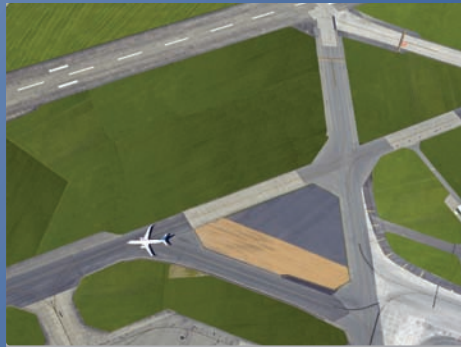


2 Razonamiento y pruebas

- 2.1 Enunciados condicionales
- 2.2 Razonamiento inductivo y deductivo
- 2.3 Postulados y diagramas
- 2.4 Razonamiento algebraico
- 2.5 Demostrar enunciados sobre segmentos y ángulos
- 2.6 Demostrar relaciones geométricas



Pista de un aeropuerto (pág. 108)



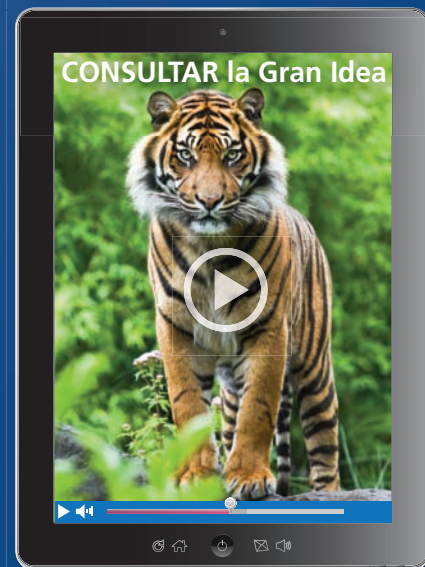
Escultura (pág. 104)



Calle de una ciudad (pág. 95)



Guitarra (pág. 67)



Tigre (pág. 81)

Mantener el dominio de las matemáticas

Hallar el enésimo término de la secuencia aritmética

Ejemplo 1 Escribe una ecuación para el enésimo término de la secuencia aritmética 2, 5, 8, 11, ... Después halla a_{20} .

El primer término es 2 y la diferencia común es 3.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{Ecuación para una secuencia aritmética}$$

$$a_n = 2 + (n - 1)3 \quad \text{Sustituye 2 por } a_1 \text{ y 3 por } d.$$

$$a_n = 3n - 1 \quad \text{Simplifica.}$$

Utiliza la ecuación para hallar el vigésimo término.

$$a_n = 3n - 1 \quad \text{Escribe la ecuación.}$$

$$a_{20} = 3(20) - 1 \quad \text{Sustituye 20 por } n.$$

$$= 59 \quad \text{Simplifica.}$$

► El vigésimo término de la secuencia aritmética es 59.

Escribe una ecuación para el enésimo término de la secuencia aritmética. Después halla a_{50} .

1. 3, 9, 15, 21, ...

2. -29, -12, 5, 22, ...

3. 2.8, 3.4, 4.0, 4.6, ...

4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \dots$

5. 26, 22, 18, 14, ...

6. 8, 2, -4, -10, ...

Reescribir ecuaciones literales

Ejemplo 2 Resuelve la ecuación literal $3x + 6y = 24$ para y .

$$3x + 6y = 24 \quad \text{Escribe la ecuación.}$$

$$3x - 3x + 6y = 24 - 3x \quad \text{Resta } 3x \text{ de cada lado.}$$

$$6y = 24 - 3x \quad \text{Simplifica.}$$

$$\frac{6y}{6} = \frac{24 - 3x}{6} \quad \text{Divide cada lado entre 6.}$$

$$y = 4 - \frac{1}{2}x \quad \text{Simplifica.}$$

► La ecuación literal reescrita es $y = 4 - \frac{1}{2}x$.

Resuelve la ecuación literal para x .

7. $2y - 2x = 10$

8. $20y + 5x = 15$

9. $4y - 5 = 4x + 7$

10. $y = 8x - x$

11. $y = 4x + zx + 6$

12. $z = 2x + 6xy$

13. RAZONAMIENTO ABSTRACTO ¿Puedes utilizar la ecuación de una secuencia aritmética para escribir una ecuación de la secuencia 3, 9, 27, 81, ...? Explica tu razonamiento.

Utilizar la lógica correcta

Concepto Esencial

Razonamiento deductivo

Cuando utilizas el *razonamiento deductivo*, inicias con dos o más enunciados verdaderos para *deducir* o *inferir* la verdad de otro enunciado. A continuación, encontrarás un ejemplo.

1. **Premisa:** Si un polígono es un triángulo, entonces la suma de las medidas de sus ángulos es 180° .
2. **Premisa:** El polígono ABC es un triángulo.
3. **Conclusión:** La suma de las medidas de los ángulos de un polígono ABC es 180° .

Este patrón de razonamiento deductivo se llama *silogismo*.

EJEMPLO 1 Reconocer el razonamiento erróneo

Los siguientes silogismos representan tipos comunes de *razonamiento erróneo*. Explica por qué cada conclusión es inválida.

- | | |
|---|--|
| a. Cuando llueve, el suelo se moja.
El suelo está mojado.
Entonces, debe haber llovido. | b. Si $\triangle ABC$ es equilátero, entonces es isósceles.
$\triangle ABC$ no es equilátero.
Entonces, no es isósceles. |
| c. Todos los cuadrados son polígonos.
Todos los trapecios son cuadriláteros.
Entonces, todos los cuadrados son cuadriláteros. | d. No todos los triángulos son cuadriláteros.
Algunos cuadriláteros no son cuadrados.
Entonces, algunos cuadrados no son triángulos. |

SOLUCIÓN

- a. Quizá el suelo esté mojado por otra razón.
- b. Un triángulo puede ser isósceles pero no equilátero.
- c. Todos los cuadrados son cuadriláteros, pero no porque todos los trapecios sean cuadriláteros.
- d. Ningún cuadrado es triángulo.

Monitoreo del progreso

Decide si el silogismo representa un razonamiento correcto o erróneo. Si es erróneo, explica por qué es inválida la conclusión.

- | | |
|---|---|
| 1. Todos los triángulos son polígonos.
La figura ABC es un triángulo.
Entonces, la figura ABC es un polígono. | 2. Ningún trapecio es rectángulo.
Algunos rectángulos no son cuadrados.
Entonces, algunos cuadrados no son trapecios. |
| 3. Si el polígono $ABCD$ es un cuadrado, entonces es un rectángulo.
El polígono $ABCD$ es un rectángulo.
Entonces, el polígono $ABCD$ es un cuadrado. | 4. Si el polígono $ABCD$ es un cuadrado, entonces es un rectángulo.
El polígono $ABCD$ no es un cuadrado.
Entonces, el polígono $ABCD$ no es un rectángulo. |

2.1 Enunciados condicionales

Pregunta esencial ¿Cuándo es verdadero o falso un enunciado condicional?

Un *enunciado condicional*, simbolizado por $p \rightarrow q$, puede escribirse como un “enunciado si..., entonces” en el cual p es la *hipótesis* y q es la *conclusión*. A continuación, encontrarás un ejemplo.

Si un polígono es un triángulo, entonces la suma de las medidas de sus ángulos es 180° .

hipótesis, p conclusión, q

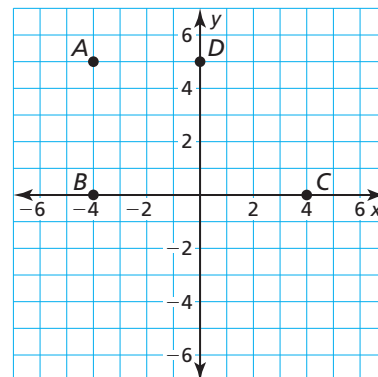
EXPLORACIÓN 1 Determinar si un enunciado es verdadero o falso

Trabaja con un compañero. Una hipótesis puede ser verdadera o falsa. Lo mismo sucede con la conclusión. Para que un enunciado condicional sea verdadero, la hipótesis y conclusión no necesariamente deben ser verdaderas. Determina si cada enunciado condicional es verdadero o falso. Justifica tu respuesta.

- Si ayer fue miércoles, entonces hoy es jueves.
- Si un ángulo es agudo, entonces tiene una medida de 30° .
- Si un mes tiene 30 días, entonces es junio.
- Si un número par no es divisible entre 2, entonces 9 es un cubo perfecto.

EXPLORACIÓN 2 Determinar si un enunciado es verdadero o falso

Trabaja con un compañero. Utiliza los puntos del plano de coordenadas para determinar si cada enunciado es verdadero o falso. Justifica tu respuesta.



- $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.
- $\triangle BDC$ es un triángulo equilátero.
- $\triangle BDC$ es un triángulo isósceles.
- El cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio.
- El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, debes distinguir la lógica o razonamiento correctos de los incorrectos.

EXPLORACIÓN 3 Determinar si un enunciado es verdadero o falso

Trabaja con un compañero. Determina si cada enunciado condicional es verdadero o falso. Justifica tu respuesta.

- Si $\triangle ADC$ es un triángulo rectángulo, el Teorema pitagórico es válido para $\triangle ADC$.
- Si $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios, entonces la suma de sus medidas es 180° .
- Si la figura $ABCD$ es un cuadrilátero, entonces la suma de las medidas de sus ángulos es 180° .
- Si los puntos A , B , y C son colineales, entonces pertenecen a la misma línea.
- Si \vec{AB} y \vec{BD} se intersecan en un punto, forman dos pares de ángulos verticales.

Comunicar tu respuesta

- ¿Cuándo es verdadero o falso un enunciado condicional?
- Escribe un enunciado condicional verdadero y un enunciado condicional falso que sean diferentes de los presentados en la Exploración 3. Justifica tu respuesta.

2.1 Lección

Vocabulario Esencial

enunciado condicional, *pág.* 66
forma si..., entonces, *pág.* 66
hipótesis, *pág.* 66
conclusión, *pág.* 66
negación, *pág.* 66
recíproco, *pág.* 67
inverso, *pág.* 67
contrarrecíproco, *pág.* 67
enunciados equivalentes, *pág.* 67
líneas perpendiculares, *pág.* 68
enunciado bicondicional, *pág.* 69
valor de verdad, *pág.* 70
tabla de verdad, *pág.* 70

Qué aprenderás

- ▶ Escribir enunciados condicionales.
- ▶ Usar definiciones escritas como enunciados condicionales.
- ▶ Escribir enunciados bicondicionales.
- ▶ Elaborar tablas de verdad.

Escribir enunciados condicionales

Concepto Esencial

Enunciado condicional

Un **enunciado condicional** es un enunciado lógico que tiene dos partes, una *hipótesis* p y una *conclusión* q . Cuando un enunciado condicional se escribe en la **forma si..., entonces**, la parte “si” contiene la **hipótesis** y la parte “entonces”, la **conclusión**.

Palabras Si p , entonces q . **Símbolos** $p \rightarrow q$ (leído como “ p implica q ”)

EJEMPLO 1 Escribir un enunciado en forma si..., entonces

Utiliza rojo para identificar la hipótesis y azul para identificar la conclusión. Después reescribe el enunciado condicional en la forma si..., entonces.

- a. Todas las aves tienen plumas. b. Estás en Texas si estás en Houston.

SOLUCIÓN

- a. **Todas las aves** tienen **plumas**. b. **Estás en Texas** si **estás en Houston**.

- ▶ Si **un animal es un ave**, entonces **tiene plumas**. ▶ Si **estás en Houston**, entonces **estás en Texas**.

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Utiliza rojo para identificar la hipótesis y azul para identificar la conclusión. Después reescribe el enunciado condicional en la forma si..., entonces.

1. Todos los ángulos de 30° son ángulos agudos. 2. $2x + 7 = 1$, porque $x = -3$.

Concepto Esencial

Negation

La **negación** de un enunciado es lo *opuesto* del enunciado original. Para escribir la negación de un enunciado p , escribe el símbolo de la negación (\sim) antes de la letra. Por tanto, “no p ” se escribe $\sim p$.

Palabras no p **Símbolos** $\sim p$

EJEMPLO 2 Escribir una negación

Escribe la negación de cada enunciado.

- a. La pelota es roja. b. El gato *no* es negro.

SOLUCIÓN

- a. La pelota *no* es roja. b. El gato es negro.

Concepto Esencial

Condicionales relacionados

Considera el enunciado condicional siguiente.

Palabras Si p , entonces q . **Símbolos** $p \rightarrow q$

Recíproco Para escribir el **recíproco** de un enunciado condicional, intercambia la hipótesis y la conclusión.

Palabras Si q , entonces p . **Símbolos** $q \rightarrow p$

Inverso Para escribir el **inverso** de un enunciado condicional, niega tanto la hipótesis como la conclusión.

Palabras Si no p , entonces no q . **Símbolos** $\sim p \rightarrow \sim q$

Contrarrecíproco Para escribir el **contrarrecíproco** de un enunciado condicional, primero escribe el recíproco. Después niega tanto la hipótesis como la conclusión.

Palabras Si no q , entonces no p . **Símbolos** $\sim q \rightarrow \sim p$

Un enunciado condicional y su contrarrecíproco son ambos verdaderos o ambos falsos. Asimismo, el recíproco y el inverso de un enunciado condicional son ambos falsos o ambos verdaderos. En general, cuando dos enunciados son ambos falsos o ambos verdaderos, reciben el nombre de **enunciados equivalentes**.

ERROR COMÚN

El hecho de que un enunciado condicional y su contrarrecíproco sean verdaderos, no significa que tanto su recíproco como su inverso sean falsos. El recíproco y el inverso también podrían ser verdaderos.



EJEMPLO 3

Escribir enunciados condicionales relacionados



Sea p “eres un guitarrista” y q “eres músico”. Expresa cada enunciado en palabras y después decide si es *verdadero* o *falso*.

- el enunciado condicional $p \rightarrow q$
- el recíproco $q \rightarrow p$
- el inverso $\sim p \rightarrow \sim q$
- el contrarrecíproco $\sim q \rightarrow \sim p$

SOLUCIÓN

- Condional: Si eres un guitarrista, entonces eres músico. *verdadero*; los guitarristas son músicos.
- Recíproco: Si eres músico, entonces eres guitarrista. *falso*; no todos los músicos tocan la guitarra.
- Inverso: Si no eres un guitarrista, entonces no eres músico. *falso*; aunque no toques la guitarra, aún puedes ser músico.
- Contrarrecíproco: Si no eres músico, entonces no eres guitarrista. *verdadero*; alguien que no es músico no puede tocar una guitarra.

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

En los Ejercicios 3 y 4, escribe la negación del enunciado.

- La camiseta es verde.
- Los zapatos *no* son rojos.
- Repite el Ejemplo 3. Sea p “las estrellas son visibles” y q “es de noche”.

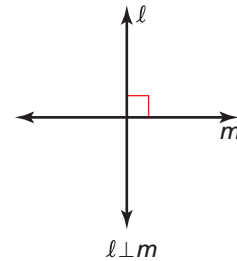
Usar definiciones

Puedes escribir una definición como enunciado condicional de la forma si..., entonces o como su recíproco. Para las definiciones, tanto el enunciado condicional como su recíproco son verdaderos. Por ejemplo, considera la definición de *líneas perpendiculares*.

Si dos líneas se intersectan para formar un ángulo recto, entonces son **líneas perpendiculares**.

También puedes escribir la definición utilizando el recíproco: Si dos líneas son líneas perpendiculares, entonces se intersectan para formar un ángulo recto.

Puedes escribir “la línea ℓ es perpendicular a la línea m ” como $\ell \perp m$.

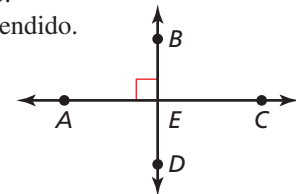


EJEMPLO 4 Usar definiciones

Decide si cada enunciado acerca del diagrama es verdadero.

Explica tu respuesta utilizando las definiciones que has aprendido.

- $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$
- $\angle AEB$ y $\angle CEB$ son un par lineal.
- \overrightarrow{EA} y \overrightarrow{EB} son rayos opuestos.



SOLUCIÓN

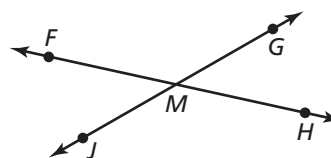
- Este enunciado es *verdadero*. El símbolo del ángulo recto en el diagrama indica que las líneas se intersectan para formar un ángulo recto. Por tanto, se puede decir que las líneas son perpendiculares.
- Este enunciado es *verdadero*. Por definición, si los lados no comunes de ángulos adyacentes son rayos opuestos, entonces los ángulos son un par lineal. Como \overrightarrow{EA} y \overrightarrow{EC} son rayos opuestos, $\angle AEB$ y $\angle CEB$ son un par lineal.
- Este enunciado es falso. El punto E no pertenece a la misma línea que A y B , por tanto los rayos no son rayos opuestos.

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Utiliza el diagrama. Decide si el enunciado es verdadero. Explica tu respuesta utilizando las definiciones que has aprendido.



- $\angle JMF$ y $\angle FMG$ son suplementarios.
- El punto M es el punto medio de \overline{FH} .
- $\angle JMF$ y $\angle HMG$ son ángulos verticales.
- $\overrightarrow{FH} \perp \overrightarrow{JG}$

Escribir enunciados bicondicionales

Concepto Esencial

Enunciado bicondicional

Cuando tanto un enunciado condicional como su recíproco son verdaderos, puedes escribirlos como un solo *enunciado bicondicional*. Un **enunciado bicondicional** es un enunciado que contiene la frase “si y sólo si”.

Palabras p si y sólo si q **Símbolos** $p \leftrightarrow q$

Cualquier definición puede escribirse como enunciado bicondicional.

EJEMPLO 5 Escribir un enunciado bicondicional

Reescribe la definición de las líneas perpendiculares como un solo enunciado bicondicional.

Definición Si dos líneas se intersecan para formar un ángulo recto, entonces son líneas perpendiculares.

SOLUCIÓN

Sea p “dos líneas se intersecan para formar un ángulo recto” y sea q “son líneas perpendiculares”. Utiliza rojo para identificar a p y azul para identificar a q . Escribe la definición $p \rightarrow q$.

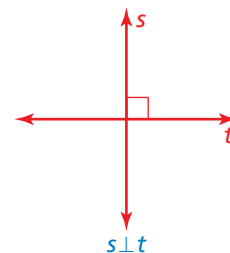
Definición Si **dos líneas se intersecan para formar un ángulo recto**, **son líneas perpendiculares**.

Escribe el recíproco $q \rightarrow p$.

Recíproco Si **dos líneas son líneas perpendiculares**, entonces **se intersecan para formar un ángulo recto**.

Utiliza la definición y su recíproco para escribir el enunciado bicondicional $p \leftrightarrow q$.

► **Bicondicional** **Dos líneas se intersecan para formar un ángulo recto** si y sólo si **son líneas perpendiculares**.



Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

10. Reescribe la definición de un ángulo recto como un solo enunciado bicondicional.

Definición Si un ángulo es un ángulo recto, entonces mide 90° .

11. Reescribe la definición de segmentos congruentes como un solo enunciado bicondicional.

Definición Si dos segmentos de línea tienen la misma longitud, entonces son segmentos congruentes.

12. Reescribe los enunciados como un solo enunciado bicondicional.

Si Mary está en su clase de teatro, entonces participará en la función de otoño. Si Mary está en la función de otoño, ella debe estar tomando la clase de teatro.

13. Reescribe los enunciados como un enunciado bicondicional.

Si puedes postularte para Presidente, tienes al menos 35 años de edad. Si tienes al menos 35 años de edad, puedes postularte para Presidente.

Elaborar tablas de verdad

El **valor de verdad** de un enunciado es verdadero (V) o falso (F). Puedes determinar las condiciones bajo las cuales un enunciado condicional es verdadero utilizando una **tabla de verdad**. La siguiente tabla de verdad muestra los valores de verdad para la hipótesis p y la conclusión q .

Condicional		
p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El enunciado condicional $p \rightarrow q$ es falso sólo cuando una hipótesis verdadera produce una conclusión falsa.

Dos enunciados son *lógicamente equivalentes* cuando tienen la misma tabla de verdad.

EJEMPLO 6 Elaborar una tabla de verdad

Utiliza la tabla de verdad anterior para hacer tablas de verdad para el recíproco, inverso y contrarrecíproco de un enunciado condicional $p \rightarrow q$.

SOLUCIÓN

Abajo se muestran las tablas de verdad para un recíproco y un inverso. Observa que el recíproco y el inverso son lógicamente equivalentes porque tienen la misma tabla de verdad.

