. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de su función madre. *(Consulta los Ejemplos 3 y 4).*

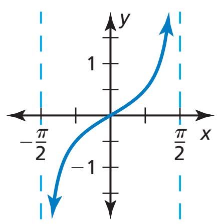
17. $g(x) = 3 \csc x$
18. $g(x) = 2 \csc x$
19. $g(x) = \sec 4x$
20. $g(x) = \sec 3x$
21. $g(x) = \frac{1}{2} \sec \pi x$
22. $g(x) = \frac{1}{4} \sec 2\pi x$
23. $g(x) = \csc \frac{\pi}{2}x$
24. $g(x) = \csc \frac{\pi}{4}x$

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN **En los Ejercicios 25–28, usa la gráfica para escribir una función de la forma $y = a \tan bx$.**

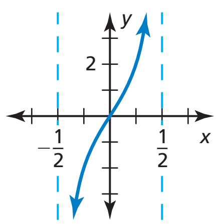
25.



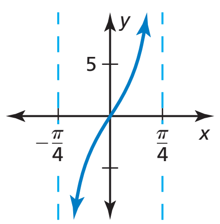
26.



27.



28.



USAR LA ESTRUCTURA **En los Ejercicios 29–34, une la ecuación con la gráfica correcta. Explica tu razonamiento.**

29. $g(x) = 4 \tan x$

30. $g(x) = 4 \cot x$

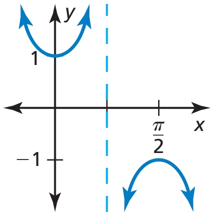
31. $g(x) = 4 \csc \pi x$

32. $g(x) = 4 \sec \pi x$

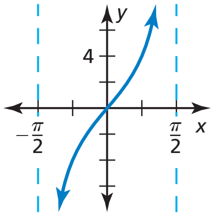
33. $g(x) = \sec 2x$

34. $g(x) = \csc 2x$

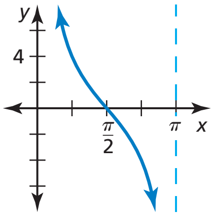
A.



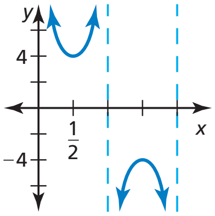
B.



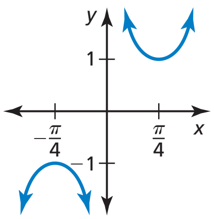
C.



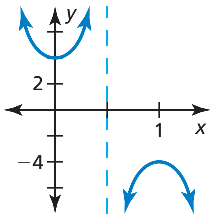
D.



E.



F.



35. **ESCRIBIR** Explica por qué hay más de una función tangente cuya gráfica pasa por el origen y tiene asíntotas en $x = -\pi$ y $x = \pi$.

36. **USAR ECUACIONES** Haz la gráfica de un periodo de cada función. Describe la transformación de la gráfica de la función madre.

a. $g(x) = \sec x + 3$ **b.** $g(x) = \csc x - 2$

c. $g(x) = \cot(x - \pi)$ **d.** $g(x) = -\tan x$

ESCRIBIR ECUACIONES **En los Ejercicios 37–40, escribe una regla para *g* que represente la transformación indicada de la gráfica de *f*.**

37. $f(x) = \cot 2x$; traslación 3 unidades hacia arriba y $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda

38. $f(x) = 2 \tan x$; traslación π unidades a la derecha, seguida de encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{3}$.

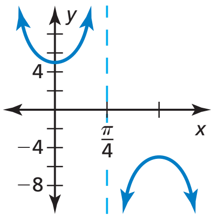
39. $f(x) = 5 \sec (x - \pi)$; traslación 2 unidades hacia abajo, seguida de una reflexión en el eje x.

40. $f(x) = 4 \csc x$; alargamiento vertical por un factor de 2 y una reflexión en el eje x.

41. **REPRESENTACIONES MÚLTIPLES** ¿Qué función tiene un valor máximo local mayor? ¿Cuál tiene un valor mínimo local mayor? Explica.

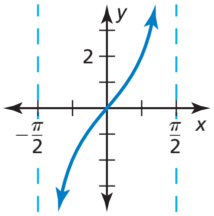
A. $f(x) = \frac{1}{4} \csc \pi x$

B.

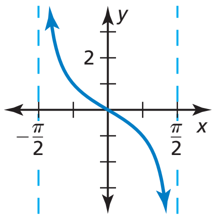


42. **ANALIZAR RELACIONES** Ordena las funciones de la menor tasa de cambio promedio a la mayor tasa de cambio promedio sobre el intervalo $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

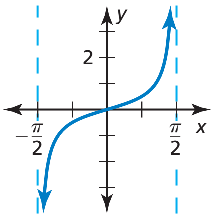
A.



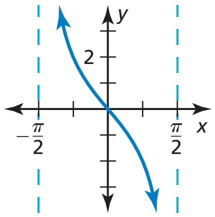
B.



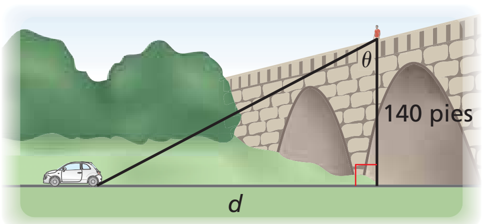
C.



D.

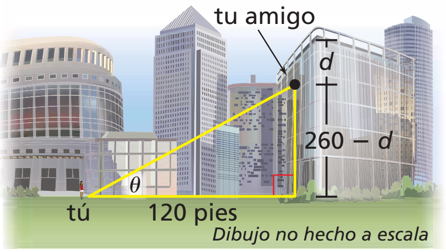


43. **RAZONAR** Estás de pie en un puente a 140 pies sobre el suelo. Miras hacia abajo y ves un carro alejándose del paso subterráneo. La distancia d (en pies) a la que está el carro de la base del puente se puede representar mediante $d = 140 \tan \theta$. Haz una gráfica de la función. Describe qué pasa con θ al aumentar d.



44. **USAR HERRAMIENTAS** Usas una videocámara para hacer un paneo hacia arriba de la Estatua de la Libertad. La altura h (en pies) de la parte de la Estatua de la Libertad que se puede ver a través de tu videocámara después de tiempo t (en segundos) se puede representar mediante $h = 100 \tan \frac{\pi}{36} t$. Haz una gráfica de la función usando una calculadora gráfica. ¿Qué ventana de visualización usaste? Explica.

45. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Estás de pie a 120 pies de la base de un edificio de 260 pies. Observas a tu amigo bajar por un lado del edificio en un elevador transparente.



a. Escribe una ecuación que dé la distancia d (en pies) a la que está tu amigo de la parte más alta del edificio como una función del ángulo de elevación θ.

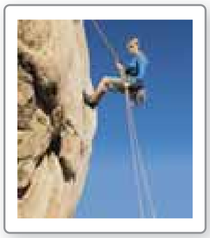
b. Haz una gráfica de la función hallada en la parte (a). Explica cómo se relaciona la gráfica con esta situación.

46. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Estás de pie a 300 pies de la base de un acantilado de 200 pies. Tu amigo baja por el acantilado haciendo rapel.

a. Escribe una ecuación que dé la distancia d (en pies) a la que está tu amigo de la cima del acantilado como una función del ángulo de elevación θ.

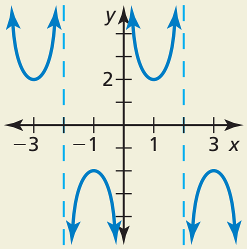
b. Haz una gráfica de la función hallada en la parte (a).

c. Usa una calculadora gráfica para determinar el ángulo de elevación cuando tu amigo ha hecho rapel hasta la mitad del acantilado.



47. ARGUMENTAR Tu amigo dice que no es posible escribir una función cosecante que tenga la misma gráfica que $y = \sec x$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

48. ¿CÓMO LO VES? Usa la gráfica para responder cada pregunta.



a. ¿Cuál es el periodo de la gráfica?

b. ¿Cuál es el rango de la función?

c. ¿La función es de la forma $f(x) = a \csc bx$ o $f(x) = a \sec bx$? Explica.

49. RAZONAMIENTO ABSTRACTO Reescribir $a \sec bx$ en términos de $\cos bx$. Usa tus resultados para explicar la relación entre los máximos y mínimos locales de las funciones coseno y secante.

50. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Una ecuación trigonométrica que es válida para todos los valores de la variable para los cuales ambos lados de la ecuación están definidos se llama una identidad trigonométrica. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función.

$$y = \frac{1}{2}\left(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}\right).$$

Usa tu gráfica para escribir una identidad trigonométrica que incluya esta función. Explica tu razonamiento.

51. PENSAMIENTO CRÍTICO Halla una función tangente cuya gráfica interseque la gráfica de $y = 2 + 2 \text{ sen } x$ solo en los puntos mínimos de la función seno.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Escribe una función cúbica cuya gráfica pase a través de los puntos dados. *(Sección 4.9)*

52. $(-1, 0), (1, 0), (3, 0), (0, 3)$

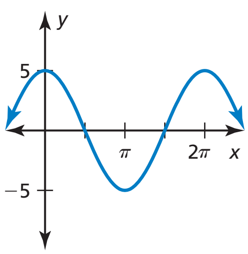
53. $(-2, 0), (1, 0), (3, 0), (0, -6)$

54. $(-1, 0), (2, 0), (3, 0), (1, -2)$

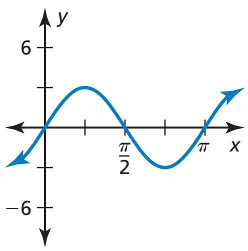
55. $(-3, 0), (-1, 0), (3, 0), (-2, 1)$

Halla la amplitud y el periodo de la gráfica de la función. *(Sección 9.4)*

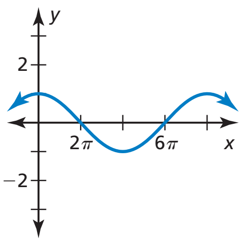
56.



57.



58.



9.6 Representar con funciones trigonométricas

Pregunta esencial ¿Cuáles son las características de los problemas de la vida real que se pueden representar mediante funciones trigonométricas?

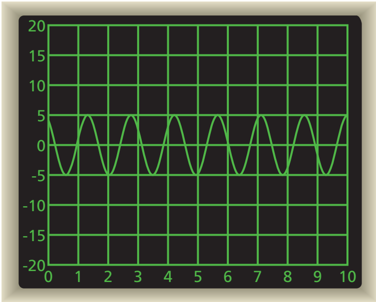
EXPLORACIÓN 1 **Representar corrientes eléctricas**

REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS

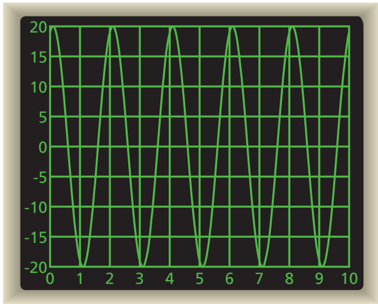
Para dominar las matemáticas, necesitas aplicar las matemáticas que sabes para resolver los problemas que surgen en la vida diaria.

