

5 Triángulos congruentes

- 5.1 Ángulos de triángulos
- 5.2 Polígonos congruentes
- 5.3 Demostrar congruencia de triángulos con LAL
- 5.4 Triángulos isósceles y equiláteros
- 5.5 Demostrar congruencia de triángulos con LLL
- 5.6 Demostrar congruencia de triángulos con ALA y AAL
- 5.7 Utilizar triángulos congruentes
- 5.8 Pruebas de coordenadas



Parapente (pág. 278)



Torre de salvavidas (pág. 255)



Granero (pág. 248)



Decoración del hogar (pág. 241)



Pintura (pág. 235)

Mantener el dominio de las matemáticas

Usar las fórmulas de punto medio y de distancia

Ejemplo 1 Los extremos de \overline{AB} son $A(-2, 3)$ y $B(4, 7)$. Halla las coordenadas del punto medio M .

Utiliza la fórmula del punto medio.

$$\begin{aligned}M\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) &= M\left(\frac{2}{2}, \frac{10}{2}\right) \\ &= M(1, 5)\end{aligned}$$

► Las coordenadas del punto medio M son $(1, 5)$.

Ejemplo 2 Halla la distancia entre $C(0, -5)$ y $D(3, 2)$.

$$\begin{aligned}CD &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{Fórmula de distancia} \\ &= \sqrt{(3 - 0)^2 + [2 - (-5)]^2} && \text{Sustituye.} \\ &= \sqrt{3^2 + 7^2} && \text{Resta.} \\ &= \sqrt{9 + 49} && \text{Evalúa las potencias.} \\ &= \sqrt{58} && \text{Suma.} \\ &\approx 7.6 && \text{Usa una calculadora.}\end{aligned}$$

► La distancia entre $C(0, -5)$ y $D(3, 2)$ es de aproximadamente 7.6.

Halla las coordenadas del punto medio M del segmento con los extremos dados. Después halla la distancia entre los dos puntos.

1. $P(-4, 1)$ y $Q(0, 7)$

2. $G(3, 6)$ y $H(9, -2)$

3. $U(-1, -2)$ y $V(8, 0)$

Resolver ecuaciones con variables en ambos lados

Ejemplo 3 Resuelve $2 - 5x = -3x$.

$$\begin{aligned}2 - 5x &= -3x && \text{Escribe la ecuación.} \\ \underline{+5x} \quad \underline{+5x} &&& \text{Suma } 5x \text{ a cada lado.} \\ 2 &= 2x && \text{Simplifica.} \\ \frac{2}{2} &= \frac{2x}{2} && \text{Divide cada lado entre 2.} \\ 1 &= x && \text{Simplifica.}\end{aligned}$$

► La solución es $x = 1$.

Resuelve la ecuación.

4. $7x + 12 = 3x$

5. $14 - 6t = t$

6. $5p + 10 = 8p + 1$

7. $w + 13 = 11w - 7$

8. $4x + 1 = 3 - 2x$

9. $z - 2 = 4 + 9z$

10. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** ¿Es posible hallar la longitud de un segmento en un plano de coordenadas sin utilizar la fórmula de distancia? Explica tu razonamiento.

Definiciones, postulados y teoremas

Concepto Esencial

Definiciones y enunciados bicondicionales

Una definición, siempre será un enunciado “si y sólo si”. A continuación hay un ejemplo.

Definición: Dos figuras geométricas son *figuras congruentes* si y sólo si hay un movimiento rígido o una composición de movimientos rígidos que mapea una de las figuras en la otra.

Debido a que ésta es una definición, es un enunciado bicondicional. Implica los siguientes dos enunciados condicionales.

1. Si dos figuras geométricas son congruentes, entonces hay un movimiento rígido o una composición de movimientos rígidos que mapea una de las figuras en la otra.
2. Si existe un movimiento rígido o una composición de movimientos rígidos que mapea una figura geométrica en la otra, entonces las dos figuras geométricas son figuras congruentes.

Las definiciones, los postulados y los teoremas son las piezas fundamentales de la geometría. En las pruebas de dos columnas, los enunciados en la columna *razón* son casi siempre definiciones, postulados o teoremas.

EJEMPLO 1 Identificar definiciones, postulados y teoremas

Clasifica cada enunciado como una definición, un postulado o un teorema.

- a. Si dos líneas son cortadas por una transversal de manera que los ángulos interiores alternos son congruentes, entonces las líneas son paralelas.
- b. Si dos líneas coplanares no tienen punto de intersección, entonces son paralelas.
- c. Si hay una línea y un punto que no está en la línea, entonces hay exactamente una línea que atraviesa el punto paralela a la línea dada.

SOLUCIÓN

- a. Este es un teorema. El Teorema recíproco de los ángulos alternos internos (Teorema 3.6) estudiado en la Sección 3.3.
- b. Esta es la definición de las líneas paralelas.
- c. Este es un postulado. El postulado del paralelismo (Postulado 3.1) estudiado en la Sección 3.1. En la geometría Euclidiana su veracidad se asume, no se demuestra.

Monitoreo del progreso

Clasifica cada enunciado como una definición, un postulado o un teorema. Explica tu razonamiento.

1. En un plano de coordenadas, dos líneas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1 .
2. Si dos líneas se intersecan para formar un par lineal de ángulos congruentes, entonces las líneas son perpendiculares.
3. Si dos líneas se intersecan para formar un ángulo recto, entonces las líneas son perpendiculares.
4. A través de dos puntos cualesquiera, existe una línea.

5.1 Ángulos de triángulos

Pregunta esencial ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos de un triángulo?

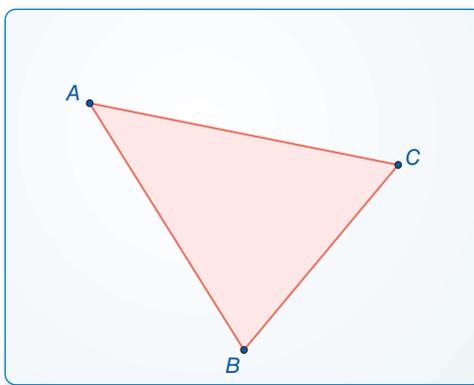
EXPLORACIÓN 1 Escribir una conjetura

Trabaja con un compañero.

- Utiliza un software de geometría dinámica para dibujar cualquier triángulo y rotularlo como $\triangle ABC$.
- Halla las medidas de los ángulos interiores del triángulo.
- Halla la suma de las medidas de los ángulos interiores.
- Repite las partes (a) a (c) con varios triángulos. Después haz una conjetura acerca de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo.

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas necesitas razonar inductivamente los datos y hacer conjeturas.



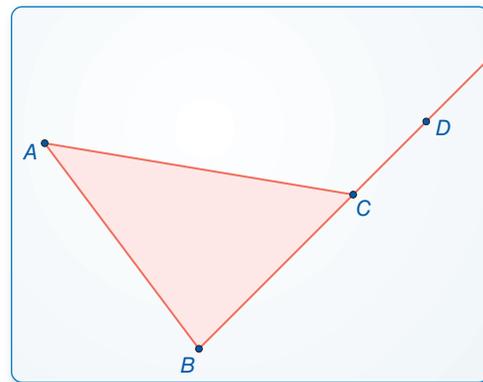
Muestra

Ángulos
 $m\angle A = 43.67^\circ$
 $m\angle B = 81.87^\circ$
 $m\angle C = 54.46^\circ$

EXPLORACIÓN 2 Escribir una conjetura

Trabaja con un compañero.