Recíproco		
p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Inverso				
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

A continuación se muestra la tabla de verdad para el contrarrecíproco. Observa que un enunciado condicional y su contrarrecíproco son lógicamente equivalentes porque tienen la misma tabla de verdad.

Contrarrecíproco				
p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

14. Elabora una tabla de verdad para el enunciado condicional $p \rightarrow \sim q$.

15. Elabora una tabla de verdad para el enunciado condicional $\sim(p \rightarrow q)$.

2.1 Ejercicios

Verificación de vocabulario y concepto esencial

- VOCABULARIO** ¿Qué tipo de enunciados son verdaderos ambos o falsos ambos?
- ¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Qué enunciado no pertenece a los otros tres? Explica tu razonamiento.

Si hoy es martes, entonces mañana es miércoles.

Si es Día de la Independencia, entonces es julio.

Si un ángulo es agudo, entonces mide menos de 90° .

Si eres un atleta, entonces juegas fútbol.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, copia el enunciado condicional. Subraya la hipótesis y encierra en un círculo la conclusión.

- Si un polígono es un pentágono, entonces tiene cinco lados.
- Si dos rectas forman ángulos verticales, entonces se intersectan.
- Si corres, entonces eres rápido.
- Si te gustan las matemáticas, entonces te gusta la ciencia.

En los Ejercicios 7–12, reescribe el enunciado condicional en la forma *si... entonces*. (Consulta el Ejemplo 1).

- $9x + 5 = 23$, porque $x = 2$.
- Hoy es viernes, mañana será fin de semana.
- Estás en una banda, tocas la batería.
- Dos ángulos rectos son ángulos suplementarios.
- Sólo las personas registradas tienen permitido votar.
- Las medidas de los ángulos complementarios suman 90° .

En los Ejercicios 13–16, escribe la negación del enunciado. (Consulta el Ejemplo 2).

- El cielo es azul.
- El lago está frío.
- La pelota *no* es rosa.
- El perro *no* es un labrador.

En los Ejercicios 17–24, escribe el enunciado condicional $p \rightarrow q$, el recíproco $q \rightarrow p$, el inverso $\sim p \rightarrow \sim q$, y el contrarrecíproco $\sim q \rightarrow \sim p$ en palabras. Después decide si cada enunciado es verdadero o falso. (Consulta el Ejemplo 3).

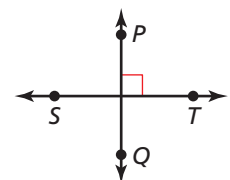
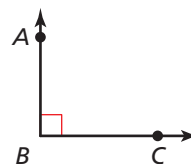
- Sea p “dos ángulos son suplementarios” y sea q “las medidas de los ángulos suman 180° ”.

- Sea p “estás en clase de matemáticas” y sea q “estás en clase de geometría”.
- Sea p “haces tu tarea de matemáticas” y sea q “te irá bien en el examen”.
- Sea p “no eres hijo único” y sea q “tienes un hermano”.
- Sea p “no nieva” y sea q “correré afuera”.
- Sea p “el Sol salió” y sea q “es de día”.
- Sea p “ $3x - 7 = 20$ ” y sea q “ $x = 9$ ”.
- Sea p “es Día de San Valentín” y sea q “es febrero”.

En los Ejercicios 25–28, decide si el enunciado sobre el diagrama es verdadero. Explica tu respuesta usando las definiciones que has aprendido. (Consulta el Ejemplo 4).

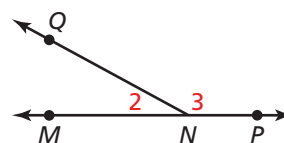
25. $m\angle ABC = 90^\circ$

26. $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{ST}$



27. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

28. M es el punto medio de \overline{AB} .



En los Ejercicios 29–32, reescribe la definición del término como un enunciado bicondicional. (Consulta el Ejemplo 5).

29. El *punto medio* de un segmento es un punto que divide el segmento en dos segmentos congruentes.
30. Dos ángulos son *ángulos verticales* cuando sus lados forman dos pares de rayos opuestos.
31. Los *ángulos adyacentes* son dos ángulos que comparten un vértice y un lado comunes pero que no tienen puntos interiores.
32. Dos ángulos son *ángulos suplementarios* cuando la suma de sus medidas es 180° .

En los Ejercicios 33–36, reescribe los enunciados como un solo enunciado bicondicional. (Consulta el Ejemplo 5).

33. Si un polígono tiene tres lados, entonces es un triángulo.
Si un polígono es un triángulo, entonces tiene tres lados.
34. Si un polígono tiene cuatro lados, entonces es un cuadrilátero.
Si un polígono es un cuadrilátero, entonces tiene cuatro lados.
35. Si un ángulo es un ángulo recto, entonces mide 90° .
Si un ángulo mide 90° , entonces es un ángulo recto.
36. Si un ángulo es obtuso, entonces mide entre 90° y 180° .
Si un ángulo mide entre 90° y 180° , entonces es un ángulo obtuso.
37. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error al reescribir el enunciado condicional en la forma si..., entonces.



Enunciado condicional
Todos los estudiantes de bachillerato toman cuatro cursos de inglés.
Forma si..., entonces.
Si un estudiante de bachillerato toma cuatro cursos, entonces los cuatro son cursos de inglés.

38. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error al escribir el recíproco del enunciado condicional.



Enunciado condicional
Si está lloviendo, entonces llevaré paraguas.
Recíproco
Si no está lloviendo, no llevaré paraguas.

En los Ejercicios 39–44, crea una tabla de verdad para el enunciado lógico. (Consulta el Ejemplo 6).

39. $\sim p \rightarrow q$
40. $\sim q \rightarrow p$
41. $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$
42. $\sim(p \rightarrow \sim q)$
43. $q \rightarrow \sim p$
44. $\sim(q \rightarrow p)$

45. **USAR LA ESTRUCTURA** Los enunciados siguientes describen tres modos en los que las rocas se forman.



La roca ígnea se forma a partir del enfriamiento de roca fundida.



La roca sedimentaria se forma a partir de pedazos de otras rocas.



La roca metamórfica se forma por los cambios en la temperatura, presión o química.

- a. Escribe cada enunciado en la forma si..., entonces.
 - b. Escribe el recíproco de cada uno de los enunciados en la parte (a). ¿El recíproco de cada enunciado es verdadero? Explica tu razonamiento.
 - c. Escribe un enunciado si..., entonces sobre las rocas que sea diferente de los ofrecidos en las partes (a) y (b). ¿El recíproco de tu enunciado es verdadero o falso? Explica tu razonamiento.
46. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que el enunciado “Si compré una camiseta, entonces fui al centro comercial” puede escribirse como enunciado bicondicional verdadero. Tu hermana dice que no es posible escribir este enunciado como bicondicional. ¿Quién tiene la razón? Explica tu razonamiento.
 47. **RAZONAR** Se te ha dicho que el contrarrecíproco de un enunciado es verdadero. ¿Eso te ayuda a determinar si el enunciado puede escribirse como un enunciado bicondicional verdadero? Explica tu razonamiento.

48. **RESOLVER PROBLEMAS** Utiliza el enunciado condicional para identificar el enunciado si..., entonces como el recíproco, inverso o contrarrecíproco del enunciado condicional. Después utiliza los símbolos para representar ambos enunciados.

Enunciado condicional

Si monté en bicicleta a la escuela, entonces no llegué caminando.

Enunciado si..., entonces

Si no monté en bicicleta a la escuela, entonces llegué caminando.



USAR LA ESTRUCTURA En los Ejercicios 49–52, reescribe el enunciado condicional en la forma si..., entonces. Después subraya la hipótesis y encierra en un círculo la conclusión.

49. *Si dices la verdad,
no tienes que
recordar nada.*
Mark Twain

50. Tienes que esperar cosas de ti mismo antes de ser capaz de hacerlas.
Michael Jordan

51. Si tienes suerte, una fantasía solitaria puede transformar un millón de realidades.
Maya Angelou

52. *Quien es feliz
hará felices a
otros también.*
Anne Frank

53. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** ¿El enunciado “si $x^2 - 10 = x + 2$, entonces $x = 4$ ” puede combinarse con su recíproco para formar un enunciado bicondicional verdadero?

54. **PENSAMIENTO CRÍTICO** El arco natural más grande en Estados Unidos es Landscape Arch, ubicado en Thompson, Utah. Abarca 290 pies.



- Utiliza la información para reescribir al menos dos enunciados condicionales verdaderos.
- ¿Qué tipo de enunciado condicional relacionado debe ser también verdadero? Escribe los enunciados condicionales relacionados.
- ¿Cuáles son los otros dos tipos de enunciados condicionales relacionados? Escribe los enunciados condicionales relacionados.

55. **RAZONAR** ¿Qué enunciado tiene el mismo significado que el enunciado dado?

Enunciado dado

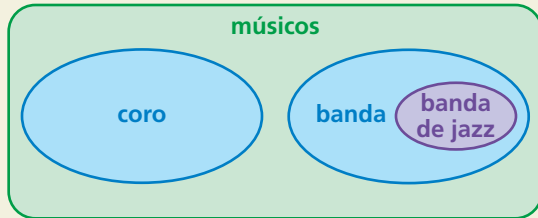
Puedes ver una película después de hacer tu tarea.

- Si haces tu tarea, entonces puedes ver una película después.
- Si no haces tu tarea, entonces puedes ver una película después.
- Si no puedes ver una película después, entonces haz tu tarea.
- Si puedes ver una película después, entonces no hagas tu tarea.

56. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe tres enunciados condicionales, donde uno siempre sea verdadero, uno siempre sea falso y uno dependa de la persona que lo interpreta.

57. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Un ejemplo de un enunciado condicional es “Hoy es agosto 31, entonces mañana será septiembre 1”. Escribe un enunciado condicional utilizando las fechas de dos diferentes meses de manera que el valor de verdad dependa de cuándo se lea el enunciado.

58. **¿CÓMO LO VES?** El diagrama de Venn representa a todos los músicos en una escuela preparatoria. Escribe tres enunciados condicionales de la forma si..., entonces que describan la relación entre los diferentes grupos de músicos.



59. **REPRESENTACIONES MÚLTIPLES** Crea un diagrama de Venn que represente cada enunciado condicional. Escribe el recíproco de cada enunciado condicional. Después determina si cada enunciado condicional y su recíproco es verdadero o falso. Explica tu razonamiento.

- Si vas al zoológico para ver a un león, entonces verás un gato.
- Si practicas un deporte, entonces portas un casco.
- Si este mes tiene 31 días, entonces no es febrero.

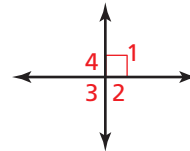
60. **SACAR CONCLUSIONES** Mides las estaturas de tus compañeros de clase para recabar un conjunto de datos.

- Indica si el enunciado es verdadero: Si x y y son los valores mínimo y máximo de tu conjunto de datos, entonces la medida de los datos está entre x y y .
- Escribe el recíproco del enunciado en la parte (a). ¿El recíproco es verdadero? Explica tu razonamiento.
- Copia y completa el enunciado siguiente usando la *media*, la *mediana*, o la *moda* para hacer un enunciado condicional que sea verdadero para cualquier conjunto de datos. Explica tu razonamiento.

Si un conjunto de datos tiene una media, una mediana y una moda, entonces _____ del conjunto de datos siempre será un valor de los datos.

61. **ESCRIBIR** Escribe un enunciado condicional que sea verdadero, pero que su recíproco sea falso.

62. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Escribe una serie de enunciados si..., entonces que te permita encontrar la medida de cada ángulo, dado que $m\angle 1 = 90^\circ$. Utiliza la definición de los pares lineales.



63. **ESCRIBIR** Los eslóganes publicitarios como “¡Compra estos zapatos, te convertirán en un mejor atleta!” suelen implicar enunciados condicionales. Encuentra un anuncio o escribe tu propio eslogan. Después escríbelo como un enunciado condicional.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

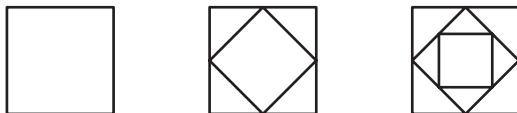
Encuentra el patrón. Después dibuja las siguientes dos figuras en la secuencia.

(Manual de revisión de destrezas)

64.



65.



Encuentra el patrón. Después encuentra los siguientes dos números. (Manual de revisión de destrezas)

66. 1, 3, 5, 7, ...

67. 12, 23, 34, 45, ...

68. $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \dots$

69. 1, 4, 9, 16, ...

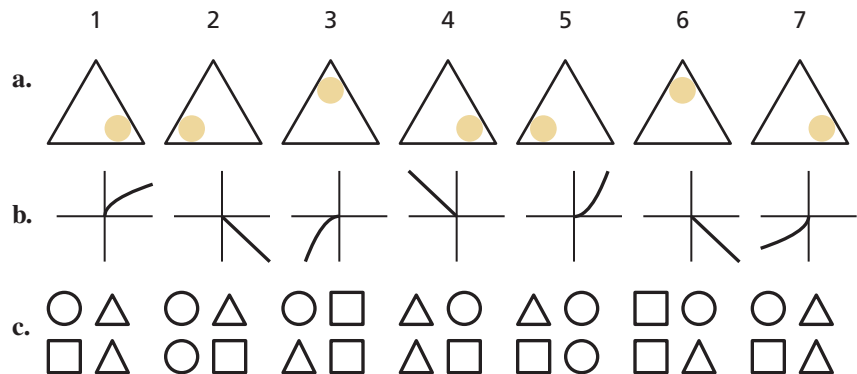
2.2 Razonamiento inductivo y deductivo

Pregunta esencial ¿Cómo puedes usar el razonamiento para resolver problemas?

Una **conjetura** es un enunciado no demostrado basado en observaciones.

EXPLORACIÓN 1 Escribir una conjetura

Trabaja con un compañero. Escribe una conjetura acerca del patrón. Después usa tu conjetura para dibujar el décimo objeto en el patrón.



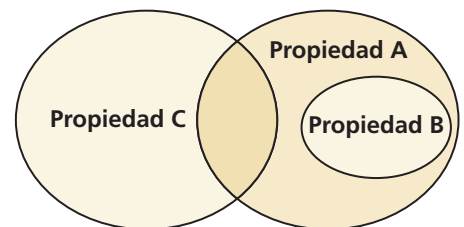
CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas justificar tus conclusiones y comunicarlas a otros.

EXPLORACIÓN 2 Usar un diagrama de Venn

Trabaja con un compañero. Usa el diagrama de Venn para determinar si el enunciado es verdadero o falso. Justifica tu respuesta. Asume que ninguna región del diagrama de Venn está vacía.

- Si un objeto tiene la propiedad B, entonces tiene la propiedad A.
- Si un objeto tiene la propiedad A, entonces tiene la propiedad B.
- Si un objeto tiene la propiedad A, entonces tiene la propiedad C.
- Algunos objetos que tienen la propiedad A no tienen la propiedad B.
- Si un objeto tiene la propiedad C, entonces no tiene la propiedad B.
- Algunos objetos tienen tanto propiedades A como C.
- Algunos objetos tienen tanto propiedades B como C.



EXPLORACIÓN 3 Razonamiento y diagramas de Venn

Trabaja con un compañero. Dibuja un diagrama de Venn que muestre la relación entre los diferentes tipos de cuadriláteros: cuadrados, rectángulos, paralelogramos, trapecios, rombos y cometas. Después escribe varios enunciados condicionales expresados en tu diagrama, como “Si un cuadrilátero es un cuadrado, entonces es un rectángulo”.

Comunicar tu respuesta

- ¿Cómo puedes utilizar tu razonamiento para resolver problemas?
- Da un ejemplo de cómo usaste el razonamiento para resolver un problema de la vida real.

2.2 Lección

Vocabulario Esencial

conjetura, pag. 76
razonamiento inductivo, pag. 76
contraejemplo, pag. 77
razonamiento deductivo,
pag. 78

Qué aprenderás

- ▶ Utilizar el razonamiento inductivo.
- ▶ Utilizar el razonamiento deductivo.

Utilizar el razonamiento inductivo

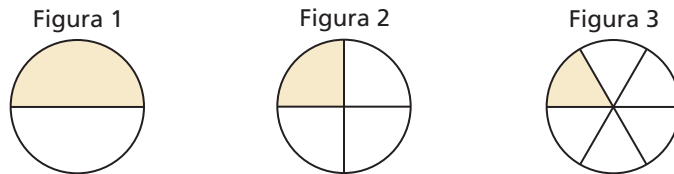
Concepto Esencial

Razonamiento inductivo

Una **conjetura** es un enunciado no demostrado basado en observaciones. Puedes usar el **razonamiento inductivo** cuando hallas un patrón en casos específicos y después escribes una conjetura acerca del caso general.

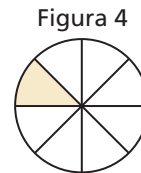
EJEMPLO 1 Describir un patrón visual

Describe cómo bosquejar la cuarta figura en el patrón. Después bosqueja la cuarta figura.



SOLUCIÓN

Cada círculo se divide en regiones iguales el doble del número indicado por la figura. Bosqueja la cuarta figura dividiendo un círculo en octavos. Sombrea la sección justo arriba del segmento horizontal a la izquierda.



Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

1. Bosqueja la quinta figura en el patrón del Ejemplo 1.

Bosqueja la siguiente figura en el patrón.



EJEMPLO 2 Formular y comprobar una conjetura

Los números como 3, 4 y 5 se denominan *enteros consecutivos*. Formula y comprueba una conjetura acerca de la suma de cualquiera de tres enteros consecutivos.

SOLUCIÓN

Paso 1 Encuentra un patrón que utilice algunos grupos de números pequeños.

$$3 + 4 + 5 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$7 + 8 + 9 = 24 = 8 \cdot 3$$

$$10 + 11 + 12 = 33 = 11 \cdot 3$$

$$16 + 17 + 18 = 51 = 17 \cdot 3$$

Paso 2 Formula una conjetura.

Conjetura La suma de tres enteros consecutivos cualesquiera es tres veces el segundo número.

Paso 3 Comprueba tu conjetura utilizando otros números. Por ejemplo, comprueba que funcione con los grupos $-1, 0, 1$ y $100, 101, 102$.

$$-1 + 0 + 1 = 0 = 0 \cdot 3 \quad \checkmark$$

$$100 + 101 + 102 = 303 = 101 \cdot 3 \quad \checkmark$$

Concepto Esencial

Contraejemplo

Para demostrar que una conjetura es verdadera, debes demostrar que es verdadera en cualquier caso. Sin embargo, puedes demostrar que una conjetura es falsa hallando sólo un *contraejemplo*. Un **contraejemplo** es un caso específico que demuestra la falsedad de una conjetura.

EJEMPLO 3 Hallar un contraejemplo

Un estudiante formula la siguiente conjetura acerca de la suma de dos números. Halla un contraejemplo que refute la conjetura del estudiante.

Conjetura La suma de dos números siempre es mayor que el número mayor.

SOLUCIÓN

Para hallar un contraejemplo, necesitas hallar una suma que sea menor que el número mayor.

$$-2 + (-3) = -5$$

$$-5 \not> -2$$

► Como existe un contraejemplo, la conjetura es falsa.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

4. Formula y comprueba una conjetura acerca del signo del producto de tres enteros negativos cualesquiera.
5. Formula y comprueba una conjetura acerca de la suma de cinco enteros consecutivos cualesquiera.

Halla un contraejemplo que demuestre la falsedad de la conjetura.

6. El valor de x^2 siempre es mayor que el valor de x .
7. La suma de dos números siempre es mayor que su diferencia.

Utilizar el razonamiento deductivo

Concepto Esencial

Razonamiento deductivo

El **razonamiento deductivo** utiliza datos, definiciones, propiedades aceptadas y las leyes de la lógica para formular un argumento lógico. Es diferente del *razonamiento inductivo*, el cual utiliza ejemplos y patrones específicos para hacer una conjetura.

Leyes de la lógica

Ley de separación

Si la hipótesis de un enunciado condicional es verdadera, entonces la conclusión también es verdadera.

Ley del silogismo

Si la hipótesis p , entonces la conclusión q .
Si la hipótesis q , entonces la conclusión r .
Si la hipótesis p , entonces la conclusión r . ← entonces este enunciado es verdadero.

Diagrama de flujo: Si la hipótesis p , entonces la conclusión q .
Si la hipótesis q , entonces la conclusión r .
Si la hipótesis p , entonces la conclusión r . ← entonces este enunciado es verdadero.

EJEMPLO 4

Utilizar la ley de separación

Si dos segmentos tienen la misma longitud, son congruentes. Sabes que $BC = XY$. Utilizando la ley de separación, ¿qué enunciado puedes hacer?

SOLUCIÓN

Como $BC = XY$ satisface la hipótesis de enunciado condicional, la conclusión también es verdadera.