Trabaja con un compañero. Halla una función seno que represente la corriente eléctrica que se muestra en cada pantalla de osciloscopio. Expresa la amplitud y el periodo de la gráfica.

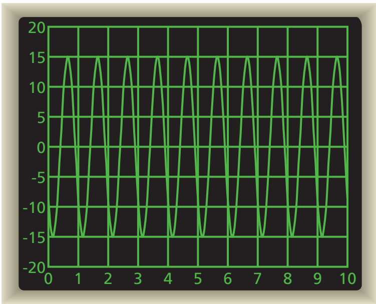
a.



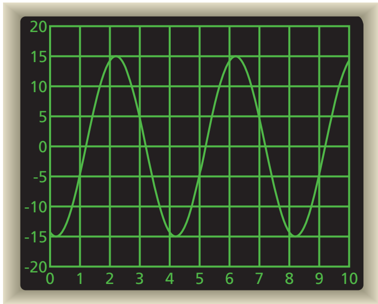
b.



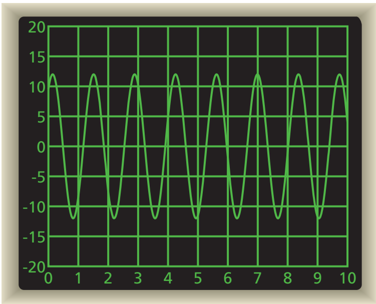
c.



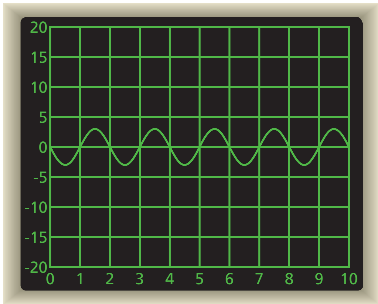
d.



e.



f.



Comunicar tu respuesta

2. ¿Cuáles son las características de los problemas de la vida real que se pueden representar mediante las funciones trigonométricas?

3. Consulta el Internet o alguna otra referencia para hallar ejemplos de situaciones de la vida real que se puedan representar mediante funciones trigonométricas.

9.6 Lección

Qué aprenderás

- Interpretar y usar la frecuencia.
- Escribir funciones trigonométricas.
- Usar herramientas tecnológicas para hallar modelos trigonométricos.

Vocabulario Esencial

frecuencia, *pág. 506*
sinusoide, *pág. 507*

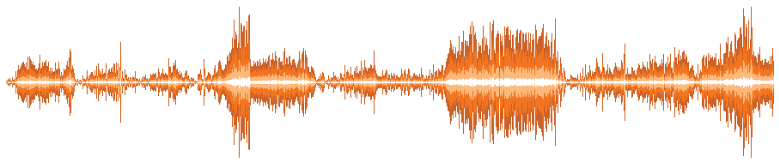
Anterior
amplitude
periodo
línea media

Frecuencia

La naturaleza periódica de las funciones trigonométricas las hace útiles para representar movimientos *oscilatorios* o patrones periódicos que ocurren en la vida real. Algunos ejemplos son las ondas de sonido, el movimiento de un péndulo y las estaciones del año. En tales aplicaciones, el recíproco del periodo se denomina **frecuencia**, que da el número de ciclos por unidad de tiempo.

EJEMPLO 1 Usar la frecuencia

Un sonido que consiste en una sola frecuencia se denomina *tono puro*. Un audiómetro produce tonos puros para evaluar las funciones auditivas de una persona. Un audiómetro produce un tono puro con una frecuencia f de 2000 hertz (ciclos por segundo). La presión máxima P producida a partir del tono puro es de 2 milipascales. Escribe y dibuja un modelo de la función seno que dé la presión P como función del tiempo t (en segundos).



SOLUCIÓN

Paso 1 Halla los valores de a y b en el modelo $P = a$ sen bt. La presión máxima es 2, entonces $a = 2$. Usa la frecuencia f para hallar b.

$$\text{frecuencia} = \frac{1}{\text{periodo}}$$ Escribe una relación que involucre la frecuencia y el periodo.

$$2000 = \frac{b}{2\pi}$$ Sustituye.

$$4000\pi = b$$ Multiplica cada lado por 2π.

La presión P como función del tiempo t está dada por $P = 2$ sen $4000\pi t$.

Paso 2 Haz una gráfica del modelo. La amplitud es $a = 2$ y el periodo es

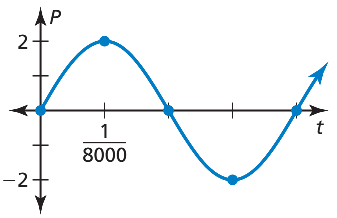
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2000}.$$

Los puntos clave son:

$$\text{Intersecciones: } (0, 0); \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2000}, 0\right) = \left(\frac{1}{4000}, 0\right); \left(\frac{1}{2000}, 0\right)$$

$$\text{Máximo: } \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2000}, 2\right) = \left(\frac{1}{8000}, 2\right)$$

$$\text{Mínimo: } \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2000}, -2\right) = \left(\frac{3}{8000}, -2\right)$$



► La gráfica de $P = 2$ sen $4000\pi t$ se muestra a la izquierda.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

1. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 1, cómo cambiaría la función si el audiómetro produjera un tono puro con una frecuencia de 1000 hertz?

Escribir funciones trigonométricas

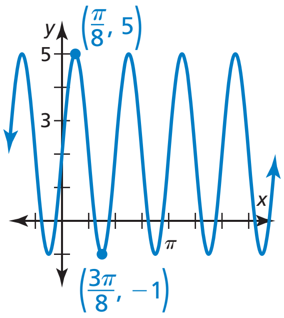
Las gráficas de las funciones seno y coseno se denominan **sinusoides**. Un método para escribir una función seno o coseno que represente una sinusoide es hallar los valores de a, b, h, y k por

$$y = a \text{ sen } b(x - h) + k \qquad \text{o} \qquad y = a \cos b(x - h) + k$$

donde $|a|$ es la amplitud, $\frac{2\pi}{b}$ es el periodo ($b > 0$), h es el desplazamiento horizontal y k es el desplazamiento vertical.

EJEMPLO 2 Escribir una función trigonométrica

Escribe una función para la sinusoide que se muestra.



SOLUCIÓN

Paso 1 Halla los valores máximo y mínimo. Con base en la gráfica, el valor máximo es 5 y el valor mínimo es -1.

Paso 2 Identifica el desplazamiento vertical, k. El valor de k es la media de los valores máximo y mínimo.

$$k = \frac{(\text{valor máximo}) + (\text{valor mínimo})}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Paso 3 Decide si la gráfica se debería representar mediante una función seno o coseno. Dado que la gráfica cruza la línea media $y = 2$ en el eje y, la gráfica es una curva sinusoide sin desplazamiento horizontal. Entonces, $h = 0$.

CONSEJO DE ESTUDIO

Dado que la gráfica repite cada $\frac{\pi}{2}$ unidades, el periodo es $\frac{\pi}{2}$.

Paso 4 Halla la amplitud y el periodo. El periodo es

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{b} \quad \Rightarrow \quad b = 4.$$

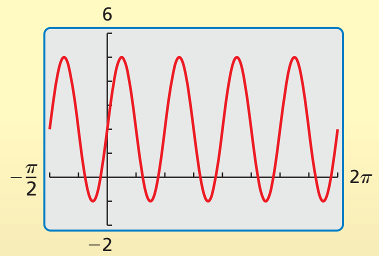
La amplitud es

$$|a| = \frac{(\text{valor máximo}) - (\text{valor mínimo})}{2} = \frac{5 - (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

La gráfica no es una reflexión, entonces $a > 0$. Por lo tanto, $a = 3$.

► La función es $y = 3 \text{ sen } 4x + 2$. Verifícalo haciendo una gráfica de la función en una calculadora gráfica.

Verifica



EJEMPLO 3 Representar el movimiento circular

Dos personas balancean sogas para saltar, tal como se muestra en el diagrama. El punto más alto del medio de cada soga está a 75 pulgadas sobre el suelo y el punto más bajo está a 3 pulgadas. La soga hace 2 revoluciones por segundo. Escribe un modelo para la altura h (en pulgadas) de una soga como una función del tiempo t (en segundos) dado que la soga está en su punto más bajo cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN

Una soga oscila entre 3 pulgadas y 75 pulgadas sobre el suelo. Entonces, una función seno o coseno podría ser un modelo apropiado para la altura en el tiempo.

Paso 1 Identifica los valores máximo y mínimo. La altura máxima de una soga es 75 pulgadas. La altura mínima es 3 pulgadas.

Paso 2 Identifica el desplazamiento vertical, k.

$$k = \frac{(\text{valor máximo}) + (\text{valor mínimo})}{2} = \frac{75 + 3}{2} = 39$$

Paso 3 Decide si la altura debería representarse mediante una función seno o coseno. Cuando $t = 0$, la altura está en su mínimo. Entonces, usa una función coseno cuya gráfica sea una reflexión en el eje x que no tenga desplazamiento horizontal ($h = 0$).

Paso 4 Halla la amplitud y el periodo.

$$\text{La amplitud es } |a| = \frac{(\text{valor máximo}) - (\text{valor mínimo})}{2} = \frac{75 - 3}{2} = 36.$$

Dado que la gráfica es una reflexión en el eje x, $a < 0$. Entonces, $a = -36$. Dado que una soga rota a una velocidad de 2 revoluciones por segundo, una revolución se completa en 0.5 segundos. Entonces, el periodo es $\frac{2\pi}{b} = 0.5$, y $b = 4\pi$.

▶ Un modelo para la altura de la soga es $h(t) = -36 \cos 4\pi t + 39$.

Verifica

Usa la función *tabla* de una calculadora gráfica para verificar tu modelo.

X	Y1	
0	3	
.25	75	
.5	3	2 revoluciones
.75	75	
1	3	
1.25	75	
1.5	3	

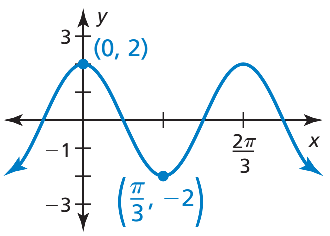
X=0

Monitoreo del progreso

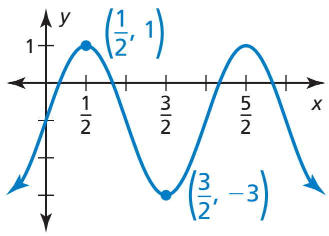
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe una función para la sinusoide.

2.



3.

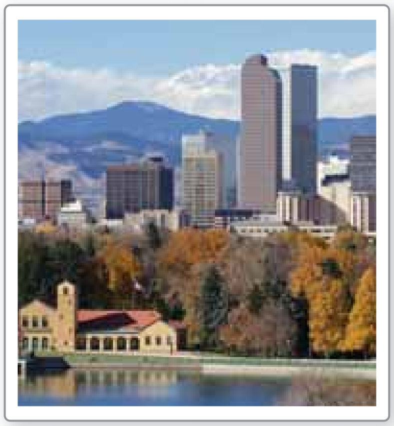


4. **¿QUÉ PASA SI?** Describe cómo cambia el modelo en el Ejemplo 3 cuando el punto más bajo de una soga está a 5 pulgadas sobre el suelo y el punto más alto está a 70 pulgadas sobre el suelo.