- Utiliza un software de geometría dinámica para dibujar cualquier triángulo y rotularlo como $\triangle ABC$.
- Dibuja un ángulo exterior en cualquier vértice y halla su medida.
- Halla las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes del triángulo.
- Halla la suma de las medidas de dos ángulos interiores no adyacentes. Compara esta suma con la medida del ángulo exterior.
- Repite las partes (a) a (d) con varios otros triángulos. Después haz una conjetura que compare la medida de un ángulo exterior con la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes.



Muestra

Ángulos
 $m\angle A = 43.67^\circ$
 $m\angle B = 81.87^\circ$
 $m\angle ACD = 125.54^\circ$

Comunicar tu respuesta

- ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos de un triángulo?
- Un ángulo exterior de un triángulo mide 32° . ¿Qué sabes acerca de las medidas de los ángulos interiores? Explica tu razonamiento.

5.1 Lección

Vocabulario Esencial

ángulos interiores, pág. 233
ángulos exteriores, pág. 233
corolario a un teorema, pág. 235

Anterior
triángulo

LEER

Observa que un triángulo equilátero también es isósceles. Un triángulo equiángulo también es agudo.

Qué aprenderás

- ▶ Clasificar los triángulos según sus lados y ángulos
- ▶ Hallar las medidas de los ángulos interiores y exteriores de los triángulos.

Clasificar triángulos según sus lados y ángulos

Recuerda que un triángulo es un polígono con tres lados. Puedes clasificar a los triángulos según sus lados y sus ángulos, como se muestra abajo.

Concepto Esencial

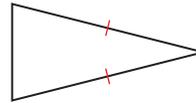
Clarificar triángulos según sus lados

Triángulo escaleno



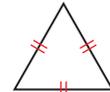
sin lados congruentes

Triángulo isósceles



al menos 2 lados congruentes

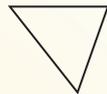
Triángulo equilátero



3 lados congruentes

Clasificar triángulos según sus ángulos

Triángulo acutángulo



3 ángulos agudos

Triángulo rectángulo



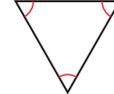
1 ángulo recto

Triángulo obtusángulo



1 ángulo obtuso

Triángulo equiángulo

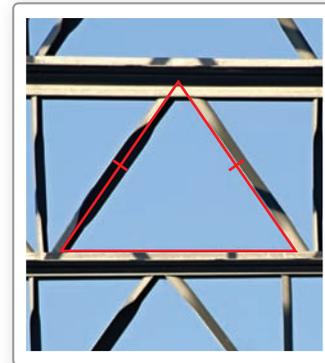


3 ángulos congruentes

EJEMPLO 1

Clasificar triángulos según sus lados y ángulos

En el diagrama clasifica la forma triangular de las vigas de soporte, según sus lados y midiendo sus ángulos.



SOLUCIÓN

El triángulo tiene un par de lados congruentes, por tanto es isósceles. Las medidas de los ángulos son 55° , 55° y 70° .

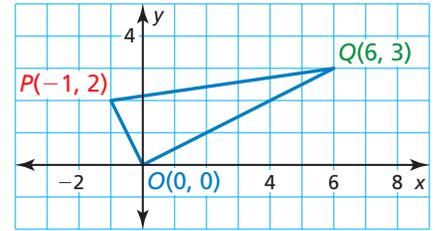
- ▶ Entonces, es un triángulo isósceles agudo.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

1. Dibuja un triángulo isósceles obtusángulo y uno escaleno agudo.

EJEMPLO 2**Clasificar un triángulo en el plano de coordenadas**

Clasifica $\triangle OPQ$ según sus lados. Después determina si es un triángulo rectángulo.

**SOLUCIÓN**

Paso 1 Utiliza la fórmula de distancia para hallar las longitudes de los lados.

$$OP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{5} \approx 2.2$$

$$OQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{45} \approx 6.7$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[6 - (-1)]^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{50} \approx 7.1$$

Como ningún lado es congruente, $\triangle OPQ$ es un triángulo escaleno.

Paso 2 Revisa los ángulos rectos. La pendiente de \overline{OP} es $\frac{2 - 0}{-1 - 0} = -2$. La pendiente

de \overline{OQ} es $\frac{3 - 0}{6 - 0} = \frac{1}{2}$. El producto de las pendientes es $-2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. Entonces,

$\overline{OP} \perp \overline{OQ}$ y $\angle POQ$ es un ángulo recto.

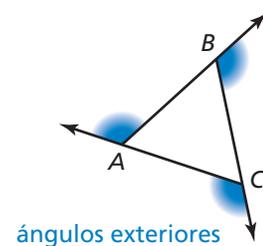
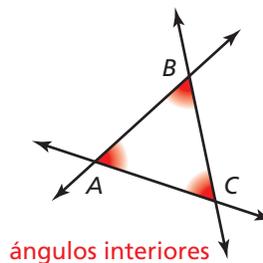
► Entonces, $\triangle OPQ$ es un triángulo escaleno recto.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

2. $\triangle ABC$ tiene vértices $A(0, 0)$, $B(3, 3)$, y $C(-3, 3)$. Clasifica el triángulo según sus lados. Después determina si es un triángulo rectángulo.

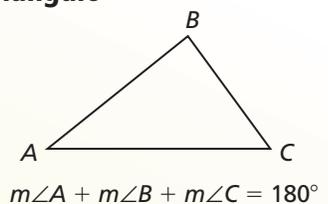
Hallar las medidas de los ángulos de los triángulos

Cuando los lados de un polígono se extienden, se forman otros ángulos. Los ángulos originales son los **ángulos interiores**. Los ángulos que forman pares lineales con los ángulos interiores son los **ángulos exteriores**.

**Teorema****Teorema 5.1 Teorema de la suma del triángulo**

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

Prueba pág. 234; Ej. 53, pág. 238

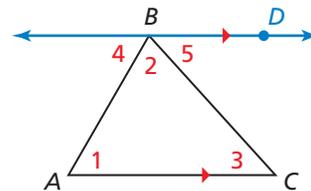


Para demostrar ciertos teoremas, quizá necesites agregar una línea, un segmento o un rayo a un diagrama determinado. Una línea *auxiliar* se utiliza en la prueba del Teorema de la suma del triángulo.

PRUEBA Teorema de la suma del triángulo

Dado $\triangle ABC$

Demostrar $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$



- Planea la prueba**
- Dibuja una línea auxiliar a través de B que sea paralela a \overline{AC} .
 - Demuestra que $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180^\circ$, $\angle 1 \cong \angle 4$ y $\angle 3 \cong \angle 5$.
 - Por sustitución, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$.

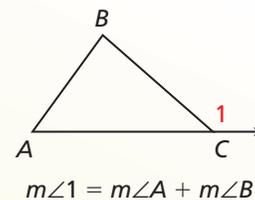
Plan en acción	ENUNCIADOS	RAZONES
a.	1. Dibuja \overleftrightarrow{BD} paralelo a \overline{AC} .	1. Postulado del paralelismo (Postu. 3.1)
b.	2. $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180^\circ$	2. Postulado de la suma de ángulos (Postu. 1.4) y definición de un ángulo recto
	3. $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 3 \cong \angle 5$	3. Teorema de los ángulos interiores alternos (Teor. 3.2)
	4. $m\angle 1 = m\angle 4$, $m\angle 3 = m\angle 5$	4. Definición de ángulos congruentes
c.	5. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$	5. Propiedad de igualdad de la sustitución

Teorema

Teorema 5.2 Teorema del ángulo exterior

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de dos ángulos interiores no adyacentes.