▶ Por tanto, $\overline{BC} \cong \overline{XY}$.

EJEMPLO 5

Utilizar la ley del silogismo

Si es posible, utiliza la ley del silogismo para escribir un nuevo enunciado condicional que se desprenda del siguiente par de enunciados verdaderos.

- Si $x^2 > 25$, entonces $x^2 > 20$.
Si $x > 5$, entonces $x^2 > 25$.
- Si un polígono es regular, entonces todos los ángulos del interior del polígono son congruentes.
Si un polígono es regular, entonces todos sus lados son congruentes.

SOLUCIÓN

- Observa que la conclusión del segundo enunciado es la hipótesis del primero. El orden de los enunciados no afecta el que puedas utilizar la ley del silogismo. Por tanto, puedes escribir el siguiente nuevo enunciado.
▶ Si $x > 5$, entonces $x^2 > 20$.
- Ninguna conclusión del enunciado es la misma que la hipótesis del otro enunciado.
▶ No puedes utilizar la ley del silogismo para escribir un nuevo enunciado condicional.

EJEMPLO 6 Utilizar el razonamiento inductivo y deductivo

¿Qué conclusión puedes hacer acerca del producto de un entero par y cualquier otro entero?

DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS

En geometría, con frecuencia utilizarás el razonamiento inductivo para hacer conjeturas. También utilizarás el razonamiento deductivo para demostrar que las conjeturas son verdaderas o falsas. Necesitarás saber qué tipo de razonamiento utilizar.

SOLUCIÓN

Paso 1 Busca un patrón en varios ejemplos. Utiliza el razonamiento deductivo para hacer una conjetura.

$$\begin{array}{cccc} (-2)(2) = -4 & (-1)(2) = -2 & 2(2) = 4 & 3(2) = 6 \\ (-2)(-4) = 8 & (-1)(-4) = 4 & 2(-4) = -8 & 3(-4) = -12 \end{array}$$

Conjetura Entero par \cdot Cualquier entero = Entero par

Paso 2 Sean n y m cualquier entero. Usa el razonamiento deductivo para demostrar que la conjetura es verdadera.

$2n$ es un entero par porque cualquier entero multiplicado por 2 es par.

$2nm$ representa el producto de un entero par $2n$ y cualquier entero m .

$2nm$ es el producto de 2 y un entero nm . Por tanto, $2nm$ es un entero par.

► El producto de un entero par y cualquier entero es un entero par.

EJEMPLO 7 Comparar el razonamiento inductivo y deductivo

Decide si se está usando el razonamiento deductivo o el inductivo para llegar a la conclusión. Explica tu razonamiento.

- Cada vez que Mónica pateo una pelota hacia el aire, ésta regresa al suelo. Por tanto, la siguiente ocasión que Mónica pateo una pelota hacia el aire, regresará al suelo.
- Todos los reptiles son de sangre fría. Los pericos no son de sangre fría. El perico de Sue no es un reptil.

SOLUCIÓN

- Razonamiento inductivo, porque se utiliza un patrón para llegar a la conclusión.
- Razonamiento deductivo, porque se utilizan datos acerca de los animales y las leyes de la lógica para llegar a la conclusión.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

- Si $90^\circ < m\angle R < 180^\circ$, entonces $\angle R$ es obtuso. La medida de $\angle R$ es 155° . Utilizando la ley de separación, ¿qué enunciado puedes hacer?
- Usa la ley del silogismo para escribir un nuevo enunciado condicional que se desprenda del par de enunciados verdaderos.
Si obtienes una A en tu examen de matemáticas, entonces puedes ir al cine.
Si vas al cine, entonces puedes ver a tu actor favorito.
- Usa el razonamiento inductivo para hacer una conjetura acerca de la suma de un número y él mismo. Después usa el razonamiento deductivo para demostrar que la conjetura es verdadera.
- Decide si se utiliza el razonamiento deductivo o el inductivo para llegar a la conclusión. Explica tu razonamiento.

Todos los múltiplos de 8 son divisibles entre 4.

64 es un múltiplo de 8.

Por tanto, 64 es divisible entre 4.

Verificación de vocabulario y concepto esencial

- VOCABULARIO** ¿Cómo te ayuda el prefijo “contra-” a comprender el término contraejemplo?
- ESCRIBIR** Explica la diferencia entre el razonamiento deductivo y el razonamiento inductivo.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

Describe el patrón en los Ejercicios 3–8. Después escribe o dibuja los siguientes dos números, letras o figuras. (Consulta el Ejemplo 1).

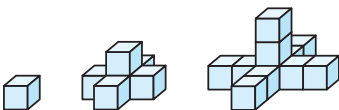
3. $1, -2, 3, -4, 5, \dots$ 4. $0, 2, 6, 12, 20, \dots$

5. Z, Y, X, W, V, \dots 6. J, F, M, A, M, \dots

7.



8.



En los Ejercicios 9–12, formula y comprueba una conjetura acerca de la cantidad dada. (Consulta el Ejemplo 2).

- el producto de dos enteros pares cualesquiera
- la suma de un entero par y un entero impar
- el cociente de un número y su recíproco
- el cociente de dos enteros negativos

En los Ejercicios 13–16, encuentra un contraejemplo que demuestre que la conjetura es falsa. (Consulta el Ejemplo 3).

- El producto de dos números positivos siempre es mayor que cualquier número.
- Si n es un entero distinto de cero, entonces $\frac{n+1}{n}$ siempre es mayor que 1.
- Si dos ángulos son suplementos de otro, entonces uno de los ángulos debe ser agudo.
- La línea s divide a \overline{MN} en dos segmentos de línea. Por tanto, la línea s es la bisectriz de un segmento de \overline{MN} .

En los Ejercicios 17–20, utiliza la ley de separación para determinar qué puedes concluir de la información dada, si es posible. (Consulta el Ejemplo 4).

- Si apruebas el final, entonces apruebas la clase. Aprobaste el final.
- Si tus padres te prestan el automóvil, entonces irás al cine con tu amigo. Irás al cine con tu amigo.
- Si un cuadrilátero es un cuadrado, entonces tiene cuatro ángulos. El cuadrilátero $QRST$ tiene cuatro ángulos rectos.
- Si un punto divide un segmento de línea en dos segmentos de línea congruentes, entonces el punto es un punto medio. El punto P divide a \overline{LH} en dos segmentos de línea congruentes.

En los Ejercicios 21–24, utiliza la ley del silogismo para escribir un nuevo enunciado condicional que se desprenda del par de enunciados verdaderos, si fuera posible. (Consulta el Ejemplo 5).

- Si $x < -2$, entonces $|x| > 2$. Si $x > 2$, entonces $|x| > 2$.
- Si $a = 3$, entonces $5a = 15$. Si $\frac{1}{2}a = 1\frac{1}{2}$, entonces $a = 3$.
- Si una figura es un rombo, entonces la figura es un paralelogramo. Si una figura es un paralelogramo, entonces la figura tiene dos pares de lados opuestos que son paralelos.
- Si una figura es un cuadrado, entonces la figura tiene cuatro lados congruentes. Si una figura es un cuadrado, entonces la figura tiene cuatro ángulos rectos.

En los Ejercicios 25–28, menciona la ley de la lógica que se ilustra.

- Si haces tu tarea, entonces puedes ver la televisión. Si ves la televisión, entonces puedes ver tu programa favorito.
Si haces tu tarea, entonces puedes ver tu programa favorito.

26. Si faltas a la práctica el día antes del partido, no serás uno de los jugadores que inicie el partido.
Faltaste a tu práctica del martes. No iniciarás el partido del miércoles.
27. Si $x > 12$, entonces $x + 9 > 20$. El valor de x es 14.
Por tanto, $x + 9 > 20$.
28. Si $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos verticales, entonces $\angle 1 \cong \angle 2$.
Si $\angle 1 \cong \angle 2$, entonces $m\angle 1 = m\angle 2$.
Si $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos verticales, entonces $m\angle 1 = m\angle 2$.

En los Ejercicios 29 y 30, utiliza el razonamiento inductivo para hacer una conjetura acerca de la cantidad dada. Después utiliza el razonamiento deductivo para demostrar que la conjetura es verdadera. (Consulta el Ejemplo 6).

29. la suma de dos enteros impares
30. el producto de dos enteros impares

En los Ejercicios 31–34 decide si se utilizó el razonamiento deductivo o el razonamiento inductivo para llegar a la conclusión. Explica tu razonamiento. (Consulta el Ejemplo 7).

31. Cada vez que tu mamá va a la tienda, compra leche. Por tanto, la siguiente ocasión que tu mamá vaya a la tienda, comprará leche.
32. Los números racionales pueden escribirse como fracciones. Los números irracionales no pueden escribirse como fracciones. Por tanto, $\frac{1}{2}$ es un número racional.
33. Todos los hombres son mortales. Mozart es un hombre, por tanto, Mozart es mortal.
34. Cada vez que limpies tu habitación, te dan permiso de salir con tus amigos. Por tanto, la siguiente vez que limpies tu habitación, te dejarán salir con tus amigos.

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 35 y 36, describe y corrige el error al interpretar el enunciado.

35. Si una figura es un rectángulo, entonces la figura tiene cuatro lados. Un trapecio tiene cuatro lados.



Utilizando la ley de separación, puedes concluir que un trapecio es un rectángulo.

36. Cada día, tú llegas a la escuela antes que tu amigo.



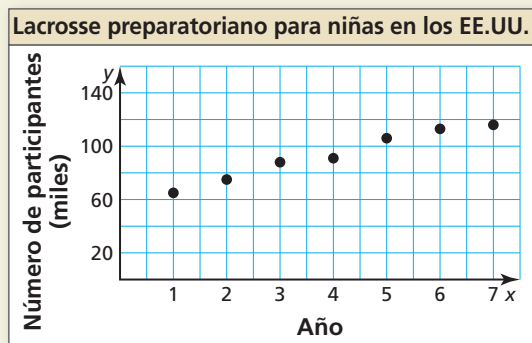
Usando el razonamiento deductivo, puedes concluir que mañana llegarás a la escuela antes que tu amigo.

37. **RAZONAR** La tabla muestra los pesos promedio de varias subespecies de tigres. ¿Qué conjetura puedes hacer acerca de la relación entre los pesos de los tigres hembras y los pesos de los tigres machos? Explica tu razonamiento.



	Peso de hembras (libras)	Peso de machos (libras)
Siberiano	370	660
de Bengala	300	480
de China meridional	240	330
Sumatra	200	270
Indochina	250	400

38. **¿CÓMO LO VES?** Determina si puedes hacer cada conjetura a partir de la gráfica. Explica tu razonamiento.



- a. Más niñas participarán en Lacrosse preparatorio en el año 8 que las que participaron en el año 7.
- b. El número de niñas que participan en Lacrosse preparatorio superará al número de niños que participan en Lacrosse preparatorio en el año 9.

39. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Utiliza el razonamiento inductivo para escribir una fórmula para la suma de los primeros enteros positivos pares n .
40. **HALLAR UN PATRÓN** Los siguientes son los primeros nueve números de Fibonacci.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

- a. Formula una conjetura acerca de cada uno de los números de Fibonacci después de los primeros dos.
- b. Escribe los siguientes tres números en el patrón.
- c. Investiga para hallar un ejemplo de este patrón en la vida real.

41. **ARGUMENTAR** ¿Qué argumento es el correcto? Explica tu razonamiento.

Argumento 1: Si dos ángulos miden 30° y 60° , entonces los ángulos son complementarios. $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios. Por tanto, $m\angle 1 = 30^\circ$ y $m\angle 2 = 60^\circ$.

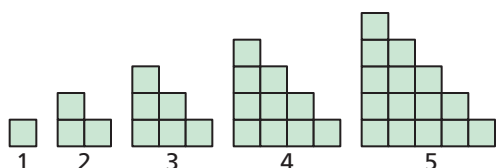
Argumento 2: Si dos ángulos miden 30° y 60° , entonces los ángulos son complementarios. La medida de $\angle 1$ es 30° y la medida de $\angle 2$ es 60° . Por tanto, $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios.

42. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Los primeros dos términos de una secuencia son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Describe los tres posibles patrones de la secuencia. Menciona los primeros cinco términos de cada secuencia.

43. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Utiliza la tabla para hacer una conjetura acerca de la relación entre x y y . Después escribe una ecuación para y en términos de x . Utiliza la ecuación para comprobar tu conjetura para los otros valores de x .

x	0	1	2	3	4
y	2	5	8	11	14

44. **RAZONAR** Utiliza el patrón siguiente. Cada figura está hecha de cuadrados de 1 unidad por 1 unidad.



- Halla el perímetro de cada figura. Describe el patrón de los perímetros.
- Predice el perímetro de la vigésima figura.

45. **SACAR CONCLUSIONES** Decide si cada conclusión es válida. Explica tu razonamiento.

- Yellowstone es un parque nacional en Wyoming.
- Tú y tu amigo fueron a acampar a Yellowstone National Park.
- Cuando vas a acampar, paseas en canoa.
- Si vas de excursión, tu amigo te acompaña.
- Vas de excursión.
- Hay un sendero de 3 millas de largo cerca de tu campamento.

- Fuiste a acampar a Wyoming.
- Tu amigo paseó en canoa.
- Tu amigo se fue de excursión.
- Tú y tu amigo se fueron de excursión por el sendero de 3 millas de largo.

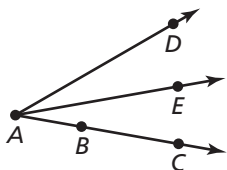
46. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Los geólogos utilizan la escala de Mohs para determinar la dureza de un mineral. Con esta escala, un mineral con un grado superior podría rayar un mineral de grado inferior. Probar la dureza de un mineral puede ayudar a identificar el mineral.

Mineral	 Talco	 Yeso	 Calcita	 Fluorita
Escala de Mohs	1	2	3	4

- Los cuatro minerales se rotularon al azar A , B , C , y D . El mineral A rayó al mineral B . Los otros tres minerales rayaron al mineral C . ¿Qué puedes concluir? Explica tu razonamiento.
- ¿Qué pruebas adicionales puedes utilizar para identificar todos los minerales en la parte (a)?

Mantener el dominio de las matemáticas Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Determina qué postulado ilustra el enunciado. (Sección 1.2 y Sección 1.5)



47. $AB + BC = AC$

48. $m\angle DAC = m\angle DAE + m\angle EAB$

49. AD es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de A y D .

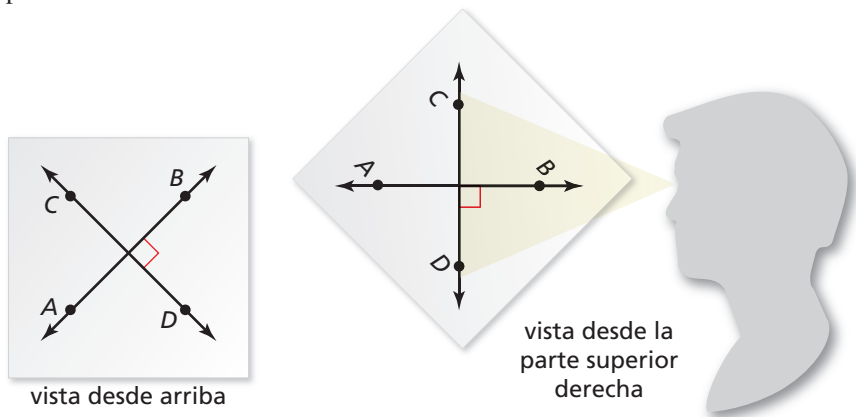
50. $m\angle DAC$ es igual al valor absoluto de la diferencia entre los números reales emparejados con \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{AC} en un transportador.

2.3 Postulados y diagramas

Pregunta esencial En un diagrama, ¿qué puedes presuponer y qué necesitas que esté rotulado?

EXPLORACIÓN 1 Observar un diagrama

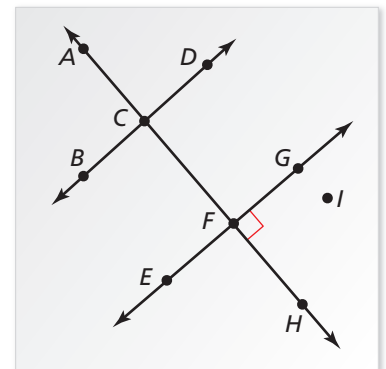
Trabaja con un compañero. En una hoja de papel, dibuja líneas perpendiculares. Rotúlalas como \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} . Observa el diagrama desde diferentes ángulos. ¿Las líneas parecen perpendiculares sin importar el ángulo desde el cual las observes? Describe *todos* los ángulos desde los que puedas ver las líneas y hazlas aparecer perpendiculares.



EXPLORACIÓN 2 Interpretar un diagrama

Trabaja con un compañero. Cuando dibujas un diagrama, estás comunicándote con otros. Es importante que incluyas en él suficiente información. Utiliza el diagrama para determinar cuál de los siguientes enunciados puedes presuponer como verdaderos. Explica tu razonamiento.

- Todos los puntos mostrados son coplanares.
- Los puntos D , G , y I son colineales.
- Los puntos A , C , y H son colineales.
- \overleftrightarrow{EG} y \overleftrightarrow{AH} son perpendiculares.
- $\angle BCA$ y $\angle ACD$ son un par lineal.
- \overleftrightarrow{AF} y \overleftrightarrow{BD} son perpendiculares.
- \overleftrightarrow{AF} y \overleftrightarrow{BD} son coplanares.
- \overleftrightarrow{AF} y \overleftrightarrow{BD} se intersecan.
- $\angle ACD$ y $\angle BCF$ son ángulos verticales.



- \overleftrightarrow{EG} y \overleftrightarrow{BD} son paralelos.
- \overleftrightarrow{EG} y \overleftrightarrow{BD} no se intersecan.
- \overleftrightarrow{EG} y \overleftrightarrow{BD} son perpendiculares.
- \overleftrightarrow{AC} y \overleftrightarrow{FH} son la misma línea.

Comunicar tu respuesta

- En un diagrama, ¿qué puedes presuponer y qué necesitas que esté rotulado?
- Utiliza el diagrama de la Exploración 2 para escribir dos enunciados que puedas presuponer como verdaderos y dos enunciados que no puedas presuponer como verdaderos. Tus enunciados deben ser diferentes de los que se han dado en la Exploración 2. Explica tu razonamiento.

2.3 Lección

Vocabulario Esencial

recta perpendicular a un plano,
pág. 86

Anterior
postulado
punto
recta
plano

Qué aprenderás

- ▶ Identificar postulados usando diagramas.
- ▶ Bosquejar e interpretar diagramas.

Identificar postulados

Estos son siete postulados más que implican puntos, rectas, y planos.

Postulados

Postulados de punto, recta y plano

Postulado

Ejemplo

2.1 Postulado de los dos puntos

A través de dos puntos cualesquiera pasa exactamente una recta.



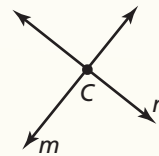
A través de los puntos A y B , pasa exactamente una recta l . La recta l contiene al menos dos puntos.

2.2 Postulado recta-punto

Una recta contiene al menos dos puntos.

2.3 Postulado de la intersección de la recta

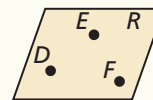
Si dos rectas se intersecan, entonces su intersección es exactamente un punto.



La intersección de la recta m y la recta n es el punto C .

2.4 Postulado de los tres puntos

A través de tres puntos no colineales cualesquiera, existe exactamente un plano.



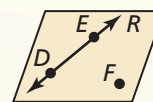
A través de los puntos D , E , y F , existe exactamente un plano, el plano R . El plano R contiene al menos tres puntos no colineales.

2.5 Postulado del plano-punto

Un plano contiene al menos tres puntos no colineales.

2.6 Postulado plano-recta

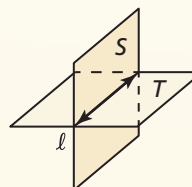
Si dos puntos pertenecen a un plano, entonces la recta que los contiene pertenece al plano.



Los puntos D y E pertenecen al plano R , por lo que \overleftrightarrow{DE} pertenece al plano R .

2.7 Postulado de la intersección del plano

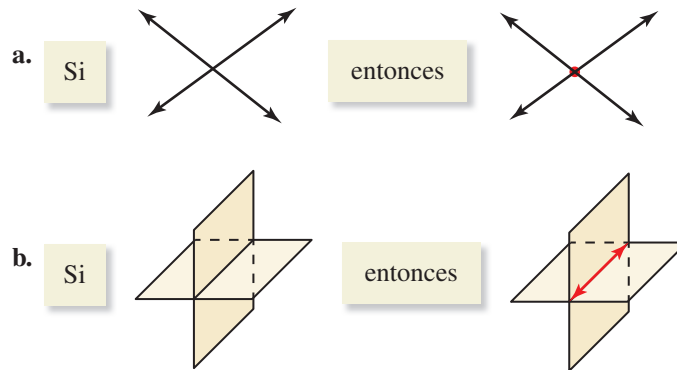
Si dos planos se intersecan, entonces su intersección es una recta.