Usar la tecnología para hallar modelos trigonométricos

Otra manera de representar las sinusoides es usar una calculadora gráfica que tenga una función de regresión sinusoidal.

EJEMPLO 4 Usar la regresión sinusoidal



La tabla muestra los números N de horas de luz del día en Denver, Colorado, en el día 15 de cada mes, donde $t = 1$ representa Enero. Escribe un modelo que dé N como una función de t e interpreta el periodo de su gráfica.

t	1	2	3	4	5	6
N	9.68	10.75	11.93	13.27	14.38	14.98

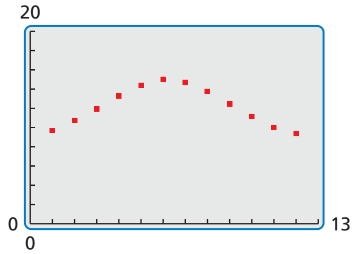
t	7	8	9	10	11	12
N	14.70	13.73	12.45	11.17	9.98	9.38

SOLUCIÓN

Paso 1 Ingresa los datos en la calculadora gráfica.

```
L1   | L2     | L3      1
1    | 9.68   | ------
2    | 10.75  |
3    | 11.93  |
4    | 13.27  |
5    | 14.38  |
6    | 14.98  |
7    | 14.7   |
L1(1)=1
```

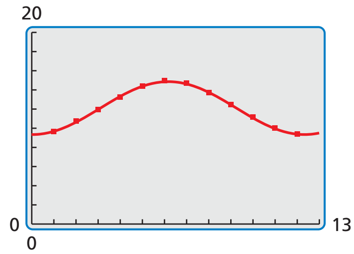
Paso 2 Haz un diagrama de dispersión.



Paso 3 El diagrama de dispersión parece sinusoidal. Entonces haz una regresión sinusoidal.

```
RegSin
 y=a*sin(bx+c)+d
 a=2.764734198
 b=.5111635715
 c=-1.591149599
 d=12.13293913
```

Paso 4 Haz una gráfica de los datos y el modelo en la misma ventana de visualización.



CONSEJO DE ESTUDIO

Observa que la función *regresión sinusoidal* halla un modelo de la forma $y = a \text{ sen}(bx + c) + d$. Esta función tiene un periodo de $\frac{2\pi}{b}$ dado que se puede escribir como $y = a \text{ sen } b\left(x + \frac{c}{b}\right) + d$.

▶ El modelo parece ajustarse bien. Entonces, un modelo para los datos es $N = 2.76 \text{ sen}(0.511t - 1.59) + 12.1$. El periodo, $\frac{2\pi}{0.511} \approx 12$, tiene sentido porque hay 12 meses en un año y puedes esperar que este patrón continúe en los años siguientes.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

5. La tabla muestra la temperatura diaria promedio T (en grados Farenheit) para una ciudad cada mes, donde $m = 1$ representa enero. Escribe un modelo que dé T como una función de m e interpreta el periodo de su gráfica.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T	29	32	39	48	59	68	74	72	65	54	45	35

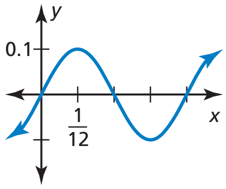
9.6 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Las gráficas de las funciones seno y coseno se denominan ___________.

2. **ESCRIBIR** Describe cómo hallar la frecuencia de la función cuya gráfica se muestra.



Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–10 halla la frecuencia de la función.

3. $y = \text{sen } x$

4. $y = \text{sen } 3x$

5. $y = \cos 4x + 2$

6. $y = -\cos 2x$

7. $y = \text{sen } 3\pi x$

8. $y = \cos \dfrac{\pi x}{4}$

9. $y = \dfrac{1}{2} \cos 0.75x - 8$

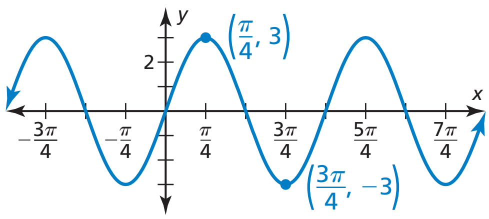
10. $y = 3 \text{ sen } 0.2x + 6$

11. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La frecuencia más baja de los sonidos que los humanos pueden oír es 20 hertz. La presión máxima P producida a partir de un sonido con una frecuencia de 20 hertz es de 0.02 milipascales. Escribe y haz una gráfica de un modelo de la función seno que dé la presión P como función del tiempo t (en segundos). *(Consulta el Ejemplo 1).*

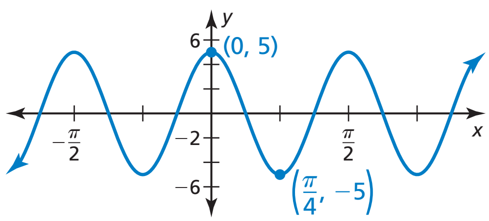
12. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un diapasón vibra con una frecuencia f de 440 hertz (ciclos por segundo). Golpeas un diapasón con una fuerza que produce una presión máxima de 5 pascales. Escribe y haz la gráfica de un modelo de función seno que dé la presión P como función del tiempo t (en segundos).

En los Ejercicios 13–16, escribe una función para la sinusoide. *(Consulta el Ejemplo 2).*

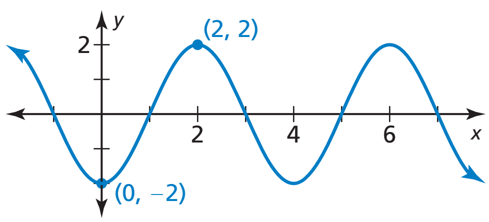
13.



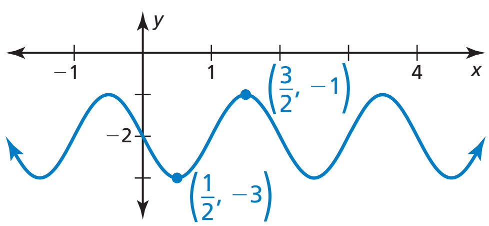
14.



15.



16.



17. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar la amplitud de una sinusoide con un punto máximo en (2, 10) y un punto mínimo en (4, -6).

$$\begin{aligned} |a| &= \frac{(\text{valor máximo}) + (\text{valor mínimo})}{2} \\ &= \frac{10 - 6}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

18. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar el desplazamiento vertical de una sinusoide con un punto máximo en (3, -2) y un punto mínimo en (7, -8).

$$\begin{aligned} k &= \frac{(\text{valor máximo}) + (\text{valor mínimo})}{2} \\ &= \frac{7 + 3}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

19. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Una de las máquinas de coser más grandes del mundo tiene un *volante* (que gira cuando la máquina cose) de 5 pies de diámetro. El punto más alto de la manivela en el borde del volante está a 9 pies sobre el suelo, y el punto más bajo está a 4 pies. El volante hace una vuelta completa cada 2 segundos. Escribe un modelo para la altura h (en pies) de la manivela como función del tiempo t (en segundos) dado que la manivela está en su punto más bajo cuando $t = 0$. *(Consulta el Ejemplo 3).*

20. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La Noria de Great Laxey, que se encuentra en la Isla de Man, es la noria de agua en funcionamiento más grande del mundo. El punto más alto de una cubeta en la noria está a 70.5 pies sobre el mirador y el punto más bajo está a 2 pies debajo del mirador. La noria da una vuelta completa cada 24 segundos. Escribe un modelo para la altura h (en pies) de la cubeta como función del tiempo t (en segundos) dado que la cubeta está en su punto más bajo cuando $t = 0$.

USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 21 y 22, el tiempo t se mide en meses, donde $t = 1$ representa enero. Escribe un modelo que dé la temperatura alta promedio mensual D como función de t e interpreta el periodo de la gráfica. *(Consulta el Ejemplo 4).*

21.

Temperaturas del aire en Apple Valley, California

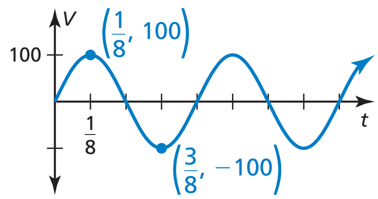
t	1	2	3	4	5	6
D	60	63	69	75	85	94
t	7	8	9	10	11	12
D	99	99	93	81	69	60

22.

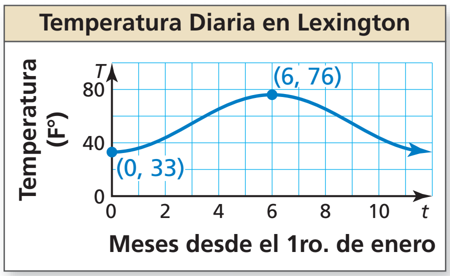
Temperaturas del agua en Miami Beach, Florida

t	1	2	3	4	5	6
D	71	73	75	78	81	85
t	7	8	9	10	11	12
D	86	85	84	81	76	73

23. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Un circuito tiene un voltaje alterno de 100 voltios que genera picos cada 0.5 segundos. Escribe un modelo sinusoidal para el voltaje V como función del tiempo t (en segundos).



24. REPRESENTACIONES MÚLTIPLES La gráfica muestra la temperatura diaria promedio de Lexington, Kentucky. La temperatura diaria promedio de Louisville, Kentucky, está representada mediante $y = -22 \cos \frac{\pi}{6}t + 57$, donde y es la temperatura (en grados Farenheit) y t es el número de meses desde el 1ro de enero. ¿Qué ciudad tiene el promedio de temperatura diaria más alto? Explica.



25. USAR HERRAMIENTAS La tabla muestra los números de empleados N (en miles) en una compañía de artículos deportivos cada año durante 11 años. El tiempo t se mide en años, donde $t = 1$ representa el primer año.

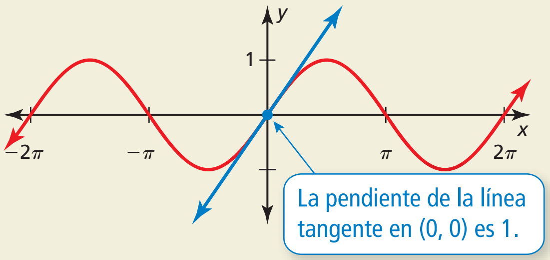
t	1	2	3	4	5	6
N	20.8	22.7	24.6	23.2	20	17.5

t	7	8	9	10	11	12
N	16.7	17.8	21	22	24.1	

a. Usa la regresión sinusoidal para hallar un modelo que dé N como función de t.

b. Predice el número de empleados en la compañía en el duodécimo año.

26. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO La figura muestra una línea tangente dibujada a la gráfica de la función $y =$ sen x. En varios puntos de la gráfica, dibuja una línea tangente a la gráfica y estima su pendiente. Luego marca los puntos (x, m), donde m es la pendiente de la línea tangente. ¿A qué conclusión puedes llegar?