Prueba Ej. 42, pág. 237



EJEMPLO 3 Hallar la medida de un ángulo

Halla $m\angle JKM$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Escribe y resuelve la ecuación para hallar el valor de x .

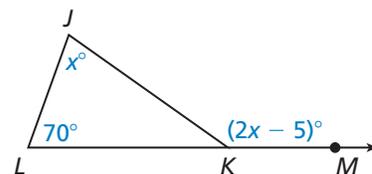
$$(2x - 5)^\circ = 70^\circ + x^\circ \quad \text{Aplica el Teorema del ángulo exterior.}$$

$$x = 75 \quad \text{Resuelve para hallar } x.$$

Paso 2 Substitute x por 75 en $2x - 5$ para hallar $m\angle JKM$.

$$2x - 5 = 2 \cdot 75 - 5 = 145$$

► Entonces, la medida de $\angle JKM$ es 145° .

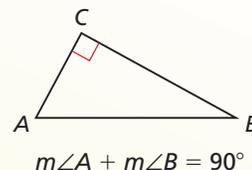


Un **corolario a un teorema** es un enunciado que puede ser demostrado fácilmente mediante el teorema. El corolario siguiente resulta del Teorema de la suma del triángulo.

Corolario

Corolario 5.1 Corolario al Teorema de la suma del triángulo

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.



Prueba Ej. 41, pág. 237

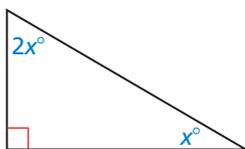
EJEMPLO 4 Representar con matemáticas

En la pintura, el triángulo rojo es un triángulo rectángulo. La medida de un ángulo agudo en el triángulo es dos veces la medida del otro. Halla la medida de cada ángulo agudo.



SOLUCIÓN

- Comprende el problema** Se te ha dado un triángulo rectángulo y la relación entre los dos ángulos agudos en el triángulo. Debes hallar la medida de cada ángulo agudo.
- Haz un plan** Primero, dibuja un diagrama de la situación. Puedes utilizar el corolario al Teorema de la suma del triángulo y la relación dada entre los dos ángulos agudos para escribir y resolver una ecuación para hallar la medida de cada ángulo agudo.
- Resuelve el problema** Sea la medida del ángulo agudo más pequeño x° . Entonces la medida del ángulo mayor es $2x^\circ$. El corolario al Teorema de la suma del triángulo afirma que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.



Utiliza el corolario para configurar y resolver una ecuación.

$$x^\circ + 2x^\circ = 90^\circ \quad \text{Corolario al Teorema de la suma del triángulo}$$

$$x = 30 \quad \text{Resuelve para hallar } x.$$

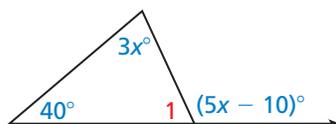
▶ Entonces, las medidas de los ángulos agudos son 30° y $2(30^\circ) = 60^\circ$.

- Verificalo** Suma los dos ángulos y verifica que su suma cumpla el corolario al Teorema de la suma del triángulo.

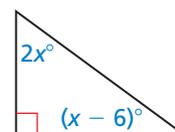
$$30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \quad \checkmark$$

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

- Halla la medida de $\angle 1$.



- Halla la medida de cada ángulo agudo.

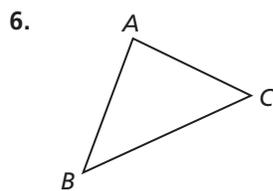
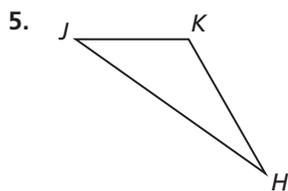
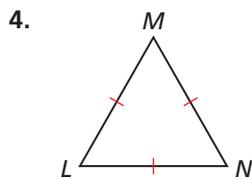
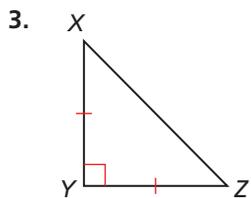


Verificación de vocabulario y concepto esencial

- ESCRIBIR** ¿Puede un triángulo rectángulo también ser obtuso? Explica tu razonamiento.
- COMPLETAR LA ORACIÓN** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores _____.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

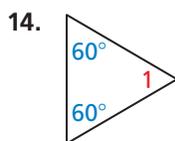
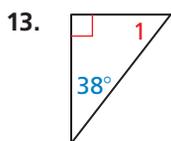
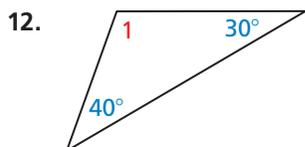
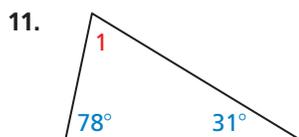
En los Ejercicios 3–6, clasifica el triángulo según sus lados y la medida de sus ángulos. (Consulta el Ejemplo 1).



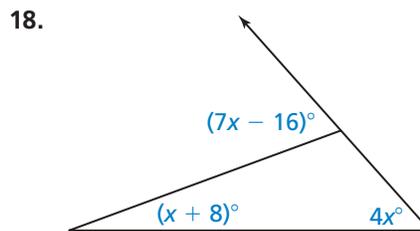
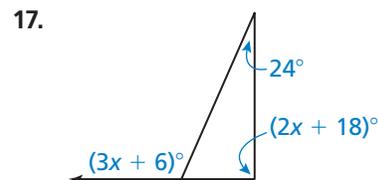
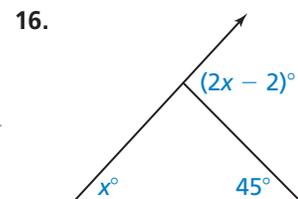
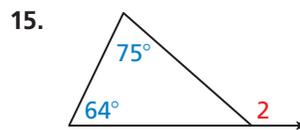
En los Ejercicios 7–10, clasifica $\triangle ABC$ de acuerdo a sus lados. Luego, determina si es un triángulo rectángulo. (Consulta el Ejemplo 2).

- $A(2, 3), B(6, 3), C(2, 7)$
- $A(3, 3), B(6, 9), C(6, -3)$
- $A(1, 9), B(4, 8), C(2, 5)$
- $A(-2, 3), B(0, -3), C(3, -2)$

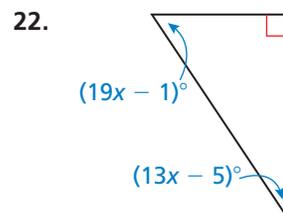
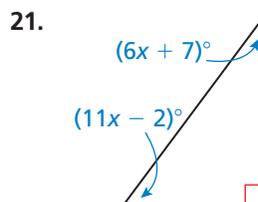
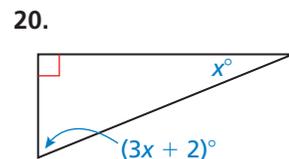
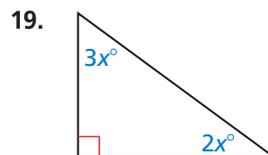
En los Ejercicios 11–14, halla $m\angle 1$. Después, clasifica el triángulo según sus ángulos.



En los Ejercicios 15–18, halla la medida del ángulo exterior. (Consulta el Ejemplo 3).