La intersección del plano S y el plano T es la recta l .

EJEMPLO 1 Identificar un postulado usando un diagrama

Indica el postulado ilustrado por el diagrama.



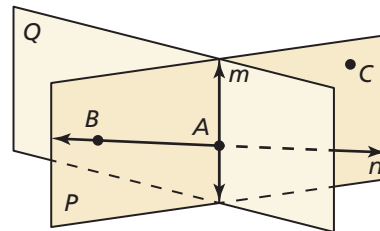
SOLUCIÓN

a. **Postulado de la intersección de la recta** Si dos rectas se intersecan, entonces su intersección es exactamente un punto.

b. **Postulado de la intersección del plano** Si dos planos se intersecan, entonces su intersección es una recta.

EJEMPLO 2 Identificar postulados por un diagrama

Utiliza el diagrama para escribir ejemplos del postulado plano-punto y el postulado plano-recta.



SOLUCIÓN

Postulado plano-punto El plano P contiene al menos tres puntos no colineales, A , B , y C .

Postulado plano-recta El punto A y el punto B pertenecen al plano P . Por lo tanto, la recta n que contiene los puntos A y B también pertenece al plano P .

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

1. Utiliza el diagrama del Ejemplo 2. ¿Qué postulado te permite decir que la intersección del plano P y el plano Q es una recta?
2. Utiliza el diagrama en el Ejemplo 2 para escribir un ejemplo del postulado.
 - a. Postulado de los dos puntos
 - b. Postulado recta-punto
 - c. Postulado de la intersección de la recta

Bosquejar e interpretar diagramas

EJEMPLO 3 Bosquejar un diagrama

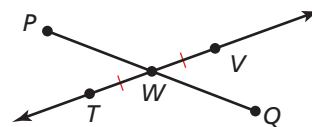
Bosqueja un diagrama que muestre a \overleftrightarrow{TV} intersectando a \overline{PQ} en el punto W , de manera que $\overline{TW} \cong \overline{WV}$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Dibuja \overleftrightarrow{TV} y rotula los puntos T y V .

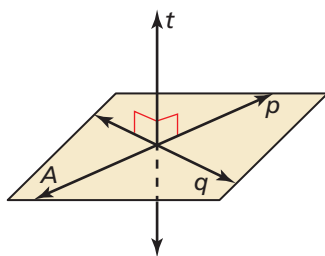
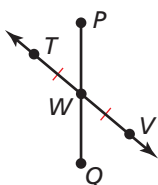
Paso 2 Dibuja el punto W en el punto medio de \overline{TV} . Marca los segmentos congruentes.

Paso 3 Dibuja \overline{PQ} a través de W .



OTRA MANERA

En el Ejemplo 3 se presentan muchas formas de bosquejar el diagrama. Otra más se presenta abajo.



Una línea es una **recta perpendicular a un plano** si y sólo si la línea interseca el plano en un punto y es perpendicular a todas las rectas en el plano que interseca en ese punto.

En un diagrama, se debe marcar una recta perpendicular a un plano con un símbolo de ángulo recto, como se muestra.

EJEMPLO 4 Interpretar un diagrama

¿Cuál de los siguientes enunciados *no* se puede presuponer a partir del diagrama?

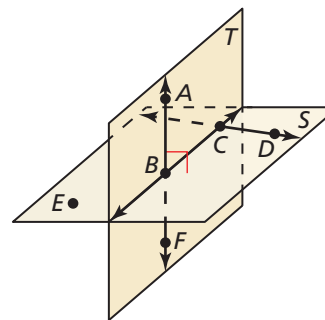
Los puntos A , B , y F son colineales.

Los puntos E , B , y D son colineales.

$\overleftrightarrow{AB} \perp$ plano S

$\overleftrightarrow{CD} \perp$ plano T

\overleftrightarrow{AF} interseca \overleftrightarrow{BC} en el punto B .



SOLUCIÓN

Ninguna línea trazada conecta los puntos E , B , y D . Por tanto, no puedes presuponer que sean colineales. Sin ningún ángulo recto marcado, no puedes presuponer que $\overleftrightarrow{CD} \perp$ plano T .

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Consulta el Ejemplo 3.

- Si la información dada indica que \overline{PW} y \overline{QW} son congruentes, ¿cómo puedes indicar esto en el diagrama?
- Nombra un par de ángulos suplementarios en el diagrama. Explica.

Utiliza el diagrama en el Ejemplo 4.

- ¿Puedes presuponer que el plano S interseca el plano T en \overleftrightarrow{BC} ?
- Explica cómo sabes que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

2.3 Ejercicios

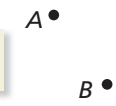
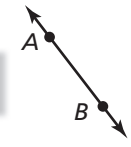
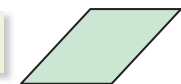
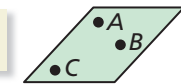
Soluciones dinámicas disponibles en BigIdeasMath.com

Verificación de vocabulario y concepto esencial

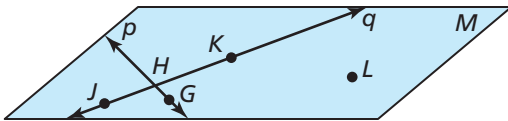
- COMPLETAR LA ORACIÓN** A través de _____ puntos no colineales cualesquiera, existe exactamente un plano.
- ESCRIBIR** Explica por qué necesitas al menos tres puntos no colineales para determinar un plano.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3 y 4, indica el postulado ilustrado por el diagrama. (Consulta el Ejemplo 1).

3. Si  entonces 
4. Si  entonces 

En los Ejercicios 5–8, utiliza el diagrama para escribir un ejemplo del postulado. (Consulta el Ejemplo 2).

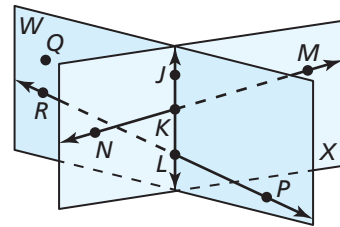


- Postulado recta-punto (Postulado 2.2)
- Postulado intersección de la recta (Postulado 2.3)
- Postulado de los tres puntos (Postulado 2.4)
- Postulado plano-recta (Postulado 2.6)

En los Ejercicios 9–12, dibuja un diagrama de la descripción. (Consulta el Ejemplo 3).

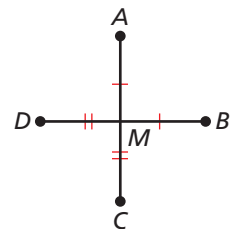
- el plano P y línea m intersecan al plano P en un ángulo de 90°
- \overline{XY} en el plano P , \overline{XY} bisecado por el punto A , y el punto C no está en \overline{XY}
- \overline{XY} interseca \overline{WV} en el punto A , por lo que $XA = VA$
- \overline{AB} , \overline{CD} , y \overline{EF} están todos en el plano P , y el punto X es el punto medio de los tres segmentos.



En los Ejercicios 13–20, utiliza el diagrama para determinar si puedes presuponer el enunciado. (Consulta el Ejemplo 4).



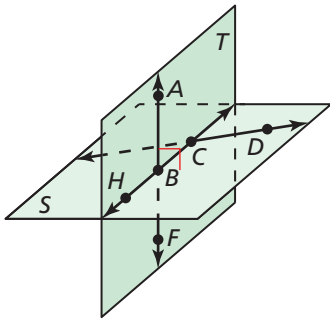
- Los planos W y X se intersecan en \overleftrightarrow{KL} .
- Los puntos K , L , M , y N son coplanares.
- Los puntos Q , J , y M son colineales.
- \overleftrightarrow{MN} y \overleftrightarrow{RP} se intersecan.
- \overleftrightarrow{JK} pertenece al plano X .
- $\angle PLK$ es un ángulo recto.
- $\angle NKL$ y $\angle JKM$ son ángulos verticales.
- $\angle NKJ$ y $\angle JKM$ son ángulos suplementarios.

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 21 y 22, describe y corrige el error en el enunciado formulado acerca del diagrama.



-  M es el punto medio de \overline{AC} y \overline{BD} .
-  \overline{AC} interseca \overline{BD} a un ángulo de 90° , por lo que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

23. **PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN** Selecciona todos los enunciados acerca del diagrama de los que *no puedas* derivar una conclusión.



- (A) $A, B,$ y C son coplanares.
- (B) El plano T interseca al plano S en \overleftrightarrow{BC} .
- (C) \overleftrightarrow{AB} interseca a \overleftrightarrow{CD} .
- (D) $H, F,$ y D son coplanares.
- (E) El plano $T \perp$ al plano S .
- (F) El punto B biseca a \overleftrightarrow{HC} .
- (G) $\angle ABH$ y $\angle HBF$ son un par lineal.
- (H) $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

24. **¿CÓMO LO VES?** Utiliza el diagrama de la línea m y el punto C . Formula una conjetura acerca de cuántos planos se pueden trazar de manera que la línea m y el punto C estén en el mismo plano. Utiliza los postulados que justifiquen tu conjetura.



25. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Una forma de graficar una ecuación lineal es marcar dos puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación y después conectarlas mediante una línea. ¿Qué postulado garantiza que este proceso funcione para cualquier ecuación lineal?
26. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Una forma de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que se intersecan es graficar las líneas y hallar las coordenadas de su intersección. ¿Qué postulado garantiza que este proceso funcione para dos ecuaciones lineales cualesquiera?

En los Ejercicios 27 y 28, (a) reescribe el postulado en la forma *si... entonces*. Después (b) escribe el recíproco, inverso y contrarrecíproco e indica cuáles son verdaderos.

27. Postulado de los dos puntos (Postulado 2.1)
28. Postulado plano-punto (Postulado 2.5)
29. **RAZONAR** Elige el símbolo correcto que debe ir entre los enunciados.

número de puntos para determinar una línea

número de puntos para determinar un plano



30. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Si dos rectas se intersecan, entonces se intersecan exactamente en un punto por el Postulado de la intersección de la recta (Postulado 2.3). ¿Las dos rectas deben estar en el mismo plano? Haz un dibujo que apoye tu respuesta. Después explica tu razonamiento.
31. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que, aunque dos planos se intersecan en una línea, es posible que los tres planos intersequen en un punto. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu respuesta.
32. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que en virtud del Postulado de la intersección del plano (Postulado 2.7), dos planos cualesquiera se intersecan en una línea. ¿La interpretación de tu amigo del Postulado de la intersección del plano es correcta? Explica tu razonamiento.
33. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Los puntos E, F y G están en el plano P y en el plano Q . ¿Qué condiciones deben cumplir los puntos $E, F,$ y G para que los planos P y Q sean planos diferentes? ¿Qué condiciones deben cumplir los puntos $E, F,$ y G para obligar a que los planos P y Q estén en el mismo plano? Haz bosquejos que apoyen tus respuestas.
34. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Los postulados en este libro representan la geometría Euclidiana. En la geometría esférica, todos los puntos son puntos sobre la superficie de una esfera. Una línea es un círculo en la esfera, cuyo diámetro es igual al diámetro. Un plano es la superficie de la esfera. Halla un postulado de la página 84 que no sea verdadero en la geometría esférica. Explica tu razonamiento.

Mantener el dominio de las matemáticas Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Resuelve la ecuación. Indica cuál propiedad algebraica de igualdad utilizaste. (*Manual de revisión de destrezas*)

35. $t - 6 = -4$

36. $3x = 21$

37. $9 + x = 13$

38. $\frac{x}{7} = 5$

2.1–2.3 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

enunciado condicional, *pág. 66*
forma si..., entonces, *pág. 66*
hipótesis, *pág. 66*
conclusión, *pág. 66*
negación, *pág. 66*
recíproco, *pág. 67*
inverso, *pág. 67*

contrarrecíproco, *pág. 67*
enunciados equivalentes, *pág. 67*
líneas perpendiculares, *pág. 68*
enunciado bicondicional, *pág. 69*
valor de verdad, *pág. 70*
tabla de verdad, *pág. 70*

conjetura, *pág. 76*
razonamiento inductivo, *pág. 76*
contraejemplo, *pág. 77*
razonamiento deductivo, *pág. 78*
recta perpendicular a un plano,
pág. 86

Conceptos Esenciales

Sección 2.1

Enunciado condicional, *pág. 66*
Negación, *pág. 66*
Condicionales relacionados, *pág. 67*

Enunciado bicondicional, *pág. 69*
Elaborar una tabla de verdad, *pág. 70*

Sección 2.2

Razonamiento inductivo, *pág. 76*
Contraejemplo, *pág. 77*

Razonamiento deductivo, *pág. 78*
Leyes de la lógica, *pág. 78*

Sección 2.3

Postulados 2.1–2.7 Postulados de punto, recta y plano, *pág. 84*
Identificar postulados, *pág. 85*
Bosquejar e interpretar diagramas, *pág. 86*

Prácticas matemáticas

1. Proporciona un contraejemplo para cada uno de los enunciados condicionales falsos en los Ejercicios 17–24 de la página 71. (No debes considerar los enunciados recíprocos, inversos ni contrarrecíprocos).
2. Crea una tabla de verdad para cada una de tus respuestas al Ejercicio 59 de la página 74.
3. Para el Ejercicio 32 de la página 88, escribe la pregunta que le harías a tu amigo acerca de su interpretación.

Destrezas de estudio

Usar las características del libro de texto para prepararse para pruebas y exámenes

- Lee y comprende el vocabulario esencial y el contenido de los recuadros de Concepto Esencial.
- Revisa las preguntas de los Ejemplos y Monitoreo del progreso. Utiliza los tutoriales en *BigIdeasMath.com* como herramientas adicionales.
- Revisa las tareas previamente completadas.



2.1–2.3 Prueba

Reescribe el enunciado condicional en la forma si..., entonces. Después escribe el recíproco, inverso y contrarrecíproco del enunciado condicional. Decide si cada enunciado es verdadero o falso. (Sección 2.1)

- Un ángulo que mide 167° es un ángulo obtuso.
- Estás en clase de física, así que siempre tienes tarea.
- Haré mi prueba de manejo, así que obtendré mi licencia de conductor.

Halla un contraejemplo que demuestre que la conjetura es falsa. (Sección 2.2)

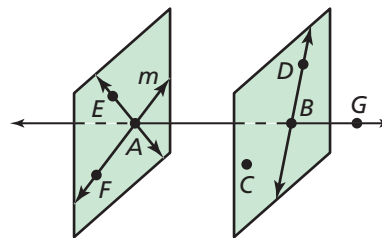
- La suma de un número positivo y uno negativo siempre es positiva.
- Si una figura tiene cuatro lados, entonces es un rectángulo.

Utiliza el razonamiento inductivo para hacer una conjetura acerca de la cantidad dada. Después utiliza el razonamiento deductivo para demostrar que la conjetura es verdadera. (Sección 2.2)

- la suma de dos enteros negativos
- la diferencia de dos enteros pares

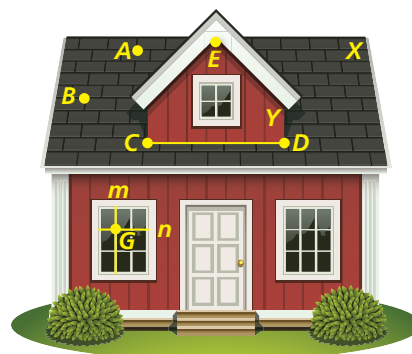
Utiliza el diagrama para determinar si puedes presuponer el enunciado. (Sección 2.3)

- Los puntos D , B , y C son coplanares.
- El plano EAF es paralelo al plano DBC .
- La línea m interseca a la línea \overleftrightarrow{AB} en el punto A .
- La línea \overleftrightarrow{DC} pertenece al plano DBC .
- $m\angle DBG = 90^\circ$



- Tú y tu amigo están jugando bolos. Tu amigo afirma que el enunciado “Si hago chuzas, entonces usaré la bola verde” puede escribirse como un enunciado bicondicional verdadero. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento. (Sección 2.1)
- La tabla muestra los tiempos que hicieron los miembros del equipo de atletismo de una escuela preparatoria en la carrera de 1 milla. (Sección 2.2)
 - ¿Qué conjetura puedes hacer acerca de los tiempos de carrera de los hombres y las mujeres?
 - ¿Qué tipo de razonamiento utilizaste? Explica.
- Haz una lista de cinco de los siete Postulados de punto, recta y plano de la página 84 que se demuestren en el diagrama de la casa. Explica cómo se demuestra el postulado en el diagrama. (Sección 2.3)

Mujeres	Hombres
06:43	05:41
07:22	06:07
07:04	05:13
06:39	05:21
06:56	06:01



2.4 Razonamiento algebraico

Pregunta esencial ¿Cómo te pueden ayudar las propiedades algebraicas a resolver una ecuación?

EXPLORACIÓN 1 Justificar los pasos en una solución

Trabaja con un compañero. En los cursos previos, estudiaste diferentes propiedades, como las propiedades de igualdad y las propiedades distributiva, conmutativa y asociativa. Escribe la propiedad que justifique cada uno de los siguientes pasos de la solución.

Paso algebraico	Justificación
$2(x + 3) - 5 = 5x + 4$	Escribe la ecuación dada.
$2x + 6 - 5 = 5x + 4$	
$2x + 1 = 5x + 4$	
$2x - 2x + 1 = 5x - 2x + 4$	
$1 = 3x + 4$	
$1 - 4 = 3x + 4 - 4$	
$-3 = 3x$	
$\frac{-3}{3} = \frac{3x}{3}$	
$-1 = x$	
$x = -1$	

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas, necesitas observar cuidadosamente para discernir un patrón o estructura.

EXPLORACIÓN 2 Enunciar propiedades algebraicas

Trabaja con un compañero. Los símbolos \blacklozenge y \bullet representan la suma y la multiplicación (no necesariamente en ese orden). Determina qué símbolo representa qué operación. Justifica tu respuesta. Después menciona cada una de las propiedades algebraicas ilustradas.

Ejemplo de la propiedad	Nombre de la propiedad
$5 \blacklozenge 6 = 6 \blacklozenge 5$	
$5 \bullet 6 = 6 \bullet 5$	
$4 \blacklozenge (5 \blacklozenge 6) = (4 \blacklozenge 5) \blacklozenge 6$	
$4 \bullet (5 \bullet 6) = (4 \bullet 5) \bullet 6$	
$0 \blacklozenge 5 = 0$	
$0 \bullet 5 = 5$	
$1 \blacklozenge 5 = 5$	
$4 \blacklozenge (5 \bullet 6) = 4 \blacklozenge 5 \bullet 4 \blacklozenge 6$	

Comunicar tu respuesta

- ¿Cómo pueden las propiedades algebraicas ayudarte a resolver una ecuación?
- Resuelve $3(x + 1) - 1 = -13$. Justifica cada paso.

2.4 Lección

Vocabulario Esencial

Anterior

ecuación
resolver una ecuación
fórmula

Qué aprenderás

- ▶ Utilizar las propiedades algebraicas de igualdad para justificar los pasos para resolver una ecuación.
- ▶ Utilizar la propiedad distributiva para justificar los pasos para resolver una ecuación.
- ▶ Utilizar propiedades de igualdad que involucren longitudes de segmentos y medidas de ángulos.

Utilizar las propiedades algebraicas de igualdad

Cuando *resuelves una ecuación*, utilizas las propiedades de los números reales. Las longitudes de segmento y las medidas de ángulo son números reales, por lo que también puedes utilizar esas propiedades para escribir argumentos lógicos sobre figuras geométricas.

Concepto Esencial

Propiedades algebraicas de la igualdad

Sean a , b , y c números reales.

Propiedad de igualdad de la suma Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Propiedad de igualdad de la resta Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

Propiedad de igualdad de la multiplicación Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$, $c \neq 0$.

Propiedad de igualdad de la división Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$.

Propiedad de igualdad de la sustitución Si $a = b$, entonces a puede sustituirse por b (o b por a) en cualquier ecuación o expresión.

EJEMPLO 1 Justificar los pasos

Resuelve $3x + 2 = 23 - 4x$. Justifica cada paso.

SOLUCIÓN

Ecuación	Explicación	Razón
$3x + 2 = 23 - 4x$	Escribe la ecuación.	Dado
$3x + 2 + 4x = 23 - 4x + 4x$	Suma $4x$ a cada lado.	Propiedad de igualdad de la suma
$7x + 2 = 23$	Combina términos semejantes.	Simplifica.
$7x + 2 - 2 = 23 - 2$	Resta 2 de cada lado.	Propiedad de igualdad de la resta
$7x = 21$	Combina términos constantes.	Simplifica.
$x = 3$	Divide cada lado entre 7.	Propiedad de igualdad de la división

- ▶ La solución es $x = 3$.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Resuelve la ecuación. Justifica cada paso.