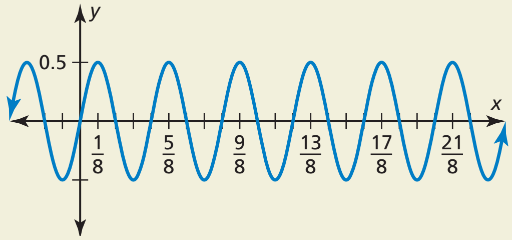
27. RAZONAR Determina si usarías una función seno o coseno para representar cada sinusoide con la intersección con el eje y descrita. Explica tu razonamiento.

a. La intersección con el eje y ocurre en el valor máximo de la función.

b. La intersección con el eje y ocurre en el valor mínimo de la función.

c. La intersección con el eje y ocurre entre los valores máximo y mínimo de la función.

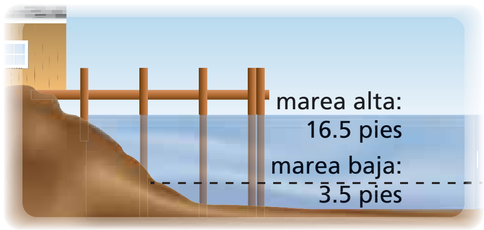
28. ¿CÓMO LO VES? ¿Cuál es la frecuencia de la función cuya gráfica se muestra? Explica.



29. USAR LA ESTRUCTURA Durante un ciclo, una sinusoide tiene un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ y un máximo en $\left(\frac{\pi}{4}, 8\right)$. Escribe una función seno y una función coseno para la sinusoide. Usa una calculadora gráfica para verificar que tus respuestas sean correctas.

30. ARGUMENTAR Tu amigo dice que una función con una frecuencia de 2 tiene un periodo mayor que una función con una frecuencia de $\frac{1}{2}$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

31. RESOLVER PROBLEMAS La marea baja en un puerto es de 3.5 pies y ocurre a medianoche. Después de 6 horas, el puerto está en marea alta, que es de 16.5 pies.



a. Escribe un modelo sinusoidal que dé la profundidad de la marea d (en pies) como función del tiempo t (en horas). Imagina que $t = 0$ representa la medianoche.

b. Halla todas las veces en que ocurren mareas bajas y altas en un periodo de 24 horas.

c. Explica cómo se relaciona la gráfica de la función que escribiste en la parte (a) con una gráfica que muestra la profundidad de la marea d en el puerto t horas después de las 3:00 A.M.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Simplifica la expresión. *(Sección 5.2)*

32. $\dfrac{17}{\sqrt{2}}$ **33.** $\dfrac{3}{\sqrt{6} - 2}$ **34.** $\dfrac{8}{\sqrt{10} + 3}$ **35.** $\dfrac{13}{\sqrt{3} + \sqrt{11}}$

Desarrolla la expresión logarítmica. *(Sección 6.5)*

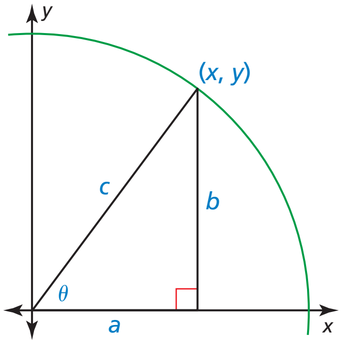
36. $\log_8 \dfrac{x}{7}$ **37.** $\ln 2x$ **38.** $\log_3 5x^3$ **39.** $\ln \dfrac{4x^6}{y}$

9.7 Usar identidades trigonométricas

Pregunta esencial ¿Cómo puedes verificar una identidad trigonométrica?

EXPLORACIÓN 1 **Escribir una identidad trigonométrica**

Trabaja con un compañero En la figura, el punto (x, y) está en un círculo de radio c con el centro en el origen.



a. Escribe una ecuación que relacione a, b, y c.

b. Escribe las expresiones de las razones seno y coseno del ángulo θ.

c. Usa los resultados de las partes (a) y (b) para hallar la suma de $\text{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$. ¿Qué observas?

d. Completa la tabla para verificar que la identidad que escribiste en la parte (c) sea válida para los ángulos (de tu elección) en cada uno de los cuatro cuadrantes.

	θ	$\text{sen}^2\,\theta$	$\cos^2\,\theta$	$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta$
QI				
QII				
QIII				
QIV				

EXPLORACIÓN 2 **Escribir otras identidades trigonométricas**

Trabaja con un compañero. La identidad trigonométrica que dedujiste en la Exploración 1 se denomina identidad Pitagórica. Hay otras dos identidades Pitagóricas. Para deducirlas, recuerda las cuatro relaciones:

$$\tan\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta} \qquad \cot\,\theta = \frac{\cos\,\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\sec\,\theta = \frac{1}{\cos\,\theta} \qquad \csc\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

RAZONAR DE MANERA ABSTRACTA

Para dominar las matemáticas, necesitas conocer y usar en forma flexible las diferentes propiedades de las operaciones y los objetos.

a. Divide cada lado de la identidad pitagórica que dedujiste en la Exploración 1 entre $\cos^2\theta$ y simplifica. ¿Qué observas?

b. Divide cada lado de la identidad Pitagórica que dedujiste en la Exploración 1 entre $\text{sen}^2\theta$ y simplifica. ¿Qué observas?

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes verificar una identidad trigonométrica?

4. ¿Es $\text{sen}\,\theta = \cos\,\theta$ una identidad trigonométrica? Explica tu razonamiento.

5. Da algunos ejemplos de identidades trigonométricas que sean diferentes a las de las Exploraciones 1 y 2.

9.7 Lección

Qué aprenderás

- Usar identidades trigonométricas para evaluar funciones trigonométricas y simplificar expresiones trigonométricas.
- Verificar identidades trigonométricas.

Vocabulario Esencial

identidad trigonométrica, *pág. 514*

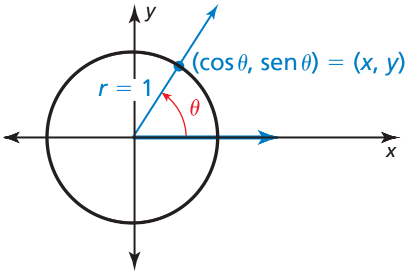
Anterior
círculo unitario

CONSEJO DE ESTUDIO

Observa que $\text{sen}^2\,\theta$ representa a $(\text{sen}\,\theta)^2$ y $\cos^2\theta$ representa a $(\cos\theta)^2$.

Usar identidades trigonométricas

Recuerda que si un ángulo θ está en posición estándar y su lado terminal interseca el círculo unitario en (x, y), entonces $x = \cos\theta$ y $y = \text{sen}\,\theta$. Dado que (x, y) está en un círculo centrado en el origen con radio 1, se infiere que $x^2 + y^2 = 1$ y $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$.



$$x^2 + y^2 = 1$$

y

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1.$$

La ecuación $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$ es verdadera para todo valor de θ. Una ecuación trigonométrica que es verdadera para todos los valores de la variable por la que se definen ambos lados de la ecuación se denomina **identidad trigonométrica**. En la sección 9.1, usaste identidades recíprocas para hallar los valores de las funciones cosecante, secante y cotangente. Estas y otras identidades trigonométricas fundamentales están enumeradas a continuación.

Concepto Esencial

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades tangente y cotangente

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Identidades cofuncionales

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\,\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

Identidades de ángulo negativo

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

En esta sección, usarás identidades trigonométricas para hacer lo siguiente.

- Evaluar funciones trigonométricas.
- Simplificar expresiones trigonométricas.
- Verificar otras identidades trigonométricas.

EJEMPLO 1 Hallar valores trigonométricos

Dado que $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, halla los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN

Paso 1 Halla $\cos \theta$.

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \qquad \text{Escribe la identidad pitagórica.}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \qquad \text{Sustituye } \frac{4}{5} \text{ por sen } \theta.$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \qquad \text{Resta } \left(\frac{4}{5}\right)^2 \text{ de cada lado.}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25} \qquad \text{Simplifica.}$$

$$\cos \theta = \pm\frac{3}{5} \qquad \text{Saca la raíz cuadrada de cada lado.}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \qquad \text{Dado que } \theta \text{ está en el Cuadrante II, cos } \theta \text{ es negativo.}$$

Paso 2 Halla los valores de las otras cuatro funciones trigonométricas de θ usando los valores de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$.

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \qquad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

EJEMPLO 2 Simplificar expresiones trigonométricas

Simplifica (a) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\operatorname{sen} \theta$ y (b) $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta$.

SOLUCIÓN

a. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\operatorname{sen} \theta = \cot \theta \operatorname{sen} \theta$ Identidad cofuncional

$= \left(\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}\right)(\operatorname{sen} \theta)$ Identidad cotangente

$= \cos \theta$ Simplifica.

b. $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta = \sec \theta(\sec^2 \theta - 1) + \sec \theta$ Identidad pitagórica

$= \sec^3 \theta - \sec \theta + \sec \theta$ Propiedad distributiva

$= \sec^3 \theta$ Simplifica.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

1. Dado que $\cos \theta = \frac{1}{6}$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, halla los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

Simplifica la expresión.

2. $\operatorname{sen} x \cot x \sec x$

3. $\cos \theta - \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$

4. $\dfrac{\tan x \csc x}{\sec x}$

Verificar identidades trigonométricas

Puedes usar las identidades fundamentales de este capítulo para verificar nuevas identidades trigonométricas. Al verificar una identidad, comienza con la expresión a un lado. Usa el álgebra y las propiedades trigonométricas para manipular la expresión hasta que sea idéntica al otro lado.

EJEMPLO 3 Verificar una identidad trigonométrica

Verifica la identidad $\dfrac{\sec^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} = \operatorname{sen}^2 \theta$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\sec^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} = \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} - \frac{1}{\sec^2 \theta}$$ Escribe como fracciones separadas.

$$= 1 - \left(\frac{1}{\sec \theta}\right)^2$$ Simplifica.

$$= 1 - \cos^2 \theta$$ Identidad recíproca

$$= \operatorname{sen}^2 \theta$$ Identidad pitagórica

Observa que verificar una identidad no es lo mismo que resolver una ecuación. Al verificar una identidad, no puedes presuponer que los dos lados de la ecuación son iguales porque estás tratando de verificar si son iguales. Entonces, no puedes usar ninguna propiedad de igualdad, tales como sumar la misma cantidad a cada lado de la ecuación.

EJEMPLO 4 Verificar una identidad trigonométrica

Verifica la identidad $\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para verificar la identidad, debes ingresar 1 − sen *x* a los denominadores. Multiplica el numerador y el denominador por 1 − sen *x* para obtener una expresión equivalente.

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \tan x$$ Identidad recíproca

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$ Identidad tangente

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$$ Suma las fracciones.

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$$ Multiplica por $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}$$ Simplifica el numerador.

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}$$ Identidad pitagórica

$$= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$$ Simplifica.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Verifica la identidad.

5. $\cot(-\theta) = -\cot \theta$

6. $\csc^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \cot^2 x$

7. $\cos x \csc x \tan x = 1$

8. $(\tan^2 x + 1)(\cos^2 x - 1) = -\tan^2 x$

9.7 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Describe la diferencia entre una identidad trigonométrica y una ecuación trigonométrica.