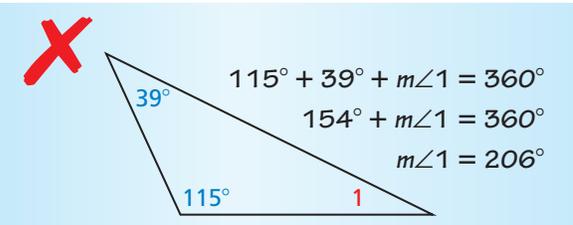
En los Ejercicios 19–22, halla la medida de cada ángulo agudo. (Consulta el Ejemplo 4).



En los Ejercicios 23–26, halla la medida de cada ángulo agudo en el triángulo rectángulo. (Consulta el Ejemplo 4).

23. La medida de un ángulo agudo es 5 veces la medida del otro ángulo agudo.
24. La medida de un ángulo agudo es 8 veces la medida del otro ángulo agudo.
25. La medida de un ángulo agudo es 3 veces la suma de la medida del otro ángulo agudo y 8.
26. La medida de un ángulo agudo es dos veces la diferencia de la medida del otro ángulo agudo y 12.

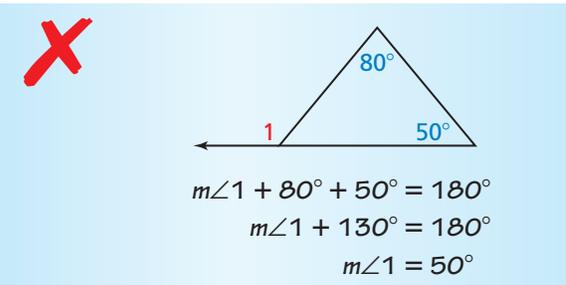
ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 27 y 28, describe y corrige el error cometido al hallar $m\angle 1$.

27. 

$$115^\circ + 39^\circ + m\angle 1 = 360^\circ$$

$$154^\circ + m\angle 1 = 360^\circ$$

$$m\angle 1 = 206^\circ$$

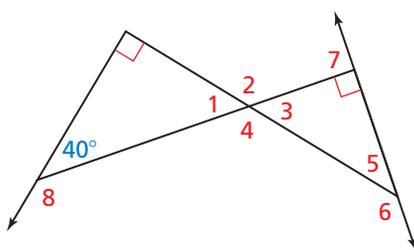
28. 

$$m\angle 1 + 80^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle 1 + 130^\circ = 180^\circ$$

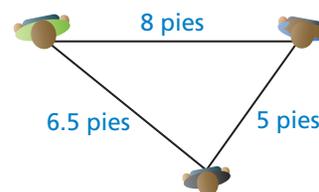
$$m\angle 1 = 50^\circ$$

En los Ejercicios 29–36, halla la medida del ángulo numerado.



- | | |
|----------------|----------------|
| 29. $\angle 1$ | 30. $\angle 2$ |
| 31. $\angle 3$ | 32. $\angle 4$ |
| 33. $\angle 5$ | 34. $\angle 6$ |
| 35. $\angle 7$ | 36. $\angle 8$ |

37. **USAR HERRAMIENTAS** Tres personas están paradas sobre un escenario. Las distancias entre ellas se muestran en el diagrama. Clasifica el triángulo según sus lados y la medida de sus ángulos.



38. **USAR LA ESTRUCTURA** ¿Cuál de los siguientes conjuntos de medidas de ángulos podría formar un triángulo? Selecciona todos los que aplican.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (A) $100^\circ, 50^\circ, 40^\circ$ | (B) $96^\circ, 74^\circ, 10^\circ$ |
| (C) $165^\circ, 113^\circ, 82^\circ$ | (D) $101^\circ, 41^\circ, 38^\circ$ |
| (E) $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ | (F) $84^\circ, 62^\circ, 34^\circ$ |

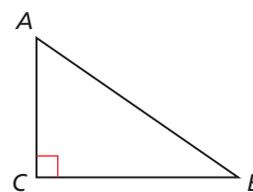
39. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Estás doblando una vara de metal para convertirla en un triángulo isósceles para una escultura. La vara de metal mide 20 pulgadas de largo. El primer doblado se hace a 6 pulgadas de uno de los extremos. Describe dos formas en las que puedas completar el triángulo.

40. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Halla y dibuja un objeto (o parte de un objeto) que pueda modelarse mediante un triángulo y un ángulo exterior. Describe la relación entre los ángulos interiores del triángulo y el ángulo exterior en términos del objeto.

41. **DEMOSTRAR UN COROLARIO** Demuestra el corolario al Teorema de la suma del triángulo (Corolario 5.1).

Dado $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

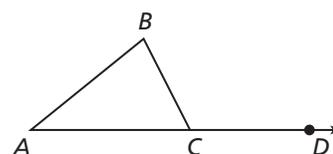
Mostrar $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.



42. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Demuestra el Teorema del ángulo exterior (Teorema 5.2).

Dado $\triangle ABC$, exterior $\angle BCD$

Mostrar $m\angle A + m\angle B = m\angle BCD$



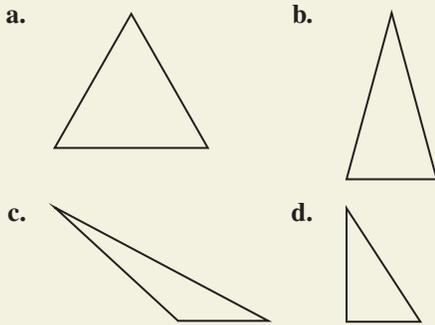
43. **PENSAMIENTO CRÍTICO** ¿Es posible dibujar un triángulo isósceles obtusángulo? ¿Un triángulo equilátero obtusángulo? Si es así, ofrece ejemplos. Si no, explica por qué no es posible.

44. **PENSAMIENTO CRÍTICO** ¿Es posible dibujar un triángulo isósceles recto? ¿Un triángulo equilátero recto? Si es así, ofrece un ejemplo. Si no, explica por qué no es posible.

45. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** $\triangle ABC$ es isósceles, $AB = x$, y $BC = 2x - 4$.

- Halla dos valores posibles para x cuando el perímetro de $\triangle ABC$ es 32.
- ¿Cuántos valores posibles hay para x cuando el perímetro de $\triangle ABC$ es 12?

46. **¿CÓMO LO VES?** Clasifica los triángulos, de tantas maneras como sea posible, sin hallar ninguna de sus medidas.

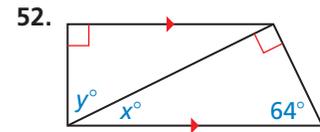
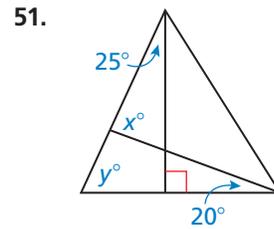
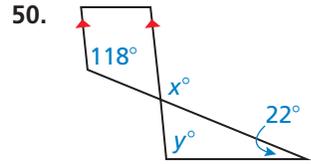
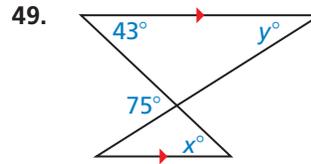


47. **ANALIZAR RELACIONES** ¿Cuál de los siguientes podrían representar las medidas de un ángulo exterior y dos ángulos interiores de un triángulo? Selecciona todas las aplicables.