- $6x - 11 = -35$
- $-2p - 9 = 10p - 17$
- $39 - 5z = -1 + 5z$

RECORDAR

Las operaciones inversas se "cancelan" unas a otras. La suma y la resta son operaciones inversas. La multiplicación y la división son operaciones inversas.

Utilizar la propiedad distributiva

Concepto Esencial

Propiedad distributiva

Sean a , b , y c números reales.

Suma $a(b + c) = ab + ac$

Diferencia $a(b - c) = ab - ac$

EJEMPLO 2 Utilizar la propiedad distributiva

Resuelve $-5(7w + 8) = 30$. Justifica cada paso.

SOLUCIÓN

Ecuación	Explicación	Razón
$-5(7w + 8) = 30$	Escribe la ecuación.	Dado
$-35w - 40 = 30$	Multiplícala.	Propiedad distributiva
$-35w = 70$	Suma 40 a cada lado.	Propiedad de igualdad de la suma
$w = -2$	Divide cada lado entre -35 .	Propiedad de igualdad de la división

► La solución es $w = -2$.

EJEMPLO 3 Resolver un problema de la vida real

Recibes un aumento en tu trabajo de medio tiempo. Para escribir tu aumento en forma de porcentaje, utiliza la fórmula $p(r + 1) = n$, donde p es tu salario anterior, r es el incremento porcentual (en forma decimal), y n es tu nuevo salario. Resuelve la fórmula para hallar r . ¿Cuál es tu aumento expresado como porcentaje cuando tu salario por hora aumenta de \$7.25 a \$7.54 por hora?

SOLUCIÓN

Paso 1 Resuelve para hallar r en la fórmula $p(r + 1) = n$.

Ecuación	Explicación	Razón
$p(r + 1) = n$	Escribe la ecuación.	Dado
$pr + p = n$	Multiplícala.	Propiedad distributiva
$pr = n - p$	Resta p de cada lado.	Propiedad de igualdad de la resta
$r = \frac{n - p}{p}$	Divide cada lado entre p .	Propiedad de igualdad de la división

Paso 2 Evalúa $r = \frac{n - p}{p}$ cuando $n = 7.54$ y $p = 7.25$.

$$r = \frac{n - p}{p} = \frac{7.54 - 7.25}{7.25} = \frac{0.29}{7.25} = 0.04$$

► Tu aumento es de 4%.

RECORDAR

Al evaluar las expresiones, utiliza el orden de las operaciones.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Resuelve la ecuación. Justifica cada paso.

4. $3(3x + 14) = -3$

5. $4 = -10b + 6(2 - b)$

6. Resuelve la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ para hallar b . Justifica cada paso. Después halla la base de un triángulo cuya área es de 952 pies cuadrados y cuya altura es de 56 pies.

Utilizar otras propiedades de igualdad

Las siguientes propiedades de igualdad son verdaderas para todos los números reales. Las longitudes de los segmentos y las medidas de los ángulos son números reales, por tanto estas propiedades de igualdad son verdaderas para todas las longitudes de segmentos y para todas las medidas de los ángulos.

Concepto Esencial

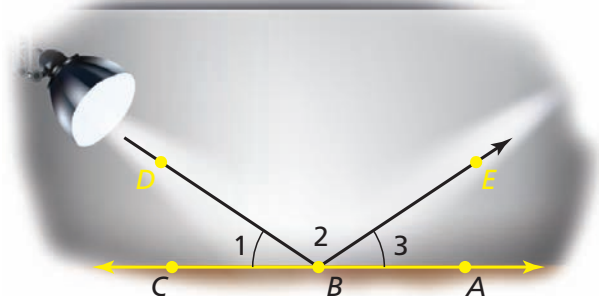
Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad

	Números reales	Longitudes de los segmentos	Medidas de los ángulos
Propiedad reflexiva	$a = a$	$AB = AB$	$m\angle A = m\angle A$
Propiedad simétrica	Si $a = b$, entonces $b = a$.	Si $AB = CD$, entonces $CD = AB$.	Si $m\angle A = m\angle B$, entonces $m\angle B = m\angle A$.
Propiedad transitiva	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.	Si $AB = CD$ y $CD = EF$, entonces $AB = EF$.	Si $m\angle A = m\angle B$ y $m\angle B = m\angle C$, entonces $m\angle A = m\angle C$.

EJEMPLO 4

Utilizar propiedades de igualdad con las medidas de los ángulos

El rayo de luz de un foco se refleja sobre un espejo colocado boca arriba sobre el escenario, como se muestra. Determina si $m\angle DBA = m\angle EBC$.



SOLUCIÓN

Ecuación	Explicación	Razón
$m\angle 1 = m\angle 3$	Marcado en el diagrama.	Dado
$m\angle DBA = m\angle 3 + m\angle 2$	Sumar medidas de los ángulos adyacentes.	Postulado de la suma de ángulos (Postulado 1.4)
$m\angle DBA = m\angle 1 + m\angle 2$	Substituir $m\angle 1$ por $m\angle 3$.	Propiedad de igualdad de la sustitución
$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle EBC$	Sumar medidas de los ángulos adyacentes.	Postulado de la suma de ángulos (Postulado 1.4)
$m\angle DBA = m\angle EBC$	Ambas medidas son iguales a la suma $m\angle 1 + m\angle 2$.	Propiedad transitiva de la igualdad

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Nombra la propiedad de igualdad que ilustra el enunciado.

- Si $m\angle 6 = m\angle 7$, luego $m\angle 7 = m\angle 6$.
- $34^\circ = 34^\circ$
- $m\angle 1 = m\angle 2$ y $m\angle 2 = m\angle 5$. Entonces, $m\angle 1 = m\angle 5$.

EJEMPLO 5 Representar con matemáticas



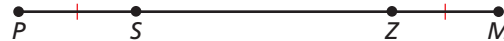
Un parque, una zapatería, una pizzería y un cine se localizan en ese orden sobre la calle de una ciudad. La distancia entre el parque y la zapatería es la misma que la distancia entre la pizzería y el cine. Demuestra que la distancia entre el parque y la pizzería es la misma distancia que hay entre la zapatería y el cine.

SOLUCIÓN

- 1. Comprende el problema** Sabes que las localidades están en orden y que la distancia entre dos de las ubicaciones (parque y zapatería) es la misma que la distancia entre las otras dos (pizzería y cine). Necesitas demostrar que las dos distancias son iguales.
- 2. Haz un plan** Dibuja y rotula un diagrama que represente la situación.



Modifica tu diagrama permitiendo que los puntos P , S , Z , y M representen al parque, la zapatería, la pizzería y el cine, respectivamente. Demuestra cualquier relación matemática.



Utiliza el Postulado de suma de segmento (Postulado 1.2) para demostrar que $PZ = SM$.

3. Resuelve el problema

Ecuación	Explicación	Razón
$PS = ZM$	Marcado en el diagrama.	Dado
$PZ = PS + SZ$	Sumar las longitudes de los segmentos adyacentes.	Postulado de suma de segmento (Post. 1.2)
$SM = SZ + ZM$	Sumar las longitudes de los segmentos adyacentes.	Postulado de suma de segmento (Post. 1.2)
$PS + SZ = ZM + SZ$	Sumar SZ a cada lado de $PS = ZM$.	Propiedad de igualdad de la suma
$PZ = SM$	Sustituir PZ por $PS + SZ$ y SM por $ZM + SZ$	Propiedad de igualdad de la sustitución

- 4. Verificalo** Relee el problema. Asegúrate de que tu diagrama esté dibujado utilizando precisamente la información dada. Verifica los pasos en tu solución.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Nombra la propiedad de igualdad que ilustra el enunciado.

- Si $JK = KL$ y $KL = 16$, luego $JK = 16$.
- $PQ = ST$, entonces $ST = PQ$.
- $ZY = ZY$
- En el Ejemplo 5, un puesto de hot dogs está situado a medio camino entre la zapatería y la pizzería, en el punto H . Demuestra que $PH = HM$.

Verificación de vocabulario y concepto esencial

- VOCABULARIO** ¿El enunciado “La medida de un ángulo es igual a sí mismo” es verdadero debido a qué propiedad?
- DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** ¿Cuál es diferente? Halla ambas respuestas.

¿Qué propiedad justifica el siguiente enunciado?

Si $c = d$, entonces $d = c$.

Si $JK = LM$, entonces $LM = JK$.

Si $e = f$ y $f = g$, entonces $e = g$.

Si $m\angle R = m\angle S$, entonces $m\angle S = m\angle R$.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3 y 4, escribe la propiedad que justifique cada paso.

3.	$3x - 12 = 7x + 8$	Dado
	$-4x - 12 = 8$	_____
	$-4x = 20$	_____
	$x = -5$	_____

4.	$5(x - 1) = 4x + 13$	Dado
	$5x - 5 = 4x + 13$	_____
	$x - 5 = 13$	_____
	$x = 18$	_____

En los Ejercicios 5–14, resuelve la ecuación. Justifica cada paso. (Consulta los Ejemplos 1 y 2).

- | | |
|-----------------------------|-----------------------|
| 5. $5x - 10 = -40$ | 6. $6x + 17 = -7$ |
| 7. $2x - 8 = 6x - 20$ | 8. $4x + 9 = 16 - 3x$ |
| 9. $5(3x - 20) = -10$ | |
| 10. $3(2x + 11) = 9$ | |
| 11. $2(-x - 5) = 12$ | |
| 12. $44 - 2(3x + 4) = -18x$ | |
| 13. $4(5x - 9) = -2(x + 7)$ | |
| 14. $3(4x + 7) = 5(3x + 3)$ | |

En los Ejercicios 15–20, resuelve la ecuación para hallar y . Justifica cada paso. (Consulta el Ejemplo 3).

- | | |
|-------------------------|--|
| 15. $5x + y = 18$ | 16. $-4x + 2y = 8$ |
| 17. $2y + 0.5x = 16$ | 18. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -2$ |
| 19. $12 - 3y = 30x + 6$ | 20. $3x + 7 = -7 + 9y$ |

En los Ejercicios 21–24, resuelve la ecuación para hallar la variable dada. Justifica cada paso. (Consulta el Ejemplo 3).

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 21. $C = 2\pi r$; r | 22. $I = Prt$; P |
| 23. $S = 180(n - 2)$; n | 24. $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$; h |


En los Ejercicios 25–32, nombra la propiedad de igualdad que ilustra el enunciado.


- Si $x = y$, entonces $3x = 3y$.
- Si $AM = MB$, entonces $AM + 5 = MB + 5$.
- $x = x$
- Si $x = y$, entonces $y = x$.
- $m\angle Z = m\angle Z$
- Si $m\angle A = 29^\circ$ y $m\angle B = 29^\circ$, entonces $m\angle A = m\angle B$.
- Si $AB = LM$, entonces $LM = AB$.
- Si $BC = XY$ y $XY = 8$, entonces $BC = 8$.

En los Ejercicios 33–40, utiliza la propiedad para copiar y completar el enunciado.

33. Propiedad de igualdad de la sustitución:
Si $AB = 20$, entonces $AB + CD = \underline{\hspace{2cm}}$.
34. Propiedad de igualdad simétrica:
Si $m\angle 1 = m\angle 2$, entonces $\underline{\hspace{2cm}}$.
35. Propiedad de igualdad de la suma:
Si $AB = CD$, entonces $AB + EF = \underline{\hspace{2cm}}$.
36. Propiedad de igualdad de la multiplicación:
Si $AB = CD$, entonces $5 \cdot AB = \underline{\hspace{2cm}}$.
37. Propiedad de igualdad de la resta:
Si $LM = XY$, entonces $LM - GH = \underline{\hspace{2cm}}$.
38. Propiedad distributiva:
Si $5(x + 8) = 2$, entonces $\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = 2$.
39. Propiedad transitiva de la igualdad:
Si $m\angle 1 = m\angle 2$ y $m\angle 2 = m\angle 3$, entonces $\underline{\hspace{2cm}}$.
40. Propiedad reflexiva de la igualdad:
 $m\angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$.

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 41 y 42, describe y corrige el error al resolver la ecuación.

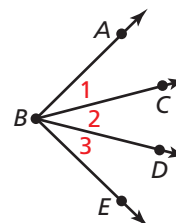
41.  $7x = x + 24$ Dado
 $8x = 24$ Propiedad de igualdad de la suma
 $x = 3$ Propiedad de igualdad de la división

42.  $6x + 14 = 32$ Dado
 $6x = 18$ Propiedad de igualdad de la división
 $x = 3$ Simplifica.

43. **REESCRIBIR UNA FÓRMULA** La fórmula para el perímetro P de un rectángulo es $P = 2\ell + 2w$, donde ℓ es la longitud y w es el ancho. Resuelve la fórmula para hallar ℓ . Justifica cada paso. Después halla la longitud de un jardín rectangular con un perímetro de 32 metros y un ancho de 5 metros.

44. **REESCRIBIR UNA FÓRMULA** La fórmula para el área A de un trapecio es $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, donde h es la altura y b_1 y b_2 son las longitudes de las dos bases. Resuelve la fórmula para hallar b_1 . Justifica cada paso. Después halla la longitud de una de las bases del trapecio cuando su área es 91 metros cuadrados, su altura es 7 metros y la longitud de la otra base es 20 metros.

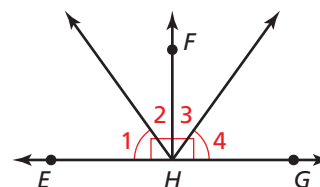
45. **ANALIZAR RELACIONES** En el diagrama, $m\angle ABD = m\angle CBE$. Demuestra que $m\angle 1 = m\angle 3$. (Consulta el Ejemplo 4).



46. **ANALIZAR RELACIONES** En el diagrama, $AC = BD$. Demuestra que $AB = CD$. (Consulta el Ejemplo 5).



47. **ANALIZAR RELACIONES** Copia y completa la tabla para demostrar que $m\angle 2 = m\angle 3$.

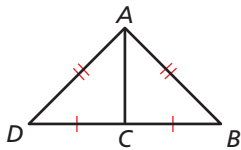


Ecuación	Razón
$m\angle 1 = m\angle 4, m\angle EHF = 90^\circ, m\angle GHF = 90^\circ$	Dado
$m\angle EHF = m\angle GHF$	
$m\angle EHF = m\angle 1 + m\angle 2$ $m\angle GHF = m\angle 3 + m\angle 4$	
$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	
	Propiedad de igualdad de la sustitución
$m\angle 2 = m\angle 3$	

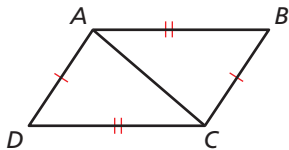
48. **ESCRIBIR** Compara la propiedad reflexiva de la igualdad con la propiedad simétrica de la igualdad. ¿En qué se parecen estas propiedades? ¿En qué son diferentes?

RAZONAR En los Ejercicios 49 y 50, demuestra que el perímetro de $\triangle ABC$ es igual al perímetro de $\triangle ADC$.

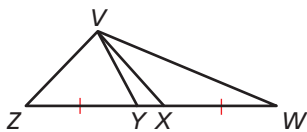
49.



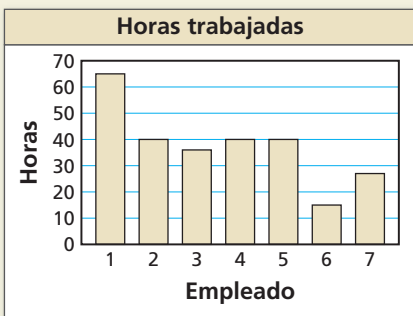
50.



51. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** En la figura, $\overline{ZY} \cong \overline{XW}$, $ZX = 5x + 17$, $YW = 10 - 2x$, y $YX = 3$. Halla ZY y XW .



52. **¿CÓMO LO VES?** La gráfica de barras muestra el número de horas que cada empleado trabaja en el supermercado. Da un ejemplo de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad.



53. **PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN** ¿Cuál de los siguientes enunciados ilustra la propiedad simétrica de la igualdad? Selecciona todos los enunciados aplicables.

- (A) Si $AC = RS$, entonces $RS = AC$.
- (B) Si $x = 9$, entonces $9 = x$.
- (C) Si $AD = BC$, entonces $DA = CB$.
- (D) $AB = BA$
- (E) Si $AB = LM$ y $LM = RT$, entonces $AB = RT$.
- (F) Si $XY = EF$, entonces $FE = XY$.

54. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe ejemplos de tu vida cotidiana que te ayuden a recordar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad. Justifica tus respuestas.

55. **REPRESENTACIONES MÚLTIPLES** La fórmula para convertir una temperatura en grados Fahrenheit ($^{\circ}F$) a grados Celsius ($^{\circ}C$) es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

- a. Resuelve la fórmula para hallar F . Justifica cada paso.
- b. Elabora una tabla que muestre conversión a Fahrenheit para cada temperatura: $0^{\circ}C$, $20^{\circ}C$, $32^{\circ}C$ y $41^{\circ}C$.
- c. Utiliza tu tabla para graficar la temperatura en grados Fahrenheit en función de la temperatura en grados Celsius. ¿Es una función lineal?

56. **RAZONAR** Selecciona todas las propiedades que también serían aplicables a las desigualdades. Explica tu razonamiento.

- (A) Propiedad de la suma
- (B) Propiedad de la resta
- (C) Propiedad de la sustitución
- (D) Propiedad reflexiva
- (E) Propiedad simétrica
- (F) Propiedad transitiva

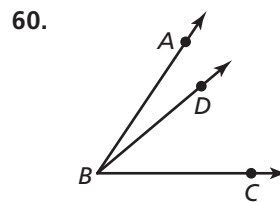
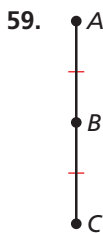
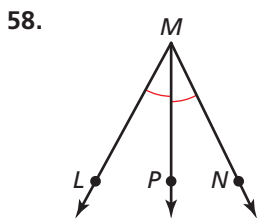
Mantener el dominio de las matemáticas Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Nombra la definición, propiedad o postulado representado por cada diagrama.

(Sección 1.2, Sección 1.3 y Sección 1.5)



$$XY + YZ = XZ$$



$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

2.5 Demostrar enunciados sobre segmentos y ángulos

Pregunta esencial ¿Cómo puedes demostrar un enunciado matemático?

Una **prueba** es un argumento lógico que utiliza el razonamiento deductivo para demostrar que un enunciado es verdadero.

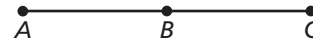
EXPLORACIÓN 1 Escribir razones en una prueba

RAZONAR DE MANERA ABSTRACTA

Para dominar las matemáticas, es necesario saber y ser capaz de utilizar las propiedades algebraicas.

Trabaja con un compañero. Se muestran cuatro pasos de una prueba. Escribe las razones para cada enunciado.

Dado $AC = AB + AB$



Demostrar $AB = BC$

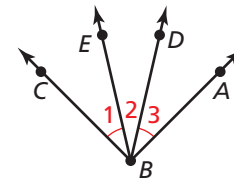
ENUNCIADOS	RAZONES
1. $AC = AB + AB$	1. Dado
2. $AB + BC = AC$	2. <input type="text"/>
3. $AB + AB = AB + BC$	3. <input type="text"/>
4. $AB = BC$	4. <input type="text"/>

EXPLORACIÓN 2 Escribir pasos en una prueba

Trabaja con un compañero. Se muestran seis pasos de una prueba. Completa los enunciados que correspondan a cada razón.

Dado $m\angle 1 = m\angle 3$

Demostrar $m\angle EBA = m\angle CBD$



ENUNCIADOS	RAZONES
1. <input type="text"/>	1. Dado
2. $m\angle EBA = m\angle 2 + m\angle 3$	2. Postulado de la suma de ángulos (Post.1.4)
3. $m\angle EBA = m\angle 2 + m\angle 1$	3. Propiedad de igualdad de la sustitución
4. $m\angle EBA =$ <input type="text"/>	4. Propiedad conmutativa de la suma
5. $m\angle 1 + m\angle 2 =$ <input type="text"/>	5. Postulado de la suma de ángulos (Post.1.4)
6. <input type="text"/>	6. Propiedad transitiva de la igualdad

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes demostrar un enunciado matemático?

4. Utiliza la información dada y la figura para escribir una prueba del enunciado.

Dado B es el punto medio de \overline{AC} .
 C es el punto medio de \overline{BD} .

Demostrar $AB = CD$



2.5 Lección

Qué aprenderás

- ▶ Escribir pruebas de dos columnas.
- ▶ Nombrar y demostrar las propiedades de congruencia.