2. **ESCRIBIR** Explica cómo usar identidades trigonométricas para determinar si $\sec(-\theta) = \sec\,\theta$ o $\sec(-\theta) = -\sec\,\theta$.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–10, halla los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de θ. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

4. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{10},\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

5. $\tan\theta = -\frac{3}{7},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

6. $\cot\theta = -\frac{2}{5},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

7. $\cos\theta = -\frac{5}{6},\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

8. $\sec\theta = \frac{9}{4},\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

9. $\cot\theta = -3,\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

10. $\csc\theta = -\frac{5}{3},\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

En los Ejercicios 11–20, simplifica la expresión. *(Consulta el Ejemplo 2).*

11. $\operatorname{sen} x \cot x$

12. $\cos\theta(1 + \tan^2\theta)$

13. $\dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

14. $\dfrac{\cos^2 x}{\cot^2 x}$

15. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\csc x}$

16. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$

17. $\dfrac{\csc^2 x - \cot^2 x}{\operatorname{sen}(-x)\cot x}$

18. $\dfrac{\cos^2 x\tan^2(-x) - 1}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\csc\theta} + \cos^2\theta$

20. $\dfrac{\sec x\operatorname{sen} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sec x}$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 21 y 22, describe y corrige el error cometido al simplificar la expresión.**

21.

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{sen}^2\theta &= 1 - (1 + \cos^2\theta) \\ &= 1 - 1 - \cos^2\theta \\ &= -\cos^2\theta \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} \tan x \csc x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

En los Ejercicios 23–30, verifica la identidad. *(Consulta los Ejemplos 3 y 4).*

23. $\operatorname{sen} x \csc x = 1$

24. $\tan\theta\csc\theta\cos\theta = 1$

25. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot x = \cos x$

26. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x = \operatorname{sen} x$

27. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 1}{1 - \operatorname{sen}(-\theta)} = 1$

28. $\dfrac{\operatorname{sen}^2(-x)}{\tan^2 x} = \cos^2 x$

29. $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = 2\csc x$

30. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos(-x)} = \csc x + \cot x$

31. **USAR LA ESTRUCTURA** Una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$. Una función es *par* si $f(-x) = f(x)$. ¿Cuál de las seis funciones trigonométricas son impares? ¿Cuáles son pares? Justifica tus respuestas usando identidades y gráficas.

32. **ANALIZAR RELACIONES** ¿Al aumentar el valor de $\cos\,\theta$, qué pasa con el valor de $\sec\,\theta$? Explica tu razonamiento.

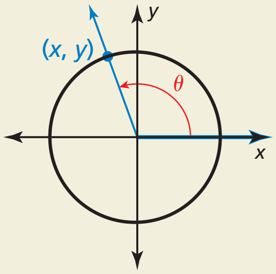
33. ARGUMENTAR Tu amigo simplifica una expresión y obtiene $\sec x \tan x - \operatorname{sen} x$. Tú simplificas la misma expresión y obtienes $\operatorname{sen} x \tan^2 x$. ¿Tus respuestas son equivalentes? Justifica tu respuesta.

34. ¿CÓMO LO VES? La figura muestra el círculo unitario y el ángulo θ.

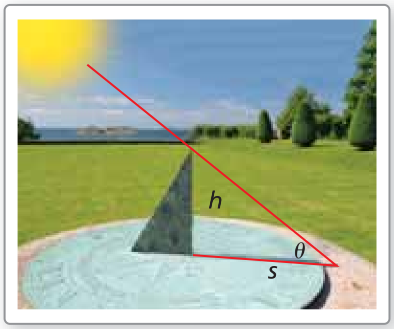
a. ¿Es $\operatorname{sen} \theta$ positivo o negativo? ¿Y $\cos \theta$? ¿Y $\tan \theta$?

b. ¿A qué cuadrante pertenece el lado terminal de $-\theta$?

c. ¿Es $\operatorname{sen}(-\theta)$ positivo o negativo? ¿Y $\cos(-\theta)$? ¿Y $\tan(-\theta)$?



35. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Un *gnomon* vertical (la parte de un reloj de sol que proyecta una sombra) tiene una altura h. La longitud s de la sombra que arroja el gnomon cuando el ángulo del sol sobre el horizonte es θ se puede representar mediante la siguiente ecuación. Demuestra que la ecuación siguiente es equivalente a $s = h \cot \theta$.



$$s = \frac{h \operatorname{sen}(90^\circ - \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$$

36. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Explica cómo puedes usar una identidad trigonométrica para hallar todos los valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x = \cos x$.

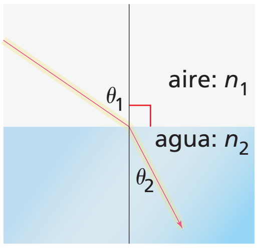
37. SACAR CONCLUSIONES La *fricción estática* es la cantidad de fuerza necesaria para evitar que se mueva un objeto estacionario en una superficie plana. Supón que un libro que pesa W libras está puesto en una rampa inclinada en un ángulo θ. El coeficiente de fricción estática u para el libro se puede hallar usando la ecuación $uW \cos \theta = W \operatorname{sen} \theta$.

a. Resuelve la ecuación para u y simplifica el resultado.

b. Usa la ecuación de la parte (a) para determinar qué pasa con el valor de u al aumentar el ángulo θ de 0° a 90°.

38. RESOLVER PROBLEMAS Cuando la luz que viaja en un medio (tal como el aire) golpea la superficie de un segundo medio (tal como el agua) en un ángulo θ_1, la luz comienza a viajar en un ángulo diferente θ_2. Este cambio de dirección está definido por la ley de Snell, $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$, donde n_1 y n_2 son los *índices de refracción* de los dos medios. La ley de Snell se puede deducir de la ecuación

$$\frac{n_1}{\sqrt{\cot^2 \theta_1 + 1}} = \frac{n_2}{\sqrt{\cot^2 \theta_2 + 1}}.$$



a. Simplifica la ecuación para deducir la ley de Snell.

b. ¿Cuál es el valor de n_1 si $\theta_1 = 55^\circ$, $\theta_2 = 35^\circ$, y $n_2 = 2$?

c. Si $\theta_1 = \theta_2$, entonces qué debe ser verdadero acerca de los valores de n_1 y n_2? Explica cuándo ocurriría esta situación.

39. ESCRIBIR Explica cómo las transformaciones de la gráfica de la función madre $f(x) = \operatorname{sen} x$ apoyan la identidad cofuncional $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$.

40. USAR LA ESTRUCTURA Verifica cada identidad.

a. $\ln|\sec \theta| = -\ln|\cos \theta|$

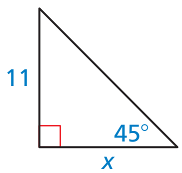
b. $\ln|\tan \theta| = \ln|\operatorname{sen} \theta| - \ln|\cos \theta|$

Mantener el dominio de las matemáticas

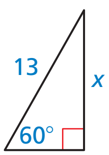
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla el valor de x para el triángulo rectángulo. *(Sección 9.1)*

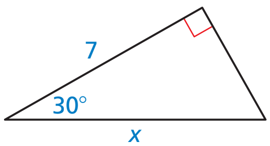
41.



42.



43.



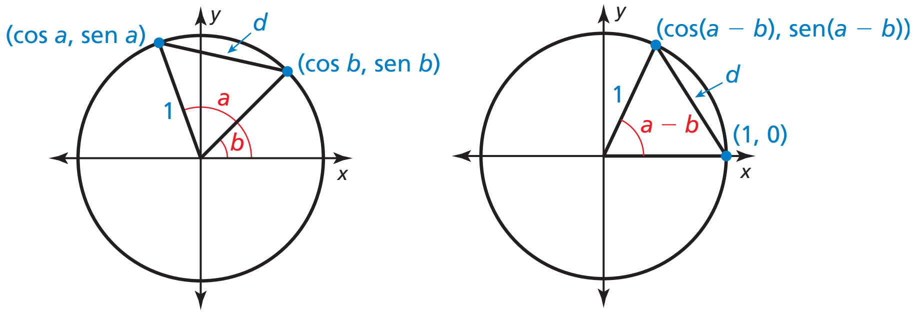
9.8 Usar fórmulas de suma y diferencia

Pregunta esencial ¿Cómo puedes evaluar funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos?

EXPLORACIÓN 1 Deducir una fórmula de diferencia

Trabaja con un compañero.

a. Explica por qué los dos triángulos que se muestran son congruentes.



b. Usa la fórmula de distancia para escribir una expresión para *d* en el primer círculo unitario.

c. Usa la fórmula de distancia para escribir una expresión para *d* en el segundo círculo unitario.

d. Escribe una ecuación que relacione las expresiones en las partes (b) y (c). Luego simplifica esta ecuación para obtener una fórmula para $\cos(a - b)$.

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas comprender y usar las suposiciones y definiciones expresadas, y los resultados previamente establecidos.

EXPLORACIÓN 2 Deducir una fórmula de suma

Trabaja con un compañero. Usa la fórmula de diferencia que dedujiste en la Exploración 1 para escribir una fórmula para $\cos(a + b)$ en términos del seno y coseno de a y b. *Pista*: Usa el hecho de que

$$\cos(a + b) = \cos[a - (-b)].$$

EXPLORACIÓN 3 Deducir fórmulas de diferencia y de suma

Trabaja con un compañero. Usa las fórmulas que dedujiste en las Exploraciones 1 y 2 para escribir fórmulas para $\operatorname{sen}(a - b)$ y $\operatorname{sen}(a + b)$ en términos del seno y el coseno de a y b. *Pista*: Usa las identidades cofuncionales.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \text{ y } \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a$$

y el hecho de que

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] = \operatorname{sen}(a - b) \text{ y } \operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}[a - (-b)].$$

Comunicar tu respuesta

4. ¿Cómo puedes evaluar funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos?

5. **a.** Halla los valores exactos de sen 75° y cos 75° usando fórmulas de suma. Explica tu razonamiento.

b. Halla los valores exactos de sen 75° y cos 75° usando fórmulas de diferencia. Compara tus respuestas con las respuestas de la parte (a).

9.8 Lección

Vocabulario Esencial

Anterior
razón

Qué aprenderás

- Usar fórmulas de suma y diferencia para evaluar y simplificar expresiones trigonométricas.
- Usar fórmulas de suma y diferencia para resolver ecuaciones trigonométricas y reescribir fórmulas de la vida real.

Usar Formulas de suma y diferencia

En esta lección, estudiarás fórmulas que te permitan evaluar funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos.

Concepto Esencial

Fórmulas de suma y diferencia

Fórmulas de suma	**Fórmulas de diferencia**
$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$	$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	$\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

En generall, $\operatorname{sen}(a + b) \neq \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$. Se pueden hacer enunciados similares para las otras funciones trigonométricas de sumas y diferencias.

EJEMPLO 1 Evaluar expresiones trigonométricas

Halla el valor exacto de (a) sen 15° y (b) $\tan \dfrac{7\pi}{12}$.

SOLUCIÓN

a. $\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}(60° - 45°)$ — Sustituye $60° - 45°$ por 15°.

$= \operatorname{sen} 60° \cos 45° - \cos 60° \operatorname{sen} 45°$ — Fórmula de diferencia para seno

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — Evalúa.