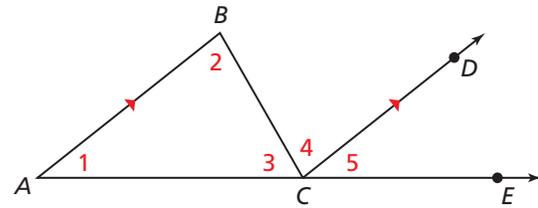
- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| (A) $100^\circ, 62^\circ, 38^\circ$ | (B) $81^\circ, 57^\circ, 24^\circ$ |
| (C) $119^\circ, 68^\circ, 49^\circ$ | (D) $95^\circ, 85^\circ, 28^\circ$ |
| (E) $92^\circ, 78^\circ, 68^\circ$ | (F) $149^\circ, 101^\circ, 48^\circ$ |

48. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que la medida de un ángulo exterior siempre será mayor que la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes. ¿Tu amigo tiene razón? Explica tu razonamiento.

CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 49–52, halla los valores de x y y .



53. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Utiliza el diagrama para escribir una prueba del Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1). Tu prueba debe ser diferente a la prueba del Teorema de la suma del triángulo mostrado en esta lección.

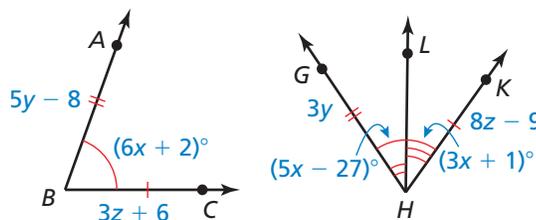


Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Utiliza el diagrama para hallar la medida del segmento o ángulo. (Sección 1.2 y Sección 1.5)

- $m\angle KHL$
- $m\angle ABC$
- GH
- BC



5.2 Polígonos congruentes

Pregunta esencial Dados dos triángulos congruentes, ¿cómo puedes utilizar los movimientos rígidos para mapear un triángulo respecto a otro triángulo?

EXPLORACIÓN 1 Describir movimientos rígidos

Trabaja con un compañero. De las cuatro transformaciones que estudiaste en el Capítulo 4, ¿cuáles son movimientos rígidos? Bajo un movimiento rígido, ¿por qué la imagen de un triángulo siempre es congruente con el triángulo original? Explica tu razonamiento.



Traslación



Reflexión



Rotación



Dilatación

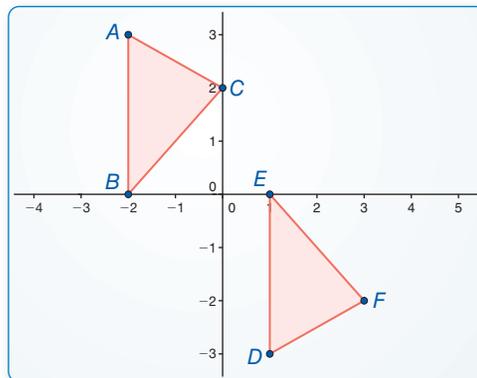
BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas necesitas observar atentamente e identificar un patrón o estructura.

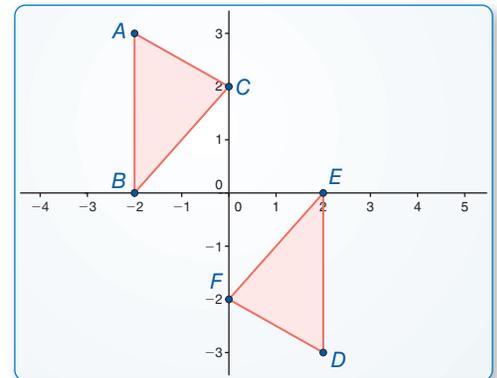
EXPLORACIÓN 2 Hallar una composición de movimientos rígidos

Trabaja con un compañero. Describe una composición de movimientos rígidos que mapee $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$. Utiliza un software de geometría dinámica para verificar tu respuesta.

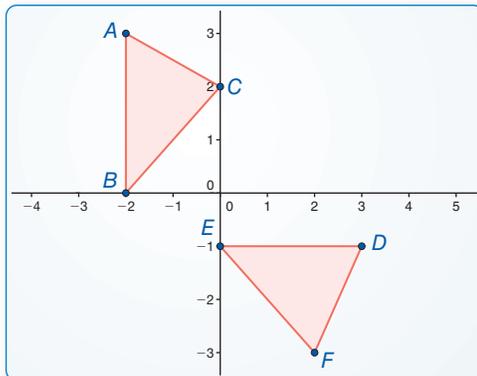
a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



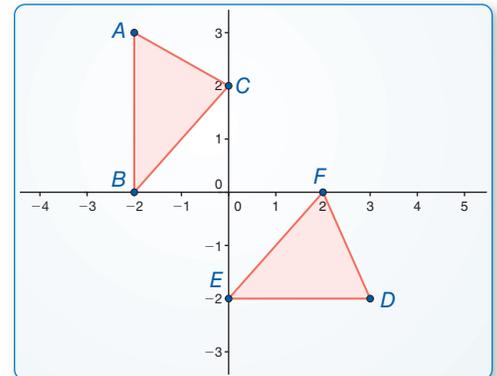
b. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



c. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



d. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



Comunicar tu respuesta

- Dados dos triángulos congruentes, ¿cómo puedes usar los movimientos rígidos para mapear un triángulo respecto a otro triángulo?
- Los vértices $\triangle ABC$ son $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ y $C(4, 4)$. Los vértices de $\triangle DEF$ son $D(2, -1)$, $E(0, 0)$ y $F(-1, 2)$. Describe una composición de movimientos rígidos que mapee $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$.

5.2 Lección

Qué aprenderás

- ▶ Identificar y utilizar partes correspondientes.
- ▶ Utilizar el Teorema de los terceros ángulos.

Vocabulario Esencial

partes correspondientes, pág. 240

Anterior

figuras congruentes

CONSEJO DE ESTUDIO

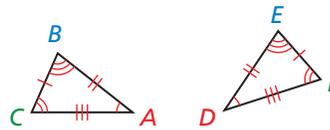
Observa que los dos enunciados siguientes son verdaderos.

1. Si dos triángulos son congruentes, entonces todas sus partes correspondientes son congruentes.
2. Si todas las partes correspondientes de dos triángulos son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Identificar y utilizar partes correspondientes

Recuerda que dos figuras geométricas son congruentes, si y sólo si, un movimiento rígido o una composición de movimientos rígidos mapea una de las figuras respecto a la otra. Un movimiento rígido mapea cada parte de una figura respecto a la **parte correspondiente** de su imagen. Como los movimientos rígidos preservan la longitud y medidas de los ángulos, las partes correspondientes de figuras congruentes son congruentes. En los polígonos congruentes, esto significa que los *lados correspondientes* y los *ángulos correspondientes* son congruentes.

Cuando $\triangle DEF$ es la imagen de $\triangle ABC$ después de un movimiento rígido o una composición de movimientos rígidos, puedes escribir enunciados de congruencia para los ángulos correspondientes y los lados correspondientes.