Vocabulario Esencial

prueba, pág. 100

prueba de dos columnas, pág. 100

teorema, pág. 101

Escribir pruebas de dos columnas

Una **prueba** es un argumento lógico que utiliza el razonamiento deductivo para demostrar que un enunciado es verdadero. Existen varios formatos de pruebas. Una **prueba de dos columnas** tiene enunciados numerados y razones correspondientes que muestran un argumento en un orden lógico.

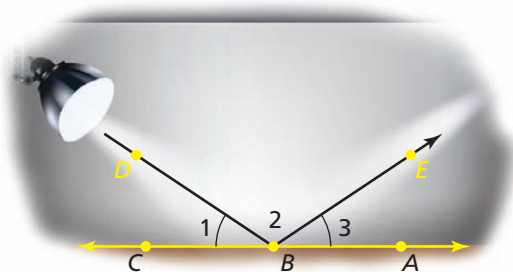
En una prueba de dos columnas, cada enunciado en la columna izquierda está dado por la información o por el resultado de aplicar un dato o propiedad conocida a los enunciados ya formulados. Cada razón en la columna derecha es la explicación del enunciado correspondiente.

EJEMPLO 1 Escribir una prueba de dos columnas

Escribe una prueba de dos columnas para la situación descrita en el Ejemplo 4 de la Sección 2.4.

Dado $m\angle 1 = m\angle 3$

Demostrar $m\angle DBA = m\angle EBC$



ENUNCIADOS	RAZONES
1. $m\angle 1 = m\angle 3$	1. Dado
2. $m\angle DBA = m\angle 3 + m\angle 2$	2. Postulado de la suma de ángulos (Post.1.4)
3. $m\angle DBA = m\angle 1 + m\angle 2$	3. Propiedad de igualdad de la sustitución
4. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle EBC$	4. Postulado de la suma de ángulos (Post.1.4)
5. $m\angle DBA = m\angle EBC$	5. Propiedad transitiva de la igualdad

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

- Se muestran seis pasos de una prueba de dos columnas. Copia y completa la prueba.

Dado T es el punto medio de \overline{SU} .



Demostrar $x = 5$

ENUNCIADOS	RAZONES
1. T es el punto medio de \overline{SU} .	1. _____
2. $\overline{ST} \cong \overline{TU}$	2. Definición de punto medio
3. $ST = TU$	3. Definición de segmentos congruentes
4. $7x = 3x + 20$	4. _____
5. _____	5. Propiedad de igualdad de la resta
6. $x = 5$	6. _____

Utilizar las propiedades de congruencia

Entre las razones utilizadas en una prueba se pueden incluir las definiciones, las propiedades, los postulados y los *teoremas*. Un **teorema** es un enunciado que puede demostrarse. Una vez que has demostrado un teorema, puedes utilizarlo como razón en otras pruebas.

Teoremas

Teorema 2.1 Propiedades de la congruencia de segmentos

La congruencia de segmentos es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva Para cualquier segmento AB , $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.

Simétrica Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

Transitiva Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

Pruebas Ej. 11, pág. 103; Ej. 3, pág. 101; Repaso del capítulo 2.5 Ej., pág. 118

Teorema 2.2 Propiedades de la congruencia de ángulos

La congruencia de ángulos es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva Para cualquier ángulo A , $\angle A \cong \angle A$.

Simétrica Si $\angle A \cong \angle B$, entonces $\angle B \cong \angle A$.

Transitiva Si $\angle A \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\angle A \cong \angle C$.

Pruebas Ej. 25, pág. 118; 2.5 Resumen de conceptos, pág. 102; Ej. 12, pág. 103

EJEMPLO 2 Nombrar las propiedades de la congruencia

Nombra la propiedad que ilustra el enunciado.

- Si $\angle T \cong \angle V$ y $\angle V \cong \angle R$, entonces $\angle T \cong \angle R$.
- Si $\overline{JL} \cong \overline{YZ}$, entonces $\overline{YZ} \cong \overline{JL}$.

SOLUCIÓN

- Propiedad transitiva de la congruencia de ángulos
- Propiedad simétrica de la congruencia de segmentos

En esta lección, la mayoría de las pruebas implican demostrar que la congruencia y la igualdad son equivalentes. Quizá encuentres que lo que se te pide demostrar parece ser obviamente verdadero. Es importante practicar la escritura de estas pruebas para ayudarte a prepararte para escribir pruebas más complicadas en capítulos siguientes.

EJEMPLO 3 Escribir una propiedad simétrica de la congruencia

Escribe una prueba de dos columnas para la propiedad simétrica de la congruencia de segmentos.

Dado $\overline{LM} \cong \overline{NP}$
Demostrar $\overline{NP} \cong \overline{LM}$



CONSEJO DE ESTUDIO

Al escribir una prueba, copia o dibuja un diagrama para la situación descrita para organizar tu razonamiento. Después identifica los enunciados **Dado** y **Demostrar**.

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\overline{LM} \cong \overline{NP}$	1. Dado
2. $LM = NP$	2. Definición de segmentos congruentes
3. $NP = LM$	3. Propiedad simétrica de la igualdad
4. $\overline{NP} \cong \overline{LM}$	4. Definición de segmentos congruentes

EJEMPLO 4

Escribir una prueba de dos columnas

Demuestra esta propiedad de los puntos medios: Si sabes que M es el punto medio de \overline{AB} , demuestra que AB es dos veces AM y AM es la mitad de AB .

Dado M es el punto medio de \overline{AB} .



Demostrar $AB = 2AM$, $AM = \frac{1}{2}AB$

ENUNCIADOS	RAZONES
1. M es el punto medio de \overline{AB} .	1. Dado
2. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$	2. Definición del punto medio
3. $AM = MB$	3. Definición de segmentos congruentes
4. $AM + MB = AB$	4. Postulado de la suma de segmentos (Post. 1.2)
5. $AM + AM = AB$	5. Propiedad de igualdad de la sustitución
6. $2AM = AB$	6. Propiedad distributiva
7. $AM = \frac{1}{2}AB$	7. Propiedad de igualdad de la división

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Nombra la propiedad que ilustra el enunciado.

- $\overline{GH} \cong \overline{GH}$
- Si $\angle K \cong \angle P$, entonces $\angle P \cong \angle K$.
- Vuelve al Ejemplo 4. ¿Qué cambiaría si fueras a demostrar que $AB = 2 \cdot MB$ y que en cambio $MB = \frac{1}{2}AB$?

Resumen de conceptos

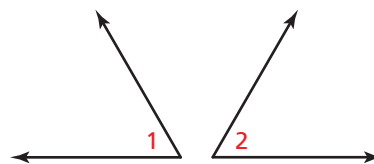
Escribir una prueba de dos columnas

En una prueba, formulas un enunciado a la vez hasta llegar a la conclusión. Como formulas enunciados con base en datos, estás usando el razonamiento deductivo. Por lo general el primer par enunciado-y-razón que escribes es la información dada.

Prueba de la propiedad simétrica de la congruencia de ángulos

Dado $\angle 1 \cong \angle 2$

Demostrar $\angle 2 \cong \angle 1$



Copia o dibuja diagramas y rotula la información dada para ayudar a desarrollar las pruebas. No marques o rotules la información en la parte de: Probar el enunciado del diagrama.

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\angle 1 \cong \angle 2$	1. Dada
2. $m\angle 1 = m\angle 2$	2. Definición de ángulos congruentes
3. $m\angle 2 = m\angle 1$	3. Propiedad simétrica de la igualdad
4. $\angle 2 \cong \angle 1$	4. Definición de ángulos congruentes

enunciados basados en datos que conoces o en conclusiones sacadas a partir del razonamiento deductivo

El número de enunciados variará.

Recuerda dar una razón para el último enunciado.

definiciones, postulados o teoremas probados que te permiten formular el enunciado correspondiente

2.5 Ejercicios

Verificación de vocabulario y concepto esencial

- ESCRIBIR** ¿En qué difiere un teorema de un postulado?
- COMPLETAR LA ORACIÓN** En una prueba de dos columnas, cada _____ está a la izquierda y cada _____ está a la derecha.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3 y 4, copia y completa la prueba. (Consulta el Ejemplo 1).

3. Dado $PQ = RS$

Demostrar $PR = QS$



ENUNCIADOS

- $PQ = RS$
- $PQ + QR = RS + QR$
- _____
- $RS + QR = QS$
- $PR = QS$

RAZONES

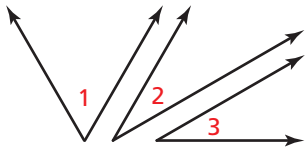
- _____
- _____
- Postulado de suma de segmentos (Post. 1.2)
- Postulado de suma de segmentos (Post. 1.2)
- _____

4. Dado

$\angle 1$ es un complemento de $\angle 2$.
 $\angle 2 \cong \angle 3$

Demostrar

$\angle 1$ es un complemento de $\angle 3$.



ENUNCIADOS

- $\angle 1$ es un complemento de $\angle 2$.
- $\angle 2 \cong \angle 3$
- $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$
- $m\angle 2 = m\angle 3$
- _____
- $\angle 1$ es un complemento de $\angle 3$.

RAZONES

- Dada
- _____
- _____
- Definición de ángulos congruentes
- Propiedad de igualdad de la sustitución
- _____

En los Ejercicios 5–10, nombra la propiedad que ilustra el enunciado. (Consulta el Ejemplo 2).

- Si $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$ y $\overline{ST} \cong \overline{UV}$, entonces $\overline{PQ} \cong \overline{UV}$.
- $\angle F \cong \angle F$
- Si $\angle G \cong \angle H$, entonces $\angle H \cong \angle G$.
- $\overline{DE} \cong \overline{DE}$
- Si $\overline{XY} \cong \overline{UV}$, entonces $\overline{UV} \cong \overline{XY}$.
- Si $\angle L \cong \angle M$ y $\angle M \cong \angle N$, entonces $\angle L \cong \angle N$.

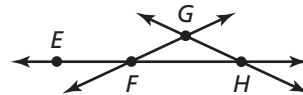
PRUEBA En los Ejercicios 11 y 12, escribe una prueba de dos columnas para la propiedad. (Consulta el Ejemplo 3).

- Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos (Teorema 2.1)
- Propiedad transitiva de la congruencia de ángulos (Teorema 2.2)

PRUEBA En los Ejercicios 13 y 14, escribe una prueba de dos columnas. (Consulta el Ejemplo 4).

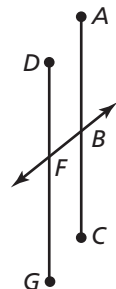
13. Dado $\angle GFH \cong \angle GHF$

Demostrar $\angle EFG$ y $\angle GHF$ son suplementarios.



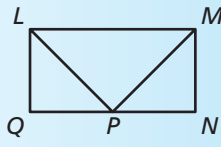
14. Dado $\overline{AB} \cong \overline{FG}$,
 \overline{BF} biseca a \overline{AC} y \overline{DG} .

Demostrar $\overline{BC} \cong \overline{DF}$

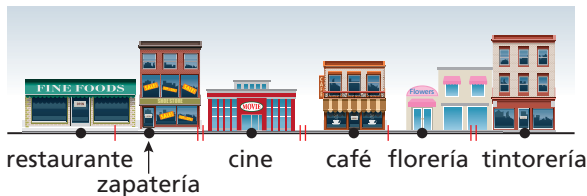


15. **ANÁLISIS DE ERRORES** En el diagrama, $\overline{MN} \cong \overline{LQ}$ y $\overline{LQ} \cong \overline{PN}$. Describe y corrige el error en el razonamiento.

X Debido a que $\overline{MN} \cong \overline{LQ}$ y $\overline{LQ} \cong \overline{PN}$, entonces $\overline{MN} \cong \overline{PN}$ según la Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos (Teorema 2.1).



16. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La distancia entre el restaurante a la zapatería es la misma que la distancia del café a la florería. La distancia de la zapatería al cine es la misma que la distancia del cine al café, y de la florería a la tintorería.



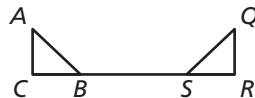
Utiliza los siguientes pasos para demostrar que la distancia de un restaurante al cine es la misma que la distancia de un café a la tintorería.

- Indica qué está dado y qué se debe probar en esta situación.
- Escribe una prueba de dos columnas.

17. **RAZONAR** En la escultura mostrada, $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 2 \cong \angle 3$. Clasifica el triángulo y justifica tu respuesta.

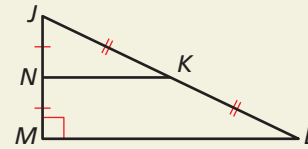


18. **ARGUMENTAR** En la figura, $\overline{SR} \cong \overline{CB}$ y $\overline{AC} \cong \overline{QR}$. Tu amigo afirma que, por esta razón, $\overline{CB} \cong \overline{AC}$ según la Propiedad transitiva de la congruencia de segmentos (Teorema 2.1). ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.



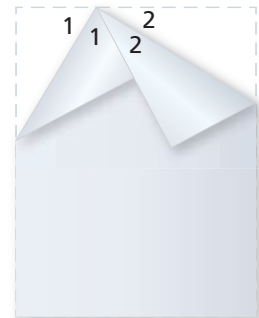
19. **ESCRIBIR** Explica por qué no utilizas el razonamiento inductivo cuando escribes una prueba.

20. **¿CÓMO LO VES?** Utiliza la figura para escribir los enunciados Dado y Probar para cada conclusión.



- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- Un segmento que conecta los puntos medios de dos lados de un triángulo es la mitad del largo del tercer lado.

21. **RAZONAR** Dobra dos esquinas de una hoja de papel de manera que sus bordes coincidan, como se muestra.

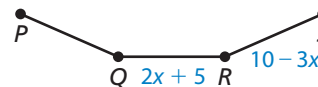


- ¿Qué observas en el ángulo formado en la parte superior de la hoja que doblaste?
- Escribe una prueba de dos columnas que muestre que la medida del ángulo siempre es la misma sin importar cómo hayas hecho los dobleces.

22. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** La distancia de Springfield a Lakewood City es igual a la distancia de Springfield a Bettsville. Janisburg está 50 millas más lejos de Springfield que de Bettsville. Moon Valley está 50 millas más lejos de Springfield que Lakewood City. Utiliza los segmentos de línea para dibujar un diagrama que represente esta situación.

23. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Resuelve para hallar x utilizando la información dada. Justifica cada paso.

Dado $\overline{QR} \cong \overline{PQ}$, $\overline{RS} \cong \overline{PQ}$

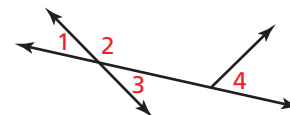


Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Utiliza la figura. (Sección 1.6)

- $\angle 1$ es un complemento de $\angle 4$, y $m\angle 1 = 33^\circ$. Halla $m\angle 4$.
- $\angle 3$ es suplemento de $\angle 2$, y $m\angle 2 = 147^\circ$. Halla $m\angle 3$.
- Nombra un par de ángulos verticales.



2.6 Demostrar relaciones geométricas

Pregunta esencial ¿Cómo puedes utilizar un diagrama de flujo para demostrar un enunciado matemático?

REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS

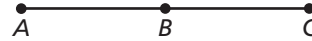
Para dominar las matemáticas, necesitas mapear las relaciones utilizando herramientas tales como diagramas, tablas de doble entrada, gráficas, diagramas de flujo y fórmulas.

EXPLORACIÓN 1 Unir razones en una prueba de diagrama de flujo

Trabaja con un compañero. Une cada razón con el paso correcto del diagrama de flujo.

Dado $AC = AB + BC$

Demostrar $AB = BC$



$AC = AB + BC$

$AB + BC = AC$

$AB + AB = AB + BC$

$AB = BC$

A. Postulado de la suma de segmentos (Post. 1.2)

B. Dado

C. Propiedad transitiva de la igualdad

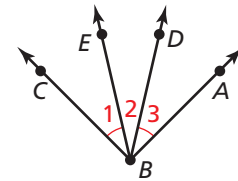
D. Propiedad de igualdad de la resta

EXPLORACIÓN 2 Unir razones en una prueba de diagrama de flujo

Trabaja con un compañero. Une cada razón al paso correcto en el diagrama de flujo.

Dado $m\angle 1 = m\angle 3$

Demostrar $m\angle EBA = m\angle CBD$



$m\angle 1 = m\angle 3$

$m\angle EBA = m\angle 2 + m\angle 3$

$m\angle EBA = m\angle 2 + m\angle 1$

$m\angle EBA = m\angle 1 + m\angle 2$

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle CBD$

$m\angle EBA = m\angle CBD$

A. Postulado de la suma de ángulos (Post. 1.4)

B. Propiedad transitiva de la igualdad

C. Propiedad de igualdad de la sustitución

D. Postulado de la suma de ángulos (Post. 1.4)

E. Dada

F. Propiedad conmutativa de la suma

Comunicar tu respuesta

- ¿Cómo puedes usar un diagrama de flujo para demostrar un enunciado matemático?
- Compara las pruebas del diagrama de flujo antes mencionadas con las pruebas de dos columnas en las Exploraciones de la Sección 2.5. Explica las ventajas y desventajas de cada uno.

2.6 Lección

Vocabulario Esencial

prueba de diagrama de flujo, o prueba de flujo, pág. 106
prueba de párrafo, pág. 108

CONSEJO DE ESTUDIO

Quando demuestres un teorema, escribe la hipótesis del teorema como enunciado **Dado**. La conclusión es lo que debes **Demostrar**.

Qué aprenderás

- ▶ Escribir pruebas de diagrama de flujo que demuestren las relaciones geométricas.
- ▶ Escribir pruebas de párrafo para demostrar relaciones geométricas.

Escribir pruebas de diagrama de flujo

Otro formato de prueba son las **pruebas de diagrama de flujo**, o **pruebas de flujo**, las cuales utilizan casillas y flechas para mostrar el flujo de un argumento lógico. Cada una de las razones está debajo del enunciado que la justifica. Una prueba de diagrama de flujo del *Teorema de la congruencia de los ángulos rectos* se muestra en el Ejemplo 1. Este teorema es útil cuando se escriben pruebas que incluyan ángulos rectos.

Teorema

Teorema 2.3 Teorema de la congruencia de los ángulos rectos

Todos los ángulos rectos son congruentes.

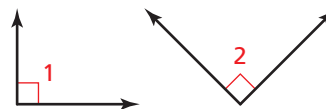
Prueba Ejemplo 1, pág. 106

EJEMPLO 1 Demostrar el Teorema de la congruencia de los ángulos rectos

Utiliza la prueba de diagrama de flujo para escribir una prueba de dos columnas del Teorema de la congruencia de los ángulos rectos.

Dado $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos.

Demostrar $\angle 1 \cong \angle 2$



Prueba de diagrama flujo

$\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos.

Dado

$m\angle 1 = 90^\circ, m\angle 2 = 90^\circ$

Definición de ángulo recto

$m\angle 1 = m\angle 2$

Propiedad transitiva de la igualdad

$\angle 1 \cong \angle 2$

Definición de ángulos congruentes

Prueba de dos columnas

ENUNCIADOS

- $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos.
- $m\angle 1 = 90^\circ, m\angle 2 = 90^\circ$
- $m\angle 1 = m\angle 2$
- $\angle 1 \cong \angle 2$

RAZONES

- Dado
- Definición de ángulo recto
- Propiedad transitiva de la igualdad
- Definición de ángulos congruentes

Monitoreo del progreso

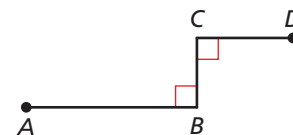


Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

- Copia y completa la prueba de diagrama de flujo. Después escribe una prueba de dos columnas.

Dado $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$

Demostrar $\angle B \cong \angle C$



$\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$

Dado

Definición de \perp líneas

$\angle B \cong \angle C$

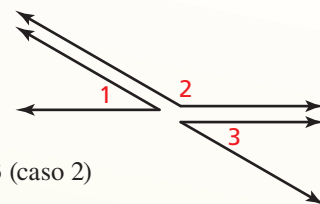
Teoremas

Teorema 2.4 Teorema de suplementos congruentes

Si dos ángulos son suplementarios al mismo ángulo (o a ángulos congruentes), entonces son congruentes.

Si $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios y $\angle 3$ y $\angle 2$ son suplementarios, entonces $\angle 1 \cong \angle 3$.

Prueba Ejemplo 2, pág. 107 (caso 1); Ej. 20, pág. 113 (caso 2)

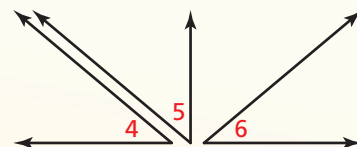


Teorema 2.5 Teorema de los complementos congruentes

Si dos ángulos son complementarios al mismo ángulo (o a ángulos congruentes), entonces son congruentes.