$= \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ — Simplifica.

▶ El valor exacto de sen 15° es $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Verifícalo con una calculadora.

Verifica

```
sen(15°)
      .2588190451
(√(6)-√(2))/4
      .2588190451
```

b. $\tan \dfrac{7\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ — Sustituye $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ por $\dfrac{7\pi}{12}$.

$= \dfrac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}}$ — Fórmula de suma para tangente

$= \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1}$ — Evalúa.

$= -2 - \sqrt{3}$ — Simplifica.

▶ El valor exacto de $\tan \dfrac{7\pi}{12}$ es $-2 - \sqrt{3}$. Verifícalo con una calculadora.

Verifica

```
tan(7π/12)
      -3.732050808
-2-√(3)
      -3.732050808
```

EJEMPLO 2 Usar una fórmula de diferencia

Halla $\cos(a - b)$ dado que $\cos a = -\frac{4}{5}$ con $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ y $\operatorname{sen} b = \frac{5}{13}$ con $0 < b < \frac{\pi}{2}$.

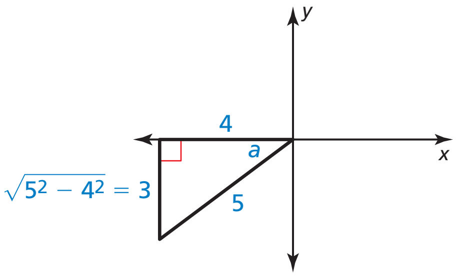
OTRA MANERA

También puedes usar una identidad pitagórica y signos de cuadrante para hallar sen *a* y cos *b*.

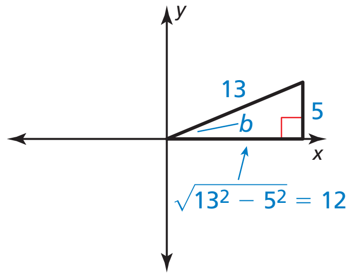
SOLUCIÓN

Paso 1 Halla sen a y cos b.

Dado que $\cos a = -\frac{4}{5}$ y que a está en el Cuadrante III, $\operatorname{sen} a = -\frac{3}{5}$, tal como se muestra en la figura.



Dado que $\operatorname{sen} b = \frac{5}{13}$ y que b está en el Cuadrante I, $\cos b = \frac{12}{13}$, tal como se muestra en la figura.



Paso 2 Usa la fórmula de diferencia para la función coseno para hallar $\cos(a - b)$.

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad \text{Fórmula de diferencia para coseno}$$

$$= -\frac{4}{5}\left(\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) \qquad \text{Evalúa.}$$

$$= -\frac{63}{65} \qquad \text{Simplifica.}$$

▶ El valor de $\cos(a - b)$ es $-\frac{63}{65}$.

EJEMPLO 3 Simplificar una expresión

Simplifica la expresión $\cos(x + \pi)$.

SOLUCIÓN

$$\cos(x + \pi) = \cos x \cos \pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi \qquad \text{Fórmula de suma para coseno}$$

$$= (\cos x)(-1) - (\operatorname{sen} x)(0) \qquad \text{Evalúa.}$$

$$= -\cos x \qquad \text{Simplifica.}$$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla el valor exacto de la expresión.

1. sen 105° **2.** cos 15° **3.** $\tan \frac{5\pi}{12}$ **4.** $\cos \frac{\pi}{12}$

5. Halla $\operatorname{sen}(a - b)$ dado que $\operatorname{sen} a = \frac{8}{17}$ con $0 < a < \frac{\pi}{2}$ y $\cos b = -\frac{24}{25}$ con $\pi < b < \frac{3\pi}{2}$.

Simplifica la expresión.

6. $\operatorname{sen}(x + \pi)$ **7.** $\cos(x - 2\pi)$ **8.** $\tan(x - \pi)$

Resolver ecuaciones y rescribir fórmulas

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación trigonométrica

Resuelve $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

OTRA MANERA

También puedes resolver la ecuación usando una calculadora gráfica. Primero, haz la gráfica de cada lado de la ecuación original. Luego usa la función *intersección* para hallar el (los) valor(es) de x donde las expresiones son iguales.

SOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \qquad \text{Escribe la ecuación.}$$

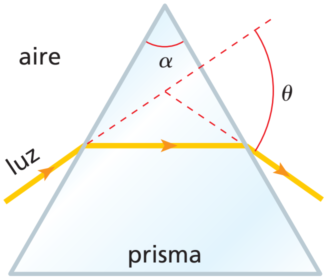
$$\operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 1 \qquad \text{Usa las fórmulas.}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \qquad \text{Evalúa.}$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \qquad \text{Simplifica.}$$

▶ En el intervalo $0 \leq x < 2\pi$, la solución es $x = \frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 5 Rescribir una fórmula de la vida real



El *índice de refracción* de un material transparente es la razón entre la velocidad de la luz en un vacío con la velocidad de la luz en el material. Un prisma triangular, como el que se muestra, se puede usar para medir el índice de refracción usando la fórmula.

$$n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.$$

Para $\alpha = 60°$, demuestra que la fórmula se puede reescribir como $n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2}$.

SOLUCIÓN

$$n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + 30°\right)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \qquad \text{Escribe la fórmula con } \frac{\alpha}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos 30° + \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \qquad \text{Fórmula de suma para seno}$$

$$= \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \qquad \text{Evalúa.}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \qquad \text{Escribe como fracciones separadas.}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} \qquad \text{Simplifica.}$$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

9. Resuelve $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

9.8 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Escribe la expresión $\cos 130° \cos 40° - \operatorname{sen} 130° \operatorname{sen} 40°$ como el coseno de un ángulo.

2. **ESCRIBIR** Explica cómo evaluar $\tan 75°$ usando la fórmula de suma o de diferencia para la tangente.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–10, halla el valor exacto de la expresión. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $\tan(-15°)$
4. $\tan 195°$
5. $\operatorname{sen} \frac{23\pi}{12}$
6. $\operatorname{sen}(-165°)$
7. $\cos 105°$
8. $\cos \frac{11\pi}{12}$
9. $\tan \frac{17\pi}{12}$
10. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

En los Ejercicios 11–16, evalúa la expresión dado que $\cos a = \frac{4}{5}$ con $0 < a < \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen} b = -\frac{15}{17}$ con $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$. *(Consulta el Ejemplo 2).*

11. $\operatorname{sen}(a + b)$
12. $\operatorname{sen}(a - b)$
13. $\cos(a - b)$
14. $\cos(a + b)$
15. $\tan(a + b)$
16. $\tan(a - b)$

En los Ejercicios 17–22, simplifica la expresión. *(Consulta el Ejemplo 3).*

17. $\tan(x + \pi)$
18. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
19. $\cos(x + 2\pi)$
20. $\tan(x - 2\pi)$
21. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$
22. $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 23 y 24, describe y corrige el error cometido al simplificar la expresión.

23. ✗

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\tan x + 1}{1 + \tan x}$$
$$= 1$$

24. ✗

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen} x$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

25. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$ para $0 \le x < 2\pi$?

 (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$
 (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

26. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $\tan x + 1 = 0$ para $0 \le x < 2\pi$?

 (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$
 (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) $\frac{7\pi}{4}$

En los Ejercicios 27—32, resuelve la ecuación para $0 \le x < 2\pi$. *(Consulta el Ejemplo 4).*

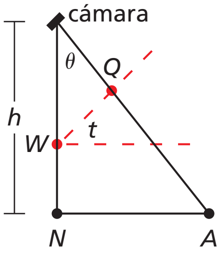
27. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$
28. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
29. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$
30. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
31. $\tan(x + \pi) - \tan(\pi - x) = 0$
32. $\operatorname{sen}(x + \pi) + \cos(x + \pi) = 0$

33. **USAR ECUACIONES** Deduce la identidad cofuncional $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ usando la fórmula de diferencia para la función seno.

34. ARGUMENTAR Tu amigo dice que es posible usar la fórmula de diferencia para la tangente para deducir la identidad cofuncional $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

35. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Un fotógrafo está a una altura h tomando fotografías aéreas con una cámara de 35 milímetros. La razón entre la longitud de la imagen WQ y la longitud NA del objeto real está dada mediante la fórmula

$$\frac{WQ}{NA} = \frac{35 \tan(\theta - t) + 35 \tan t}{h \tan \theta}$$



donde θ es el ángulo entre la línea vertical perpendicular al suelo y la línea desde la cámara al punto A y t es el ángulo de inclinación del filme. Cuando $t = 45°$, demuestra que la fórmula se puede reescribir como $\frac{WQ}{NA} = \frac{70}{h(1 + \tan \theta)}$. *(Consulta el Ejemplo 5).*

36. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Cuando una onda viaja a través de una cuerda tensada, el desplazamiento y de cada punto en la cuerda depende del tiempo t y de la posición del punto x. La ecuación de una *onda estacionaria* se puede obtener sumando los desplazamientos de dos ondas que vayan en direcciones opuestas. Supón que una onda estacionaria se puede representar mediante la fórmula $y = A \cos\left(\frac{2\pi t}{3} - \frac{2\pi x}{5}\right) + A \cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{2\pi x}{5}\right)$.

Si $t = 1$, demuestra que la fórmula se puede reescribir como $y = -A \cos \frac{2\pi x}{5}$.

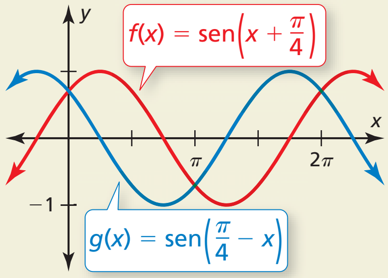
37. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La señal de ocupado en un teléfono de tonos es una combinación de dos tonos con frecuencias de 480 hertz y 620 hertz. Los tonos individuales se pueden representar mediante las ecuaciones:

480 hertz: $y_1 = \cos 960\pi t$

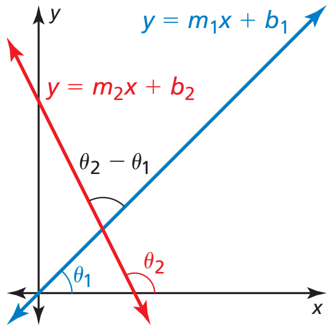
620 hertz: $y_2 = \cos 1240\pi t$

El sonido de la señal de ocupado se puede representar mediante $y_1 + y_2$. Demuestra que $y_1 + y_2 = 2 \cos 1100\pi t \cos 140\pi t$.

38. ¿CÓMO LO VES? Explica cómo usar la figura para resolver la ecuación $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ para $0 \le x < 2\pi$.



39. CONEXIONES MATEMÁTICAS La figura muestra el ángulo agudo de intersección, $\theta_2 - \theta_1$, de dos líneas con pendientes m_1 y m_2.



a. Usa la fórmula de diferencia para la función tangente para escribir una ecuación para $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ en términos de m_1 y m_2.

b. Usa la ecuación en la parte (a) para hallar el ángulo agudo de intersección de las líneas $y = x - 1$ y $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}\right)x + \frac{4 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$.

40. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Reescribe cada función. Justifica tus respuestas.

a. Escribe sen $3x$ como una función de sen x.

b. Escribe cos $3x$ como una función de cos x.

c. Escribe tan $3x$ como una función de tan x.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Resuelve la ecuación. Verifica tu(s) solución(es). *(Sección 7.5)*

41. $1 - \frac{9}{x - 2} = -\frac{7}{2}$

42. $\frac{12}{x} + \frac{3}{4} = \frac{8}{x}$

43. $\frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{10}{x^2 - 1} + 5$

9.5–9.8 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

frecuencia, *pág*. 506
sinusoide, *pág*. 507
identidad trigonométrica, *pág*. 514

Conceptos Esenciales

Sección 9.5

Características de $y = \tan x$ y $y = \cot x$, *pág. 498*
Periodo y asíntotas verticales de $y = a \tan bx$ y $y = a \cot bx$, *pág. 499*
Características de $y = \sec x$ y $y = \csc x$, *pág. 500*

Sección 9.6

Frecuencia, *pág. 506*
Escribir funciones trigonométricas, *pág*. 507
Usar la tecnología para hallar modelos trigonométricos, *pág*. 509

Sección 9.7

Identidades trigonométricas fundamentales, *pág. 514*

Sección 9.8

Formulas de suma y diferencia, *pág. 520*
Ecuaciones trigonométricas y fórmulas de la vida real, *pág*. 522

Prácticas matemáticas

1. Explica por qué la relación entre θ y d tiene sentido en el contexto de la situación en el Ejercicio 43 de la página 503.
2. ¿Cómo puedes usar las definiciones para relacionar la pendiente de una línea con la tangente de un ángulo en el Ejercicio 39 de la página 524?

Tarea de desempeño

Alivianar la carga

Necesitas mover una mesa pesada por la habitación. ¿Cuál es la forma más fácil de moverla? ¿Deberías empujarla? ¿Deberías atar una soga alrededor de una pata de la mesa y tirar de ella? ¿Cómo te puede ayudar la trigonometría a tomar la decisión correcta?

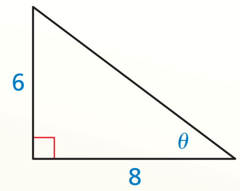
Para explorar las respuestas a estas preguntas y más, visita ***BigIdeasMath.com***.

9 Repaso del capítulo

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

9.1 Trigonometría de triángulo rectángulo *(págs. 461–468)*

Evalúa las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.



Con base en el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es

$$\begin{aligned}\text{hip.} &= \sqrt{6^2 + 8^2}\\ &= \sqrt{100}\\ &= 10.\end{aligned}$$

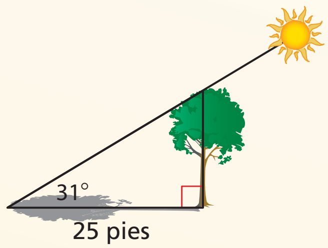
Usando ady. = 8, op. = 6, e hip. = 10, los valores de las seis funciones trigonométricas de θ son:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op.}}{\text{hip.}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \cos \theta = \frac{\text{ady.}}{\text{hip.}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \tan \theta = \frac{\text{op.}}{\text{ady.}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{hip.}}{\text{op.}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \qquad \sec \theta = \frac{\text{hip.}}{\text{ady.}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \qquad \cot \theta = \frac{\text{ady.}}{\text{op.}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

1. En un triángulo rectángulo, θ es un ángulo agudo y $\cos \theta = \frac{6}{11}$. Evalúa las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

2. La sombra de un árbol mide 25 pies desde su base. El ángulo de elevación hacia el sol es 31°. ¿Cuál es la altura del árbol?



9.2 Ángulos y medida radián *(págs. 469–476)*

Convierte la medida en grados a radianes o la medida en radianes a grados.

a. 110°

$$\begin{aligned}110° &= 110 \cancel{\text{grados}}\left(\frac{\pi \text{ radianes}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right)\\ &= \frac{11\pi}{18}\end{aligned}$$

b. $\dfrac{7\pi}{12}$

$$\begin{aligned}\frac{7\pi}{12} &= \frac{7\pi}{12} \cancel{\text{radianes}}\left(\frac{180°}{\pi \cancel{\text{radianes}}}\right)\\ &= 105°\end{aligned}$$

3. Halla un ángulo positivo y un ángulo negativo que sean coterminales con 382°.

Convierte la medida en grados a radianes o la medida en radianes a grados.

4. 30° **5.** 225° **6.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **7.** $\dfrac{5\pi}{3}$

8. Un sistema de rociadores en una granja rota 140° y rocía agua hasta 35 metros. Dibuja un diagrama que muestre la región que se puede irrigar con el rociador. Luego halla el área de la región.

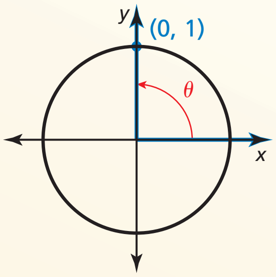
9.3 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo *(págs. 477–484)*

Evalúa csc 210°.

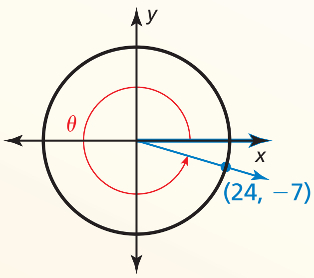
El ángulo de referencia es $\theta' = 210° - 180° = 30°$. La función cosecante es negativa en el Cuadrante III, entonces $\csc 210° = -\csc 30° = -2$.

Evalúa las seis funciones trigonométricas de θ.

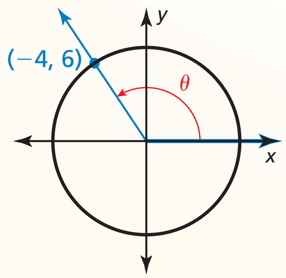
9.



10.



11.



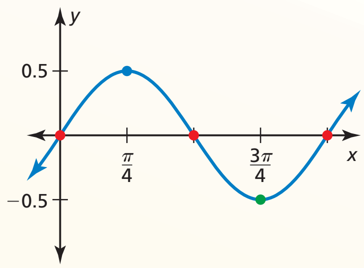
Evalúa la función sin usar una calculadora.

12. $\tan 330°$ **13.** $\sec(-405°)$ **14.** $\operatorname{sen} \dfrac{13\pi}{6}$ **15.** $\sec \dfrac{11\pi}{3}$

9.4 Hacer gráficas de las funciones seno y coseno *(págs. 485–494)*

Identifica la amplitud y el periodo de $g(x) = \frac{1}{2}$ sen $2x$. Luego haz la gráfica de la función y describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) =$ sen x.

La función es de la forma $g(x) = a \operatorname{sen} bx$, donde $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2$ Entonces, la amplitud es $a = \frac{1}{2}$ y el periodo es $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.



Intersecciones: $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{2} \cdot \pi, 0\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $(\pi, 0)$

Máximo: $\left(\frac{1}{4} \cdot \pi, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Mínimo: $\left(\frac{3}{4} \cdot \pi, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

▶ La gráfica de g es un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{2}$ y un encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{2}$ de la gráfica de f.

Identifica la amplitud y el periodo de la función. Luego haz la gráfica de la función y describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de la función madre.

16. $g(x) = 8 \cos x$ **17.** $g(x) = 6 \operatorname{sen} \pi x$ **18.** $g(x) = \frac{1}{4} \cos 4x$

Haz una gráfica de la función.

19. $g(x) = \cos(x + \pi) + 2$ **20.** $g(x) = -\operatorname{sen} x - 4$ **21.** $g(x) = 2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

9.5 Hacer graficas de otras funciones trigonométricas *(págs. 497–504)*

a. Haz la gráfica de un periodo de $g(x) = 7 \cot \pi x$. Describe la gráfica de g como una transformación de $f(x) = \cot x$.

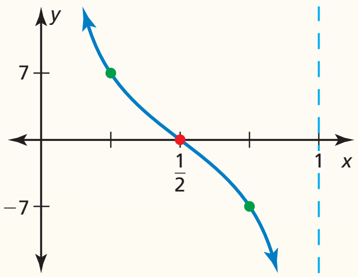
La función es de la forma $g(x) = a \cot bx$, donde $a = 7$ y $b = \pi$. Entonces el periodo es $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\pi} = 1$.

Intersecciones: $\left(\frac{\pi}{2b}, 0\right) = \left(\frac{\pi}{2\pi}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Asíntotas: $x = 0$; $x = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\pi}$, o $x = 1$

Puntos intermedios: $\left(\frac{\pi}{4b}, a\right) = \left(\frac{\pi}{4\pi}, 7\right) = \left(\frac{1}{4}, 7\right)$;

$\left(\frac{3\pi}{4b}, -a\right) = \left(\frac{3\pi}{4\pi}, -7\right) = \left(\frac{3}{4}, -7\right)$



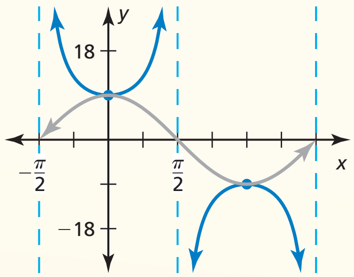
La gráfica de g es un alargamiento vertical por un factor de 7 y un encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{\pi}$ de la gráfica de f.

b. Haz la gráfica de un periodo de $g(x) = 9 \sec x$. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de $f(x) = \sec x$.

Paso 1 Haz la gráfica de la función $y = 9 \cos x$. El periodo es $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Paso 2 Haz una gráfica de las asíntotas de g. Dado que las asíntotas de g ocurren cuando $9 \cos x = 0$, haz una gráfica de $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, y $x = \frac{3\pi}{2}$.

Paso 3 Marca los puntos en g tal como $(0, 9)$ y $(\pi, -9)$. Luego usa las asíntotas para dibujar la curva.



La gráfica de g es un alargamiento vertical por un factor de 9 de la gráfica de f.

Haz la gráfica de un periodo de la función. Describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de su función madre.

22. $g(x) = \tan \frac{1}{2}x$ **23.** $g(x) = 2 \cot x$ **24.** $g(x) = 4 \tan 3\pi x$

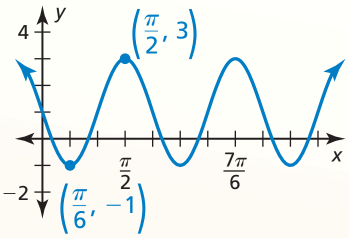
Haz una gráfica de la función.

25. $g(x) = 5 \csc x$ **26.** $g(x) = \sec \frac{1}{2}x$

27. $g(x) = 5 \sec \pi x$ **28.** $g(x) = \frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{4}x$

9.6 Representar con funciones trigonométricas *(págs. 505–512)*

Escribe una función para la sinusoide que se muestra.



Paso 1 Halla los valores mínimo y máximo. Con base en la gráfica, el valor máximo es 3 y el valor mínimo es -1.

Paso 2 Identifica el desplazamiento vertical, k. El valor de k es la media de los valores máximo y mínimo.

$$k = \frac{(\text{valor máximo}) + (\text{valor mínimo})}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Paso 3 Decide si la gráfica debería modelarse mediante una función seno o coseno. Dado que la gráfica cruza la línea media $y = 1$ en el eje y y luego disminuye a su valor mínimo, la gráfica es una curva de seno con una reflexion en el eje x y sin desplazamiento horizontal. Entonces, $h = 0$.