Ángulos correspondientes

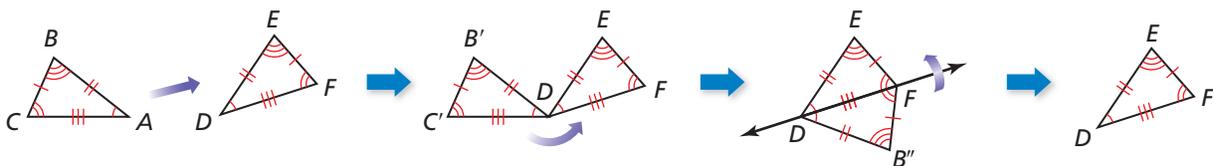
$$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$$

Lados correspondientes

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

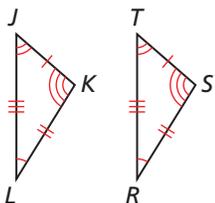
Cuando escribas un enunciado de congruencia para dos polígonos, siempre elabora una lista de los vértices correspondientes en el mismo orden. Puedes escribir enunciados de congruencia de varias formas. Dos posibles enunciados de congruencia para los triángulos anteriores son $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ o $\triangle BCA \cong \triangle EFD$.

Cuando todas las partes correspondientes de dos triángulos son congruentes, puedes demostrar que los triángulos son congruentes. Utilizando los triángulos anteriores, primero traslada $\triangle ABC$ de manera que mapees el punto A respecto al punto D . Esta traslación mapea $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DB'C'$. Después, rota $\triangle DB'C'$ en sentido contrario de las manecillas del reloj a través de $\angle C'DF$ de manera que la imagen $\overline{DC'}$ coincida con \overline{DF} . Ya que $\overline{DC'} \cong \overline{DF}$, la rotación mapea el punto C' respecto del punto F . Entonces, esta rotación mapea $\triangle DB'C'$ respecto a $\triangle DB''F$.



RAZONAMIENTO VISUAL

Para ayudarte a identificar las partes correspondientes, rota $\triangle TSR$.



Ahora, refleja a $\triangle DB''F$ en la línea a través de los puntos D y F . Esta reflexión mapea los lados y ángulos de $\triangle DB''F$ respecto a los lados y ángulos correspondientes de $\triangle DEF$, de manera que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Entonces, para mostrar que dos triángulos son congruentes, es suficiente demostrar que sus partes correspondientes son congruentes. En general, esto es verdadero para todos los polígonos.

EJEMPLO 1 Identificar partes correspondientes

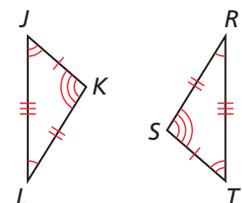
Escribe un enunciado congruente para los triángulos. Identifica todos los pares de partes congruentes correspondientes.

SOLUCIÓN

El diagrama indica que $\triangle JKL \cong \triangle TSR$.

Ángulos correspondientes $\angle J \cong \angle T, \angle K \cong \angle S, \angle L \cong \angle R$

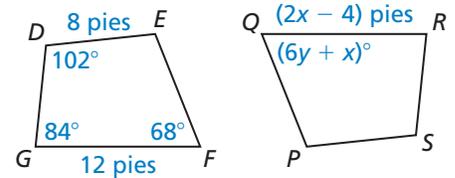
Lados correspondientes $\overline{JK} \cong \overline{TS}, \overline{KL} \cong \overline{SR}, \overline{LJ} \cong \overline{RT}$



EJEMPLO 2 Utilizar las propiedades de figuras congruentes

En el diagrama, $DEFG \cong SPQR$.

- Halla el valor de x .
- Halla el valor de y .



SOLUCIÓN

- Sabes que $\overline{FG} \cong \overline{QR}$.

$$FG = QR$$

$$12 = 2x - 4$$

$$16 = 2x$$

$$8 = x$$

- Sabes que $\angle F \cong \angle Q$.

$$m\angle F = m\angle Q$$

$$68^\circ = (6y + x)^\circ$$

$$68 = 6y + 8$$

$$10 = y$$

EJEMPLO 3 Mostrar que las figuras son congruentes

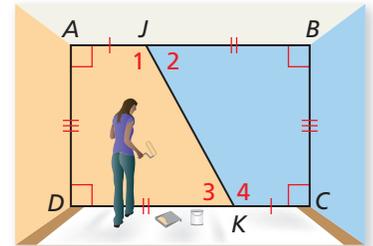


Si divides el muro en secciones naranja y azul a lo largo de \overline{JK} . ¿Las secciones del muro serán del mismo tamaño y forma? Explica.

SOLUCIÓN

Del diagrama, $\angle A \cong \angle C$ y $\angle D \cong \angle B$ debido a que todos los ángulos rectos son congruentes. Por otra parte, por el Teorema de las líneas

perpendiculares a una transversal (Teorema 3.12), $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Entonces $\angle 1 \cong \angle 4$ y $\angle 2 \cong \angle 3$ según el Teorema de ángulos interiores alternos (Teorema 3.2). Entonces, todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes. El diagrama muestra que $\overline{AJ} \cong \overline{CK}$, $\overline{KD} \cong \overline{JB}$ y $\overline{DA} \cong \overline{BC}$. Por la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1), $\overline{JK} \cong \overline{KJ}$. Entonces, todos los pares de lados correspondientes son congruentes. Como todas las partes correspondientes son congruentes, $AJKD \cong CKJB$.

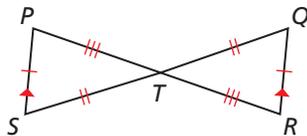
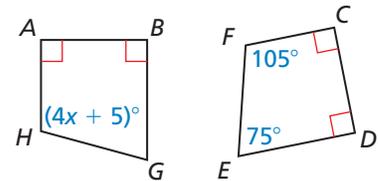


- Sí, las dos secciones serán del mismo tamaño y forma.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

En el diagrama, $ABGH \cong CDEF$.

- Identifica todos los pares de partes correspondientes congruentes.
- Halla el valor de x .
- En el diagrama de la izquierda, muestra que $\triangle PTS \cong \triangle RTQ$.



Teorema

Teorema 5.3 Propiedades de la congruencia de triángulos

La congruencia de triángulos es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva Para cualquier triángulo $\triangle ABC$, $\triangle ABC \cong \triangle ABC$.

Simétrica Si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, entonces $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

Transitiva Si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle JKL$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

Prueba BigIdeasMath.com

CONSEJO DE ESTUDIO

Las propiedades de congruencia que son verdaderas para los segmentos y ángulos también lo son para los triángulos.

Utilizar el Teorema de los terceros ángulos

Teorema

Teorema 5.4 Teorema de los terceros ángulos

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los terceros ángulos también serán congruentes.

Prueba Ej. 19, pág. 244



Si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces $\angle C \cong \angle F$.

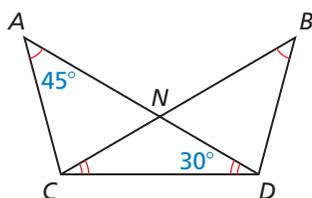
EJEMPLO 4 Utilizar el Teorema de los terceros ángulos

Halla $m\angle BDC$.

SOLUCIÓN

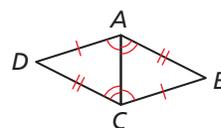
$\angle A \cong \angle B$ y $\angle ADC \cong \angle BCD$, entonces, según el Teorema de los terceros ángulos, $\angle ACD \cong \angle BDC$. Por el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1), $m\angle ACD = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.

▶ Entonces, $m\angle BDC = m\angle ACD = 105^\circ$ según la definición de los ángulos congruentes.



EJEMPLO 5 Demostrar que los triángulos son congruentes

Utiliza la información en la figura para demostrar que $\triangle ACD \cong \triangle CAB$.