Si $\angle 4$ y $\angle 5$ son complementarios y $\angle 6$ y $\angle 5$ son complementarios, entonces $\angle 4 \cong \angle 6$.

Prueba Ej. 19, pág. 112 (caso 1); Ej. 22, pág. 113 (caso 2)



Para demostrar el Teorema de suplementos congruentes, debes demostrar dos casos: uno con ángulos suplementarios al mismo ángulo y uno con ángulos suplementarios a ángulos congruentes. La prueba del Teorema de complementos congruentes también requiere de dos casos.

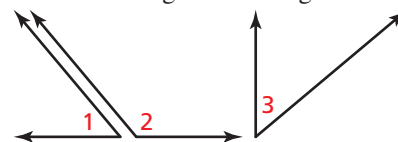
EJEMPLO 2

Demostrar un caso del Teorema de suplementos congruentes

Utiliza la prueba de dos columnas dada para escribir una prueba de diagrama de flujo que demuestre que dos ángulos suplementarios al mismo ángulo son congruentes.

Dado $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.
 $\angle 3$ y $\angle 2$ son suplementarios.

Demostrar $\angle 1 \cong \angle 3$



Prueba de dos columnas

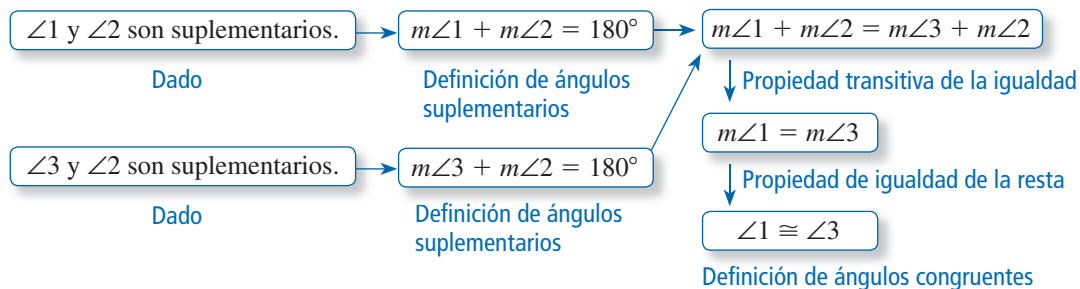
ENUNCIADOS

- $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.
 $\angle 3$ y $\angle 2$ son suplementarios.
- $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$,
 $m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ$
- $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 2$
- $m\angle 1 = m\angle 3$
- $\angle 1 \cong \angle 3$

RAZONES

- Dado
- Definición de los ángulos suplementarios
- Propiedad transitiva de la igualdad
- Propiedad de igualdad de la resta
- Definición de ángulos congruentes

Prueba de diagrama flujo



Escribir pruebas de párrafo

Otro formato de prueba es la **prueba de párrafo**, la cual presenta los enunciados y las razones de una prueba como oraciones en un párrafo. Utiliza palabras para explicar el flujo lógico de un argumento.

Dos rectas que se intersecan forman pares de ángulos verticales y pares lineales. El *Postulado del par lineal* establece formalmente la relación que hay entre los pares lineales. Puedes utilizar este postulado para demostrar el *Teorema de la congruencia de los ángulos verticales*.

Postulado y Teorema

Postulado 2.8 Postulado del par lineal

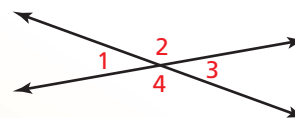
Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios

$\angle 1$ y $\angle 2$ forman un par lineal, entonces $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios y $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$.



Teorema 2.6 Teorema de la congruencia de los ángulos verticales

Los ángulos verticales son congruentes.



$$\angle 1 \cong \angle 3, \angle 2 \cong \angle 4$$

Prueba Ejemplo 3, pág. 108

EJEMPLO 3

Demostrar el Teorema de la congruencia de los ángulos verticales

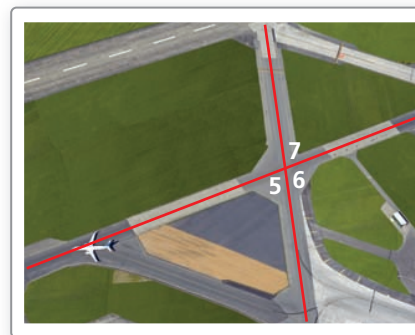
CONSEJO DE ESTUDIO

En las pruebas de párrafo, las *palabras transicionales* tales como *por tanto*, *entonces* y *por ende*, te ayudarán a hacer que tu lógica sea más clara.

Utiliza la prueba del párrafo dado para escribir una prueba de dos columnas del Teorema de la congruencia de los ángulos verticales.

Dado $\angle 5$ y $\angle 7$ son ángulos verticales.

Demostrar $\angle 5 \cong \angle 7$



Prueba de párrafo

$\angle 5$ y $\angle 7$ son ángulos verticales formados por rectas que se intersecan. Como se muestra en el diagrama, $\angle 5$ y $\angle 6$ son un par lineal y $\angle 6$ y $\angle 7$ son un par lineal. Entonces, según el Postulado del par lineal, $\angle 5$ y $\angle 6$ son suplementarios y $\angle 6$ y $\angle 7$ son suplementarios. Por tanto, según el Teorema de los suplementos congruentes, $\angle 5 \cong \angle 7$.

Prueba de dos columnas

ENUNCIADOS

- $\angle 5$ y $\angle 7$ son ángulos verticales.
- $\angle 5$ y $\angle 6$ son un par lineal.
 $\angle 6$ y $\angle 7$ son un par lineal.
- $\angle 5$ y $\angle 6$ son suplementarios.
 $\angle 6$ y $\angle 7$ son suplementarios.
- $\angle 5 \cong \angle 7$

RAZONES

- Dada
- Definición del par lineal, como se muestra en el diagrama
- Postulado del par lineal
- Teorema de los suplementos congruentes

JUSTIFICAR LOS PASOS

En tu prueba puedes utilizar la información rotulada en un diagrama.

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

2. Copia y completa la prueba de dos columnas. Después escribe una prueba de diagrama de flujo.

Dado $AB = DE, BC = CD$

Demostrar $\overline{AC} \cong \overline{CE}$



ENUNCIADOS	RAZONES
1. $AB = DE, BC = CD$	1. Dada
2. $AB + BC = BC + DE$	2. Propiedad de igualdad de la suma
3. _____	3. Propiedad de igualdad de la sustitución
4. $AB + BC = AC, CD + DE = CE$	4. _____
5. _____	5. Propiedad de igualdad de la sustitución
6. $\overline{AC} \cong \overline{CE}$	6. _____

3. Reescribe la prueba de dos columnas en el Ejemplo 3 sin utilizar el Teorema de los suplementos congruentes. ¿Cuántos pasos te ahorras utilizando el teorema?

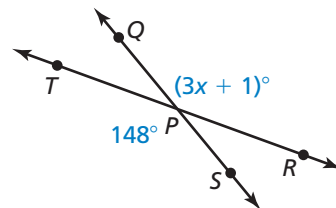
EJEMPLO 4

Utilizar relaciones de ángulos

Halla el valor de x .

SOLUCIÓN

$\angle TPS$ y $\angle QPR$ son ángulos verticales. Según el Teorema de la congruencia de ángulos verticales, los ángulos son congruentes. Utiliza esta información para escribir y resolver una ecuación.



$$m\angle TPS = m\angle QPR$$

Definición de ángulos congruentes

$$148^\circ = (3x + 1)^\circ$$

Sustituye las medidas de los ángulos.

$$147 = 3x$$

Resta 1 de cada lado.

$$49 = x$$

Divide cada lado entre 3.

► Por tanto, el valor de x es 49.

Monitoreo del progreso



Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

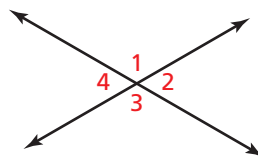
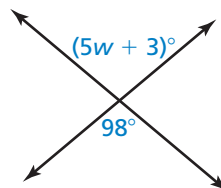
Utiliza el diagrama y la medida de ángulos dada para hallar las medidas de los otros tres ángulos.

4. $m\angle 1 = 117^\circ$

5. $m\angle 2 = 59^\circ$

6. $m\angle 4 = 88^\circ$

7. Halla el valor de w .



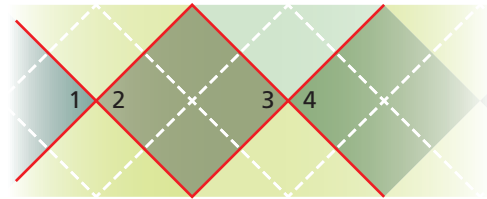
EJEMPLO 5

Utilizar el Teorema de la congruencia de los ángulos verticales

Escribe una prueba de párrafo.

Dado $\angle 1 \cong \angle 4$

Demostrar $\angle 2 \cong \angle 3$



Prueba de párrafo

$\angle 1$ y $\angle 4$ son congruentes. Según el Teorema de la congruencia de ángulos verticales, $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$. En virtud de la Propiedad transitiva de la congruencia de ángulos (Teorema 2.2), $\angle 2 \cong \angle 4$. Utilizando la Propiedad transitiva de la congruencia de ángulos (Teorema 2.2) una vez más, $\angle 2 \cong \angle 3$.

Monitoreo del progreso

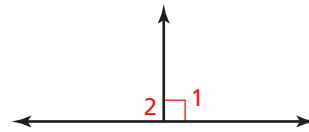


Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

8. Escribe una prueba de párrafo.

Dado $\angle 1$ es un ángulo recto.

Demonstar $\angle 2$ es un ángulo recto.



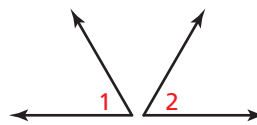
Resumen de conceptos

Tipos de pruebas

Propiedad simétrica de la congruencia de ángulos (Teorema 2.2)

Dado $\angle 1 \cong \angle 2$

Demostrar $\angle 2 \cong \angle 1$



Prueba de dos columnas

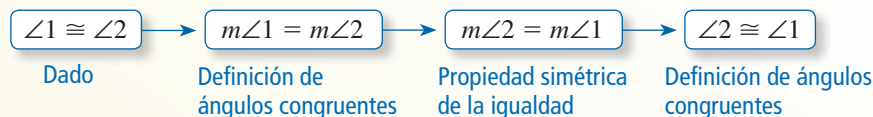
ENUNCIADOS

1. $\angle 1 \cong \angle 2$
2. $m\angle 1 = m\angle 2$
3. $m\angle 2 = m\angle 1$
4. $\angle 2 \cong \angle 1$

RAZONES

1. Dada
2. Definición de ángulos congruentes
3. Propiedad simétrica de la igualdad
4. Definición de los ángulos congruentes

Prueba de diagrama de flujo



Prueba de párrafo

$\angle 1$ es congruente con $\angle 2$. Según la definición de los ángulos congruentes, la medida de $\angle 1$ es igual a la medida de $\angle 2$. La medida de $\angle 2$ es igual a la medida de $\angle 1$ según la Propiedad simétrica de la igualdad. Entonces, según la definición de los ángulos congruentes, $\angle 2$ es congruente con $\angle 1$.

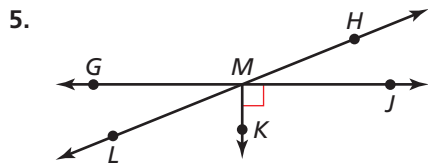
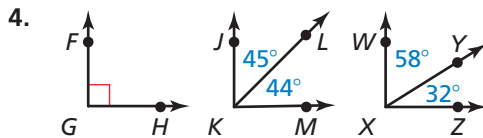
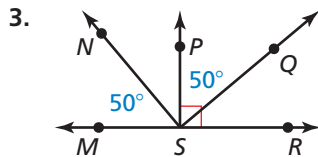
2.6 Ejercicios

Verificación de vocabulario y concepto esencial

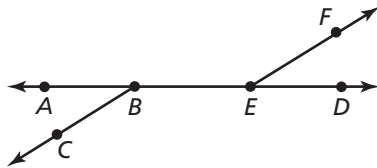
- ESCRIBIR** Explica por qué todos los ángulos rectos son congruentes
- VOCABULARIO** ¿Cuáles son los dos tipos de ángulos que se forman mediante rectas que se intersectan?

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, identifica el(los) par(es) de ángulos congruentes en las figuras. Explica cómo sabes que son congruentes. (Consulta los Ejemplos 1, 2, y 3).

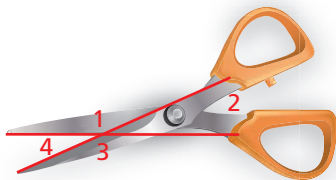


6. $\angle ABC$ es suplementario a $\angle CBD$.
 $\angle CBD$ es suplementario a $\angle DEF$.

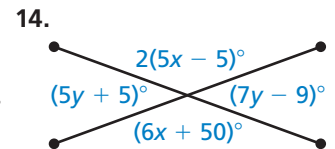
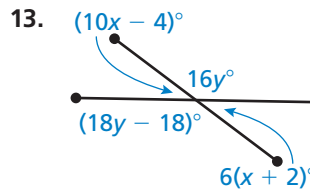
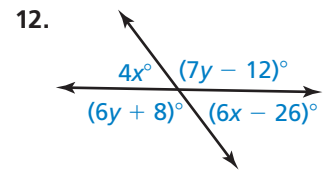
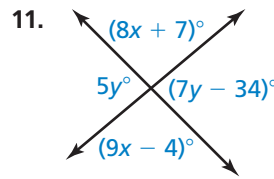


En los Ejercicios 7–10, utiliza el diagrama y la medida del ángulo dada para hallar las otras tres medidas. (Consulta el Ejemplo 3).

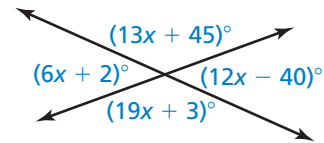
- $m\angle 1 = 143^\circ$
- $m\angle 3 = 159^\circ$
- $m\angle 2 = 34^\circ$
- $m\angle 4 = 29^\circ$



En los Ejercicios 11–14, halla los valores de x y y . (Consulta el Ejemplo 4).



ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 15 y 16, describe y corrige el error al usar el diagrama para hallar el valor de x .



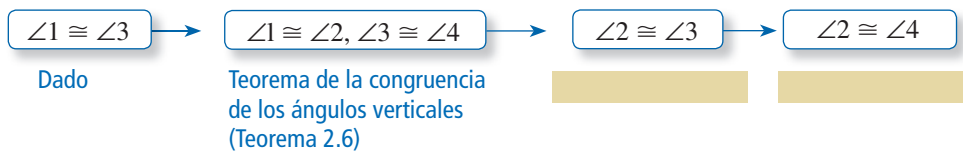
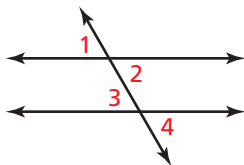
15. $(13x + 45)^\circ + (19x + 3)^\circ = 180^\circ$
 $32x + 48 = 180$
 $32x = 132$
 $x = 4.125$

16. $(13x + 45)^\circ + (12x - 40)^\circ = 90^\circ$
 $25x + 5 = 90$
 $25x = 85$
 $x = 3.4$

17. **PRUEBA** Copia y completa la prueba del diagrama de flujo. Después escribe una prueba de dos columnas. (Consulta el Ejemplo 1).

Dado $\angle 1 \cong \angle 3$

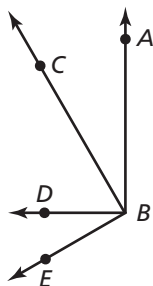
Mostrar $\angle 2 \cong \angle 4$



18. **PRUEBA** Copia y completa la prueba de dos columnas. Después escribe una prueba de diagrama de flujo. (Consulta el Ejemplo 2).

Dado $\angle ABD$ es un ángulo recto.
 $\angle CBE$ es un ángulo recto.

Mostrar $\angle ABC \cong \angle DBE$

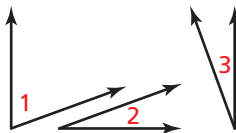


ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\angle ABD$ es un ángulo recto. $\angle CBE$ es un ángulo recto.	1. _____
2. $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son complementarios.	2. Definición de ángulos complementarios
3. $\angle DBE$ y $\angle CBD$ son complementarios.	3. _____
4. $\angle ABC \cong \angle DBE$	4. _____

19. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Copia y completa la prueba de párrafo para el Teorema de complementos congruentes (Teorema 2.5). Después escribe una prueba de dos columnas. (Consulta el Ejemplo 3).

Dado $\angle 1$ and $\angle 2$ son complementarios.
 $\angle 1$ and $\angle 3$ son complementarios.

Mostrar $\angle 2 \cong \angle 3$



$\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios, y $\angle 1$ y $\angle 3$ son complementarios. Según la definición de los ángulos _____, $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$ y _____ = 90° . Por la _____, $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 3$. Según la Propiedad de igualdad de la resta, _____. Por tanto, $\angle 2 \cong \angle 3$ en virtud de la definición de _____.

20. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Copia y completa la prueba de dos columnas para el Teorema de los congruentes suplementarios (Teorema 2.4). Después escribe una prueba de párrafo. (*Consulta el Ejemplo 5*).

Dado $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.
 $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios.
 $\angle 1 \cong \angle 4$



Demostrar $\angle 2 \cong \angle 3$

ENUNCIADOs

RAZONES

1. $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.
 $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios.
 $\angle 1 \cong \angle 4$

1. Dada

2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$,
 $m\angle 3 + m\angle 4 = 180^\circ$

2. _____

3. _____ = $m\angle 3 + m\angle 4$

3. Propiedad transitiva de la igualdad

4. $m\angle 1 = m\angle 4$

4. Definición de ángulos congruentes

5. $m\angle 1 + m\angle 2 =$ _____

5. Propiedad de la igualdad de la sustitución

6. $m\angle 2 = m\angle 3$

6. _____

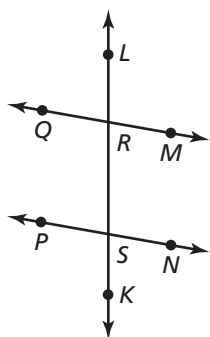
7. _____

7. _____

PRUEBA En los Ejercicios 21–24, escribe una prueba utilizando cualquier formato.

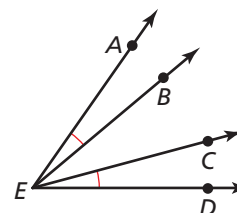
21. **Dado** $\angle QRS$ y $\angle PSR$ son suplementarios.

Demostrar $\angle QRL \cong \angle PSR$



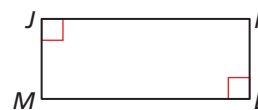
23. **Dado** $\angle AEB \cong \angle DEC$

Demostrar $\angle AEC \cong \angle DEB$



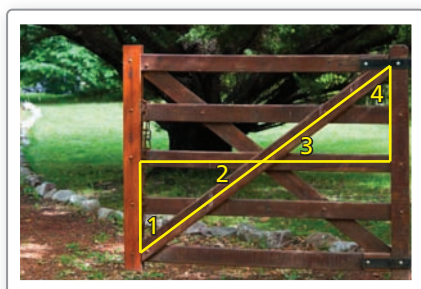
24. **Dado** $\overline{JK} \perp \overline{JM}$, $\overline{KL} \perp \overline{ML}$,
 $\angle J \cong \angle M$, $\angle K \cong \angle L$

Demostrar $\overline{JM} \perp \overline{ML}$ y $\overline{JK} \perp \overline{KL}$

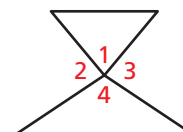


22. **Dado** $\angle 1$ y $\angle 3$ son complementarios.
 $\angle 2$ y $\angle 4$ son complementarios.

Demostrar $\angle 1 \cong \angle 4$



25. **ARGUMENTAR** Escuchas por casualidad a un amigo discutiendo con un compañero de clase sobre el diagrama que se muestra. Tu compañero de clase afirma que $\angle 1 \cong \angle 4$ debido a que son ángulos verticales. Tu amigo dice que no son congruentes porque es algo que él puede saber tan sólo viendo el diagrama. ¿Quién tiene razón? Apoya tu respuesta con definiciones o teoremas.

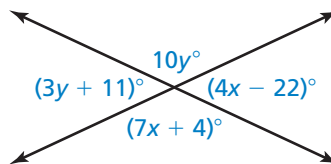


26. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Traza tres rectas que se intersequen en el mismo punto. Explica cómo puedes dar dos de las medidas de los ángulos, de manera que puedas hallar las medidas de los cuatro ángulos restantes.

27. PENSAMIENTO CRÍTICO ¿El recíproco del Postulado del par lineal (Postulado 2.8) es verdadero? Si es así, escribe un enunciado bicondicional. Explica tu razonamiento.