Paso 4 Halla la amplitud y el periodo.

El periodo es $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{b}$. Entonces, $b = 3$.

La amplitud es

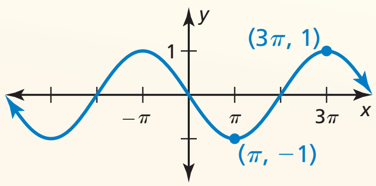
$$|a| = \frac{(\text{valor máximo}) - (\text{valor mínimo})}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ya que la gráfica es una reflexión en el eje x, $a < 0$. Entonces, $a = -2$.

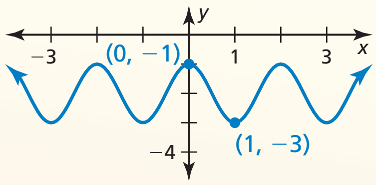
▶ La función es $y = -2 \text{ sen } 3x + 1$.

Escribe una función para la sinusoide.

29.



30.



31. Pones un reflector en un rayo de una rueda de tu bicicleta. El punto más alto del reflector es 25 pulgadas sobre el suelo, y el punto más bajo es 2 pulgadas. El reflector hace 1 revolución por segundo. Escribe un modelo para la altura h (en pulgadas) de un reflector como una función del tiempo t (en segundos) dado que el reflector está en su punto más bajo cuando $t = 0$.

32. La tabla muestra la precipitación mensual P (en pulgadas) para Bismarck, Dakota del Norte, donde $t = 1$ representa enero. Escribe un modelo que dé P como función de t e interpreta el periodo de su gráfica.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0.5	0.5	0.9	1.5	2.2	2.6	2.6	2.2	1.6	1.3	0.7	0.4

9.7 Usar identidades trigonométricas (págs. 513–518)

Verifica la identidad $\dfrac{\cot^2 \theta}{\csc \theta} = \csc \theta - \text{sen}\ \theta$.

$$\frac{\cot^2 \theta}{\csc \theta} = \frac{\csc^2 \theta - 1}{\csc \theta} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{\csc^2 \theta}{\csc \theta} - \frac{1}{\csc \theta} \qquad \text{Escribe como fracciones separadas.}$$

$$= \csc \theta - \frac{1}{\csc \theta} \qquad \text{Simplifica.}$$

$$= \csc \theta - \sin \theta \qquad \text{Identidad recíproca}$$

Simplifica la expresión.

33. $\cot^2 x - \cot^2 x \cos^2 x$

34. $\dfrac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\tan x}$

35. $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

Verifica la identidad.

36. $\dfrac{\cos x \sec x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$

37. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cot x = \csc^2 x - 1$

9.8 Usar fórmulas de suma y diferencia (págs. 519–524)

Halla el valor exacto de sen 105°.

$$\text{sen}\ 105^\circ = \text{sen}(45^\circ + 60^\circ) \qquad \text{Sustituye } 45^\circ + 60^\circ \text{ por } 105^\circ.$$

$$= \text{sen}\ 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ\ \text{sen}\ 60^\circ \qquad \text{Fórmula de suma para seno}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Evalúa.}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \qquad \text{Simplifica.}$$

▶ El valor exacto de sen 105° es $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Halla el valor exacto de la expresión.

38. sen 75°

39. $\tan(-15^\circ)$

40. $\cos \dfrac{\pi}{12}$

41. Halla $\tan(a + b)$, dado que $\tan a = \dfrac{1}{4}$ con $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$ y $\tan b = \dfrac{3}{7}$ con $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$.

Resuelve la ecuación para $0 \le x < 2\pi$.

42. $\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$

43. $\tan(x + \pi) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

9 Prueba del capítulo

Verifica la identidad.

1. $\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$

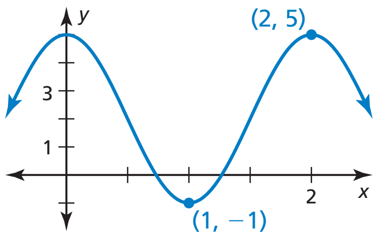
2. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \sec x$

3. $\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

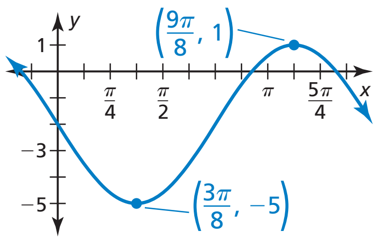
4. Evalúa $\sec(-300°)$ sin usar una calculadora.

Escribe una función para la sinusoide.

5.



6.



Haz una gráfica de la función. Luego, describe la gráfica de g como una transformación de la gráfica de su función madre.

7. $g(x) = -4 \tan 2x$

8. $g(x) = -2 \cos \frac{1}{3}x + 3$

9. $g(x) = 3 \csc \pi x$

Convierte la medida en grados a radianes o la medida en radianes a grados. Luego halla un ángulo positivo y un ángulo negativo que sean coterminales con el ángulo dado.

10. $-50°$

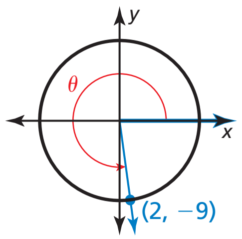
11. $\dfrac{4\pi}{5}$

12. $\dfrac{8\pi}{3}$

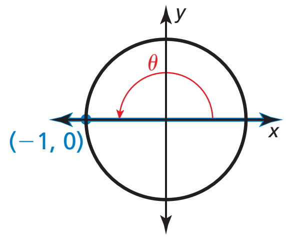
13. Halla la longitud del arco y el área de un sector con radio $r = 13$ pulgadas y ángulo central $\theta = 40°$.

Evalúa las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

14.

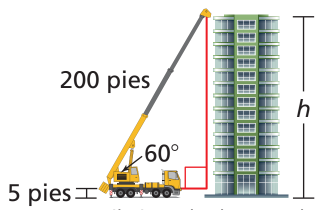


15.



16. ¿A qué cuadrante pertenece el lado terminal de θ si $\cos \theta < 0$ y $\tan \theta > 0$? Explica.

17. ¿Cuál es la altura del edificio? Justifica tu respuesta.



Dibujo no hecho a escala

18. La tabla muestra las temperaturas altas promedio diarias T (en grados Farenheit) en Baltimore, Maryland, donde $m = 1$ representa enero. Escribe un modelo que dé T como función de m e interpreta el periodo de su gráfica.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T	41	45	54	65	74	83	87	85	78	67	56	45

9 Evaluación acumulativa

1. ¿Qué expresiones son equivalentes a 1?

$\tan x \sec x \cos x$	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$	$\dfrac{\cos^2(-x)\tan^2 x}{\operatorname{sen}^2(-x)}$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\csc x$

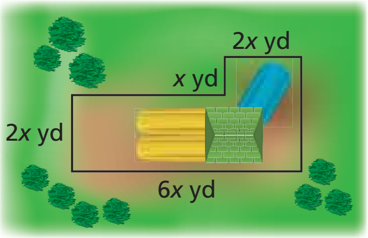
2. ¿Qué expresión racional representa la razón entre el perímetro y el área de la zona de juegos que se muestra en el diagrama?

Ⓐ $\dfrac{9}{7x}$

Ⓑ $\dfrac{11}{14x}$

Ⓒ $\dfrac{1}{x}$

Ⓓ $\dfrac{1}{2x}$



3. La tabla muestra las temperaturas mensuales promedio (en grados Farenheit) y los usos de gas (en pies cúbicos) de un hogar durante 12 meses.

a. Usa una calculadora gráfica para hallar modelos trigonométricos para la temperatura promedio y_1 como función del tiempo y el uso de gas y_2 (en miles de pies cúbicos) como función del tiempo. Imagina que $t = 1$ representa a enero.

b. Haz una gráfica de las dos ecuaciones de regresión en el mismo plano de coordenadas en tu calculadora gráfica. Describe la relación entre las gráficas.

Enero	Febrero	Marzo	Abril
32°F	21°F	15°F	22°F
20,000 pies^3	27,000 pies^3	23,000 pies^3	22,000 pies^3
Mayo	**Junio**	**Julio**	**Agosto**
35°F	49°F	62°F	78°F
21,000 pies^3	14,000 pies^3	8,000 pies^3	9,000 pies^3
Septiembre	**Octubre**	**Noviembre**	**Diciembre**
71°F	63°F	55°F	40°F
13,000 pies^3	15,000 pies^3	19,000 pies^3	23,000 pies^3

4. Evalúa cada logaritmo usando $\log_2 5 \approx 2.322$ y $\log_2 3 \approx 1.585$, si es necesario. Luego ordena los logaritmos por valor, de menor a mayor.

a. $\log 1000$ **b.** $\log_2 15$

c. $\ln e$ **d.** $\log_2 9$

e. $\log_2 \frac{5}{3}$ **f.** $\log_2 1$

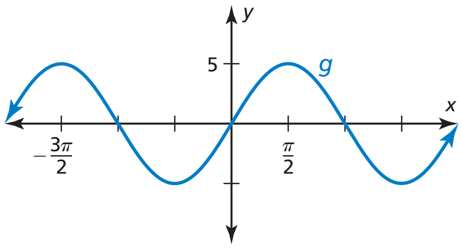
5. ¿Qué función *no* está representada mediante la gráfica?

Ⓐ $y = 5 \text{ sen } x$

Ⓑ $y = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Ⓒ $y = 5 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Ⓓ $y = -5 \text{ sen}(x + \pi)$

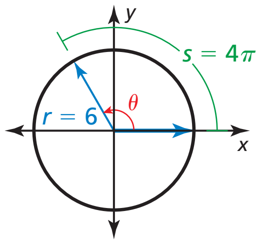


6. Completa cada enunciado con < o > de manera que cada enunciado sea verdadero.

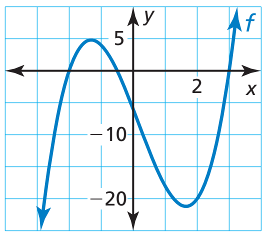
a. θ ☐ 3 radianes

b. $\tan \theta$ ☐ 0

c. θ' ☐ 45°



7. Usa el Teorema de la Raíz Racional y la gráfica para hallar todos los ceros reales de la función $f(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.



8. Tu amigo dice que −210° es coterminal con el ángulo $\frac{5\pi}{6}$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

9. La Compañía A y la Compañía B ofrecen el mismo salario anual inicial de $20,000. La Compañía A da un aumento de $1000 cada año. La Compañía B da un aumento de 4% cada año.

a. Escribe reglas que den los salarios a_n y b_n para tu enésimo año de empleo en la Compañía A y en la Compañía B, respectivamente. Indica si la secuencia representada mediante cada regla es *aritmética*, *geométrica o ninguna de las dos*.

b. Haz una gráfica de cada secuencia en el mismo plano de coordenadas.

c. ¿Bajo qué condiciones elegirías trabajar para la Compañía B?

d. Después de 20 años de empleo, compara tus ganancias totales.