28. ESCRIBIR ¿Cómo puedes ahorrar tiempo al escribir pruebas?

29. CONEXIONES MATEMÁTICAS Halla la medida de cada ángulo en el diagrama.



30. ¿CÓMO LO VES? Utiliza la prueba de dos columnas del estudiante.

Dado $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.

Mostrar _____

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\angle 1 \cong \angle 2$ $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.	1. Dada
2. $m\angle 1 = m\angle 2$	2. Definición de ángulos congruentes
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$	3. Definición de ángulos suplementarios
4. $m\angle 1 + m\angle 1 = 180^\circ$	4. Propiedad de sustitución de la igualdad
5. $2m\angle 1 = 180^\circ$	5. Simplificar.
6. $m\angle 1 = 90^\circ$	6. Propiedad de igualdad de la división
7. $m\angle 2 = 90^\circ$	7. Propiedad transitiva de la igualdad
8. _____	8. _____

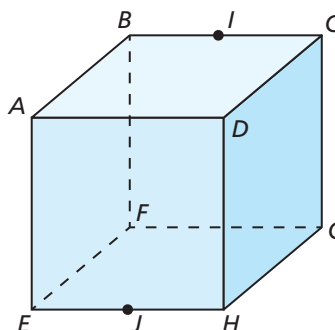
a. ¿Qué está tratando de demostrar el estudiante?

b. Tu amigo afirma que la última línea de la prueba debe ser $\angle 1 \cong \angle 2$, debido a que las medidas de los ángulos son ambas de 90° . ¿Tu amigo tiene razón? Explica.

Mantener el dominio de las matemáticas Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Utiliza el cubo. (Sección 1.1)

- Nombra tres puntos colineales.
- Nombra la intersección del plano ABF y el plano EHG .
- Nombra dos planos que contengan \overline{BC} .
- Nombra tres planos que contengan el punto D .
- Nombra tres puntos que no sean colineales.
- Nombra dos planos que contengan el punto J .



2.4–2.6 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

prueba, *pág. 100*

prueba de dos columnas, *pág. 100*

teorema, *pág. 101*

prueba de diagrama de flujo, o prueba de flujo,
pág. 106

prueba de párrafo, *pág. 108*

Conceptos Esenciales

Sección 2.4

Propiedades algebraicas de la igualdad, *pág. 92*

Propiedad distributiva, *pág. 93*

Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la
igualdad, *pág. 94*

Sección 2.5

Escribir pruebas de dos columnas, *pág. 100*

Teorema 2.1 Teorema de las propiedades de la congruencia de segmentos, *pág. 101*

Teorema 2.2 Teorema de las propiedades de la congruencia de ángulos, *pág. 101*

Sección 2.6

Escribir pruebas de diagrama de flujo, *pág. 106*

Teorema 2.3 Teorema de la congruencia de los
ángulos rectos, *pág. 106*

Teorema 2.4 Teorema de suplementos congruentes,
pág. 107

Teorema 2.5 Teorema de los complementos congruentes,
pág. 107

Escribir pruebas de párrafo, *pág. 108*

Postulado 2.8 Postulado del par lineal, *pág. 108*

Teorema 2.6 Teorema de la congruencia de los
ángulos verticales, *pág. 108*

Prácticas matemáticas

1. Explica la finalidad de justificar cada paso en los Ejercicios 5–14 de la página 96.
2. Crea un diagrama para representar cada enunciado en los Ejercicios 5–10 en la página 103.
3. Explica por qué no podrías demostrar el enunciado del Ejercicio 21 de la página 113, si no se te ofrece la información dada o no puedes utilizar ningún postulado o teorema.

Tarea de desempeño

Inducción y la siguiente dimensión

Antes de cursar Geometría, podías encontrar el punto medio de un segmento en una línea numérica (un sistema unidimensional). En el Capítulo 1, aprendiste a hallar el punto medio de un segmento en un plano coordenado (un sistema bidimensional). ¿Cómo hallarías el punto medio de un segmento en un sistema tridimensional?

Para explorar las respuestas a esta pregunta y más, ve a BigIdeasMath.com.



2.1 Enunciados condicionales (págs. 65–74)

Escribe la forma si-entonces, el recíproco, el inverso, el contrarrecíproco y el bicondicional del enunciado condicional “Un año bisiesto es un año con 366 días”.

Forma si-entonces: Si es año bisiesto, entonces es un año con 366 días.

Recíproco: Si es un año con 366 días, entonces es un año bisiesto.

Inverso: Si no es un año bisiesto, entonces no es un año con 366 días.

Contrarrecíproco: Si no es un año con 366 días, entonces no es un año bisiesto.

Bicondicional: Es un año bisiesto si y sólo si es un año con 366 días.

Escribe la forma si...entonces, el recíproco, el inverso, el contrarrecíproco y el bicondicional del enunciado condicional.

1. Dos rectas se intersecan en un punto.
2. $4x + 9 = 21$ porque $x = 3$.
3. Los ángulos suplementarios suman 180° .
4. Los ángulos rectos miden 90° .

2.2 Razonamiento inductivo y deductivo (págs. 75–82)

¿Qué conclusión puedes sacar acerca de la suma de dos enteros pares cualesquiera?

Paso 1 Busca un patrón en varios ejemplos. Utiliza el razonamiento inductivo para hacer una conjetura.

$$2 + 4 = 6$$

$$6 + 10 = 16$$

$$12 + 16 = 28$$

$$-2 + 4 = 2$$

$$6 + (-10) = -4$$

$$-12 + (-16) = -28$$

Conjetura Entero par + Entero par = Entero par

Paso 2 Sean n y m cualquier entero. Utiliza el razonamiento deductivo para mostrar que la conjetura es verdadera.

$2n$ y $2m$ son pares enteros porque cualquier entero multiplicado por 2 es par.

$2n + 2m$ representa la suma de dos enteros pares.

$2n + 2m = 2(n + m)$ según la Propiedad distributiva.

$2(n + m)$ es el producto de 2 y un entero ($n + m$).

Entonces, $2(n + m)$ es un entero par.

► La suma de dos enteros pares cualesquiera es un entero par.

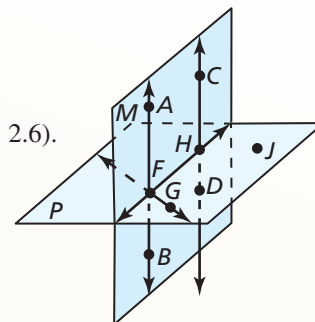
5. ¿Qué conclusión puedes sacar sobre la diferencia de dos enteros impares cualesquiera?
6. ¿Qué conclusión puedes sacar acerca del producto de un entero par y uno impar?
7. Utiliza la ley de separación para sacar una conclusión válida. Si un ángulo es un ángulo recto, entonces el ángulo mide 90° . $\angle B$ es un ángulo recto.
8. Utiliza la ley del silogismo para escribir un nuevo enunciado condicional que se desprenda del par de enunciados verdaderos: Si $x = 3$, entonces $2x = 6$. Si $4x = 12$, entonces $x = 3$.

2.3 Postulados y diagramas (págs. 83–88)

Utiliza el diagrama para hacer tres enunciados que puedan concluirse y tres enunciados que *no* puedan concluirse. Justifica tus respuestas.

Puedes concluir:

1. Los puntos A , B , y C son coplanares porque están en el plano M .
2. \overrightarrow{FG} pertenece al plano P según el Postulado plano-recta (Postulado 2.6).
3. \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{FH} se intersecan en el punto H según el Postulado intersección de la recta (Postulado 2.3).



No puedes concluir:

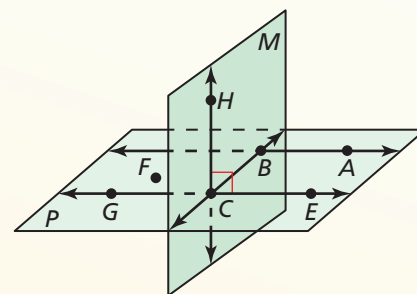
1. $\overrightarrow{CD} \perp$ al plano P porque no está marcado ningún ángulo recto.
2. Los puntos A , F , y G son coplanares porque el punto A pertenece al plano M y el punto G pertenece al plano P .
3. Los puntos G , D , y J son colineales porque ninguna línea trazada conecta los puntos.

Utiliza el diagrama de la derecha para determinar si puedes presuponer el enunciado.

9. Los puntos A , B , C , y E son coplanares.
10. $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{GE}$
11. Los puntos F , B , y G son coplanares.
12. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GE}$

Dibuja un diagrama de la descripción.

13. $\angle ABC$, un ángulo agudo, está bisecado por \overrightarrow{BE} .
14. $\angle CDE$, un ángulo recto, está bisecado por \overrightarrow{DK} .
15. El plano P y el plano R se intersecan perpendicularmente en \overline{XY} . \overline{ZW} pertenece al plano P .



2.4 Razonamiento algebraico (págs. 91–98)

Resuelve $2(2x + 9) = -10$. Justifica cada paso.

Ecuación	Explicación	Razón
$2(2x + 9) = -10$	Escribe la ecuación.	Dado
$4x + 18 = -10$	Multiplícala.	Propiedad distributiva
$4x = -28$	Resta 18 de cada lado.	Propiedad de igualdad de la resta
$x = -7$	Divide cada lado entre 4.	Propiedad de igualdad de la división

► La solución es $x = -7$.

Resuelve la ecuación. Justifica cada paso.

16. $-9x - 21 = -20x - 87$
17. $15x + 22 = 7x + 62$
18. $3(2x + 9) = 30$
19. $5x + 2(2x - 23) = -154$

Nombra la propiedad de igualdad que ilustra el enunciado.

20. Si $LM = RS$ y $RS = 25$, entonces $LM = 25$.
21. $AM = AM$

2.5 Demostrar enunciados sobre segmentos y ángulos (págs. 99–104)

Escribe una prueba de dos columnas para la Propiedad transitiva de la congruencia de segmentos (Teorema 2.1).

Dado $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{CD} \cong \overline{EF}$

Demostrar $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{CD} \cong \overline{EF}$	1. Dada
2. $AB = CD, CD = EF$	2. Definición de segmentos congruentes
3. $AB = EF$	3. Propiedad transitiva de igualdad
4. $\overline{AB} \cong \overline{EF}$	4. Definición de segmentos congruentes

Nombra la propiedad que ilustra el enunciado.

22. Si $\angle DEF \cong \angle JKL$, entonces $\angle JKL \cong \angle DEF$.

23. $\angle C \cong \angle C$

24. Si $MN = PQ$ and $PQ = RS$, entonces $MN = RS$.

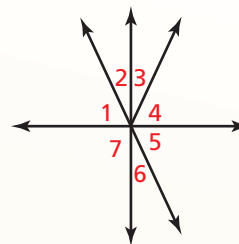
25. Escribe una prueba de dos columnas para la Propiedad reflexiva de la congruencia de ángulos (Teorema 2.2).

2.6 Demostrar relaciones geométricas (págs. 105–114)

En una prueba de párrafo reescribe la prueba de dos columnas.

Dado $\angle 2 \cong \angle 3$

Demostrar $\angle 3 \cong \angle 6$



Prueba de dos columnas

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\angle 2 \cong \angle 3$	1. Dada
2. $\angle 2 \cong \angle 6$	2. Teorema de la congruencia de ángulos verticales (Teorema 2.6)
3. $\angle 3 \cong \angle 6$	3. Propiedad transitiva de la congruencia de ángulos (Teorema 2.2)

Prueba de párrafo

$\angle 2$ y $\angle 3$ son congruentes. Según el Teorema de la congruencia de ángulos verticales (Teorema 2.6), $\angle 2 \cong \angle 6$. Por tanto, según la propiedad transitiva de la congruencia de ángulos (Teorema 2.2), $\angle 3 \cong \angle 6$.

26. Escribe una prueba utilizando cualquier formato.

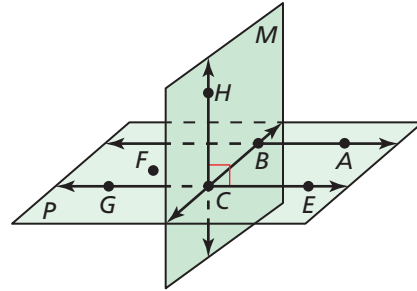
Dado $\angle 3$ y $\angle 2$ son complementarios.
 $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$

Demostrar $\angle 3 \cong \angle 1$

2 Prueba del capítulo

Utiliza el diagrama para determinar si puedes presuponer el enunciado. Explica tu razonamiento.

- $\vec{AB} \perp$ al plano M
- Los puntos F , G , y A son coplanares.
- Los puntos E , C , y G son colineales.
- Los planos M y P se intersectan en \vec{BC} .
- \vec{FA} pertenece al plano P .
- \vec{FG} interseca a \vec{AB} en el punto B .



Resuelve la ecuación. Justifica cada paso.

- $9x + 31 = -23 + 3x$
- $26 + 2(3x + 11) = -18$
- $3(7x - 9) - 19x = -15$

Escribe la forma si...entonces, el recíproco, el inverso, el contrarrecíproco y el bicondicional del enunciado condicional.

- Dos planos se intersectan en una recta.
- Una relación que empareja cada entrada con exactamente una salida es una función.

Utiliza el razonamiento inductivo para hacer una conjetura acerca de la cantidad dada. Después utiliza el razonamiento deductivo para demostrar que la conjetura es verdadera.

- la suma de los tres enteros impares
- el producto de tres enteros pares
- Da un ejemplo de dos enunciados en los cuales no aplique la ley de separación.
- La fórmula para el área A de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$, donde b es la base y h es la altura. Resuelve la fórmula para hallar h y justifica cada paso. Después halla la altura de un signo para ceder el paso cuya área es de 558 pulgadas cuadradas y cada lado mide 36 pulgadas.



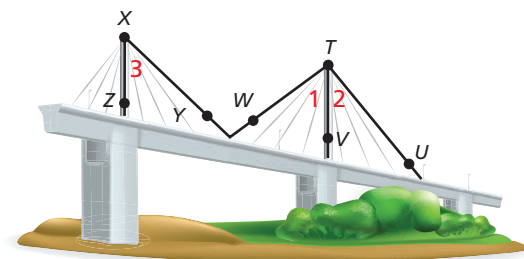
- Visitas el zoológico y observas lo siguiente:
 - Los elefantes, jirafas, leones, tigres y cebras se encuentran a lo largo de un pasillo recto.
 - Las jirafas están a la mitad del camino entre los elefantes y los leones.
 - Los tigres están a la mitad del camino entre los leones y las cebras.
 - Los leones están a la mitad del camino entre las jirafas y los tigres.

Traza y rotula un diagrama que represente la información. Después demuestra que la distancia entre los elefantes y las jirafas es igual a la distancia entre los tigres y las cebras. Utiliza cualquier formato de prueba.

- Escribe una prueba utilizando cualquier formato.

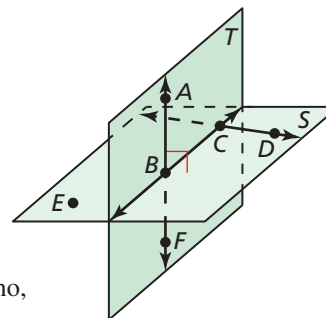
Dado $\angle 2 \cong \angle 3$
 \vec{TV} biseca a $\angle UTW$.

Demonstrar $\angle 1 \cong \angle 3$



2 Evaluación acumulativa

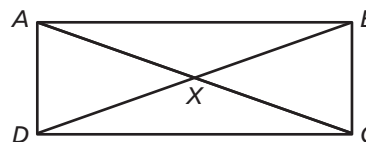
- Utiliza el diagrama para escribir un ejemplo de cada postulado
 - Postulado de los dos puntos (Postulado 2.1)** A través de dos puntos cualesquiera, existe exactamente una recta.
 - Postulado de intersección de la recta (Postulado 2.3)** Si dos rectas se intersecan, entonces su intersección es exactamente un punto.
 - Postulado de los tres puntos (Postulado 2.4)** A través de tres puntos no colineales cualesquiera, existe exactamente un plano.
 - Postulado plano-recta (Postulado 2.6)** Si dos puntos pertenecen a un plano, entonces la recta que los contiene pertenece a ese plano.
 - Postulado de la intersección del plano (Postulado 2.7)** Si dos planos se intersecan, entonces su intersección es una recta.



- Anota las razones en las posiciones correctas para completar la prueba de dos columnas.

Dado $\overline{AX} \cong \overline{DX}, \overline{XB} \cong \overline{XC}$
 Demostrar $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\overline{AX} \cong \overline{DX}$	1. Dada
2. $AX = DX$	2. _____
3. $\overline{XB} \cong \overline{XC}$	3. Dada
4. $XB = XC$	4. _____
5. $AX + XC = AC$	5. _____
6. $DX + XB = DB$	6. _____
7. $AC = DX + XB$	7. _____
8. $AC = BD$	8. _____
9. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	9. _____

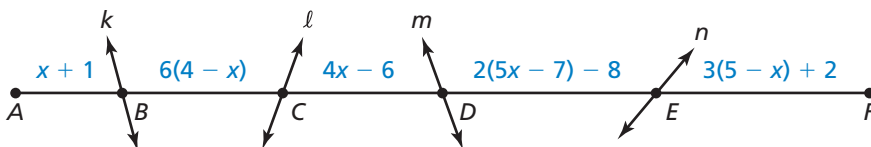


Postulado de la suma de segmentos (Postulado 1.2)

Definición de segmentos congruentes

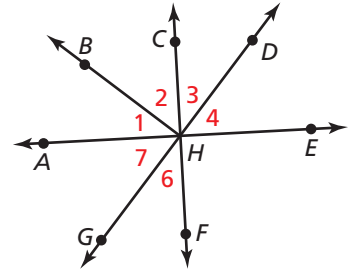
Propiedad de igualdad de la sustitución

- Clasifica cada enunciado condicional relacionado, con base en el enunciado condicional "Si estudio, entonces aprobaré el examen final".
 - Aprobaré el examen final si y sólo si estudio.
 - Si no estudio, entonces no aprobaré el examen final.
 - Si apruebo el examen final, entonces estudié.
 - Si no apruebo el examen final, entonces no estudié.
- Haz una lista de las bisectrices de segmento, dado que $x = 3$.



5. Sabes que $m\angle FHE = m\angle BHG = m\angle AHF = 90^\circ$. Elige el símbolo que haga que cada enunciado sea verdadero. Menciona el teorema o postulado, si es que los hay, que apoya tu respuesta.

- a. $\angle 3 \underline{\hspace{1cm}} \angle 6$ b. $m\angle 4 \underline{\hspace{1cm}} m\angle 7$
 c. $m\angle FHE \underline{\hspace{1cm}} m\angle AHG$ d. $m\angle AHG + m\angle GHE \underline{\hspace{1cm}} 180^\circ$



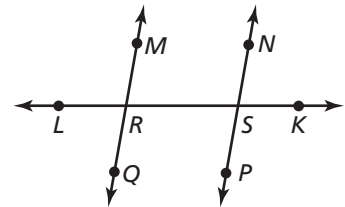
6. Halla la distancia entre cada par de puntos. Después ordena cada segmento de línea de mayor a menor.

- a. $A(-6, 1), B(-1, 6)$ b. $C(-5, 8), D(5, 8)$
 c. $E(2, 7), F(4, -2)$ d. $G(7, 3), H(7, -1)$
 e. $J(-4, -2), K(1, -5)$ f. $L(3, -8), M(7, -5)$

7. La prueba muestra que $\angle MRL$ es congruente con $\angle NSR$. Selecciona todos los demás ángulos que también sean congruentes con $\angle NSR$.

Dado $\angle MRS$ y $\angle NSR$ son suplementarios.

Demostrar $\angle MRL \cong \angle NSR$



ENUNCIADOS

- $\angle MRS$ y $\angle NSR$ son suplementarios.
- $\angle MRL$ y $\angle MRS$ son un par lineal.
- $\angle MRL$ y $\angle MRS$ son suplementarios.
- $\angle MRL \cong \angle NSR$

RAZONES

- Dada
- Definición de par lineal, como se muestra en el diagrama
- Postulado de par lineal (Postulado 2.8)
- Teorema de los suplementos congruentes (Teorema 2.4)

$\angle PSK$

$\angle KSN$

$\angle PSR$

$\angle QRS$

$\angle QRL$

8. Tu maestro asigna a tu clase un problema de tarea que te pide probar el Teorema de la congruencia de ángulos verticales (Teorema 2.6) utilizando la fotografía y la información dada a la derecha. Tu amigo afirma que esto se puede probar sin utilizar el Postulado del par lineal (Postulado 2.8). ¿Tiene razón tu amigo? Explica tu razonamiento.

Dado $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales.

Demostrar $\angle 1 \cong \angle 3$