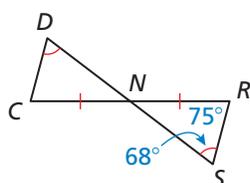
SOLUCIÓN

Dado $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{DC} \cong \overline{BA}$, $\angle ACD \cong \angle CAB$, $\angle CAD \cong \angle ACB$

Demostrar $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

- Planea la prueba**
- Utiliza la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1) para mostrar que $\overline{AC} \cong \overline{CA}$.
 - Utiliza el Teorema de los terceros ángulos para demostrar que $\angle B \cong \angle D$.

Plan en acción	ENUNCIADOS	RAZONES
	1. $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{DC} \cong \overline{BA}$	1. Dado
	a. 2. $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	2. Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1)
	3. $\angle ACD \cong \angle CAB$, $\angle CAD \cong \angle ACB$	3. Dado
	b. 4. $\angle B \cong \angle D$	4. Teorema de los terceros ángulos
	5. $\triangle ACD \cong \triangle CAB$	5. Todas las partes correspondientes son congruentes.



Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Utiliza el diagrama.

- Halla $m\angle DCN$.
- ¿Qué información adicional se necesita para concluir que $\triangle NDC \cong \triangle NSR$?

5.2 Ejercicios

Verificación de vocabulario y concepto esencial

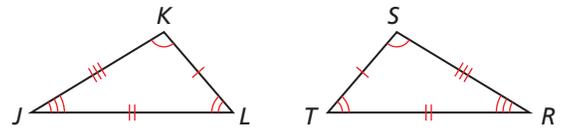
- ESCRIBIR** Con base en esta lección, ¿qué información necesitas para demostrar que dos triángulos son congruentes? Explica tu razonamiento.
- DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** ¿Cuál es diferente? Halla “ambas” respuestas.

¿ $\triangle JKL \cong \triangle RST$?

¿ $\triangle KJL \cong \triangle SRT$?

¿ $\triangle JLK \cong \triangle STR$?

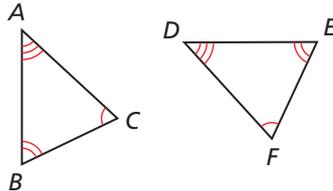
¿ $\triangle LKJ \cong \triangle TSR$?



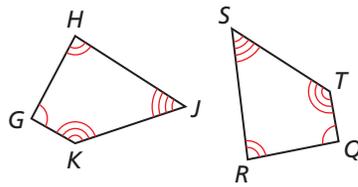
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3 y 4, identifica todos los pares de partes correspondientes congruentes. Después escribe otro enunciado de congruencia para los polígonos. (Consulta el Ejemplo 1).

3. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



4. $GHIK \cong QRST$



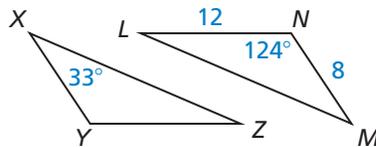
En los Ejercicios 5–8, $\triangle XYZ \cong \triangle MNL$. Copia y completa el enunciado.

5. $m\angle Y = \underline{\hspace{2cm}}$

6. $m\angle M = \underline{\hspace{2cm}}$

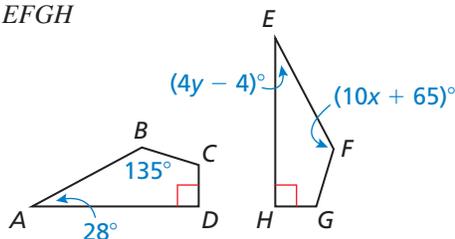
7. $m\angle Z = \underline{\hspace{2cm}}$

8. $XY = \underline{\hspace{2cm}}$

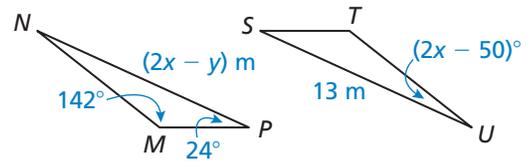


En los Ejercicios 9 y 10, halla los valores de x y y . (Consulta el Ejemplo 2).

9. $ABCD \cong EFGH$

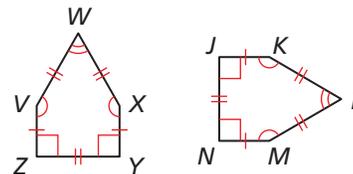


10. $\triangle MNP \cong \triangle TUS$

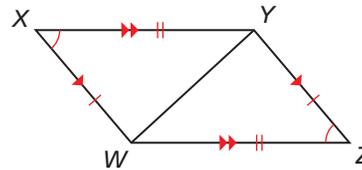


En los Ejercicios 11 y 12, demuestra que los polígonos son congruentes. Explica tu razonamiento. (Consulta el Ejemplo 3).

11.

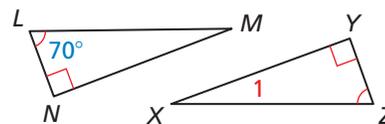


12.

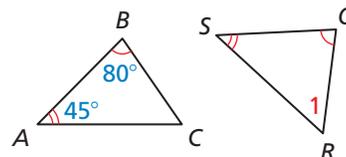


En los Ejercicios 13 y 14, halla $m\angle 1$. (Consulta el Ejemplo 4).

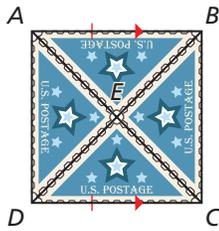
13.



14.



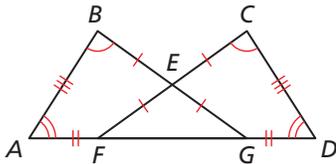
15. **PRUEBA** Los timbres postales triangulares, como los mostrados, son muy valorados por los coleccionistas. Demuestra que $\triangle AEB \cong \triangle CED$. (Consulta el Ejemplo 5).



Dado $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, E es el punto medio entre \overline{AC} y \overline{BD} .

Demostrar $\triangle AEB \cong \triangle CED$

16. **PRUEBA** Utiliza la información de la figura para demostrar que $\triangle ABG \cong \triangle DCF$.



ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 17 y 18, describe y corrige el error cometido.

17.

X Dado $\triangle QRS \cong \triangle XZY$

$\angle S \cong \angle Z$
 $m\angle S = m\angle Z$
 $m\angle S = 42^\circ$

18.

X

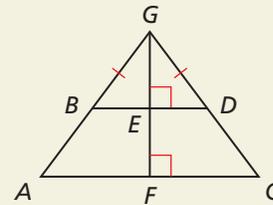
$\triangle MNP \cong \triangle RSP$
 porque los ángulos correspondientes son congruentes.

19. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Demuestra el Teorema de los terceros ángulos (Teorema 5.4) utilizando el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1).

20. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Dibuja un triángulo. Copia el triángulo varias veces para crear un diseño de tapete hecho con triángulos congruentes. ¿Qué propiedad garantiza que todos los triángulos sean congruentes?

21. **REASONING** $\triangle JKL$ es congruente con $\triangle XYZ$. Identifica todos los pares de partes correspondientes congruentes.

22. **¿CÓMO LO VES?** En el diagrama, $ABEF \cong CDEF$.



- Explica cómo sabes que $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ y $\angle ABE \cong \angle CDE$.
- Explica cómo sabes que $\angle GBE \cong \angle GDE$.
- Explica cómo sabes que $\angle GEB \cong \angle GED$.
- ¿Tienes información suficiente para demostrar que $\triangle BEG \cong \triangle DEG$? Explica.

CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 23 y 24, utiliza la información dada para escribir y resolver un sistema de ecuaciones lineales para hallar los valores de x y y .

- $\triangle LMN \cong \triangle PQR$, $m\angle L = 40^\circ$, $m\angle M = 90^\circ$, $m\angle P = (17x - y)^\circ$, $m\angle R = (2x + 4y)^\circ$
- $\triangle STU \cong \triangle XYZ$, $m\angle T = 28^\circ$, $m\angle U = (4x + y)^\circ$, $m\angle X = 130^\circ$, $m\angle Y = (8x - 6y)^\circ$
- PRUEBA** Demuestra que los criterios para los triángulos congruentes en esta lección son equivalentes a la definición de la congruencia en términos de los movimientos rígidos.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

¿Qué puedes concluir del diagrama? (Sección 1.6)

26.

27.

28.

29.

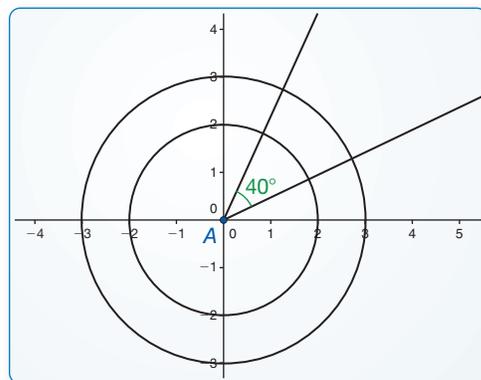
5.3 Demostrar congruencia de triángulos con LAL

Pregunta esencial ¿Qué puedes concluir acerca de dos triángulos cuando sabes que dos pares de lados correspondientes y los ángulos correspondientes incluidos son congruentes?

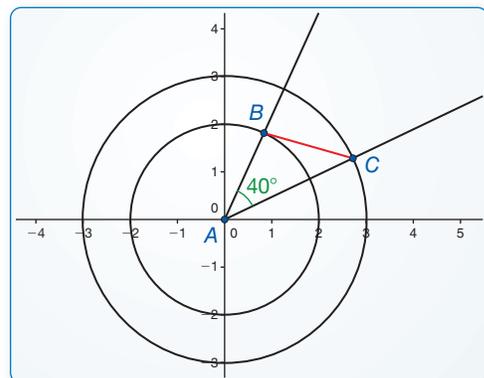
EXPLORACIÓN 1 Dibujar triángulos

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica.

- a. Construye círculos con radios de 2 y 3 unidades centrados en el origen. Construye un ángulo de 40° con su vértice en el origen. Rotula el vértice como A .



- b. Localiza el punto donde un rayo del ángulo interseque el círculo menor y rotula este punto como B . Ubica el punto donde el otro rayo del ángulo interseca el círculo más grande y rotula este punto como C . Después traza $\triangle ABC$.



- c. Halla BC , $m\angle B$ y $m\angle C$.

- d. Repite las partes (a) a (c) varias veces, vuelve a trazar el ángulo en diferentes posiciones. Copia y completa la siguiente tabla para llevar un registro de tus resultados. ¿Qué puedes concluir?

USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas usar la tecnología como ayuda para visualizar los resultados de diferentes hipótesis, explorar las consecuencias y comparar las predicciones con los datos.



	A	B	C	AB	AC	BC	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$
1.	(0, 0)			2	3		40°		
2.	(0, 0)			2	3		40°		
3.	(0, 0)			2	3		40°		
4.	(0, 0)			2	3		40°		
5.	(0, 0)			2	3		40°		

Comunicar tu respuesta

- ¿Qué puedes concluir sobre dos triángulos cuando sabes que dos pares de lados correspondientes y los ángulos correspondientes incluidos son congruentes?
- ¿Cómo demostrarías tu conclusión en la Exploración 1(d)?

5.3 Lección

Qué aprenderás

- ▶ Utilizar el Teorema de congruencia de lado-ángulo-lado (LAL).
- ▶ Resolver problemas de la vida real.

Vocabulario Esencial

Anterior
figuras congruentes
movimiento rígido

CONSEJO DE ESTUDIO

El *ángulo incluido* de dos lados de un triángulo es el ángulo formado por los dos lados.

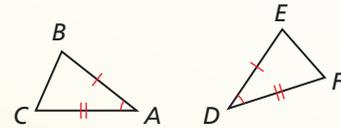
Utilizar el Teorema de congruencia de lado-ángulo-lado

Teorema

Teorema 5.5 Teorema de congruencia de lado-ángulo-lado (LAL)

Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes a dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

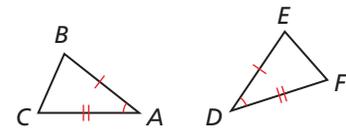


Prueba pág. 246

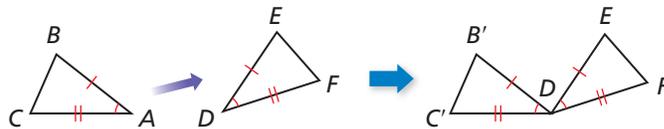
PRUEBA Teorema de congruencia de lado-ángulo-lado (LAL)

Dado $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

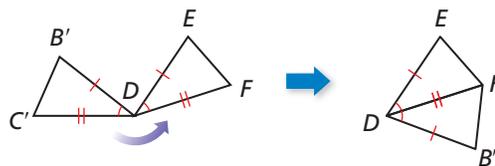
Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



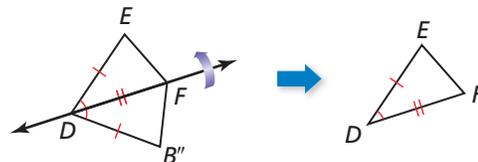
Primero, traslada $\triangle ABC$ de manera que el punto A mapee al punto D , como se muestra abajo.



Esta traslación mapea a $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DB'C'$. Después, rota $\triangle DB'C'$ en sentido contrario a las manecillas del reloj a través de $\angle C'DF$ de manera que la imagen $\overline{DC'}$ coincida con \overline{DF} , como se muestra abajo.



Debido a que $\overline{DC'} \cong \overline{DF}$, la rotación mapea el punto C' respecto al punto F . Entonces, esta rotación mapea a $\triangle DB'C'$ a $\triangle DB''F$. Ahora, refleja $\triangle DB''F$ en la línea que pasa por los puntos D y F , como se muestra abajo.

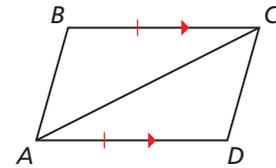


Como los puntos D y F pertenecen a \overline{DF} , esta reflexión los mapea sobre sí mismos. Como una reflexión preserva la medida del ángulo y $\angle B''DF \cong \angle EDF$, la reflexión mapea $\overline{DB''}$ respecto a \overline{DE} . Como $\overline{DB''} \cong \overline{DE}$, la reflexión mapea el punto B'' respecto al punto E . Entonces, esta reflexión mapea a $\triangle DB''F$ respecto a $\triangle DEF$.

Como puedes mapear $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$ utilizando una composición de movimientos rígidos, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

EJEMPLO 1**Utilizar el Teorema de congruencia de LAL**

Escribe una prueba.

Dado $\overline{BC} \cong \overline{DA}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ **Demostrar** $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ **CONSEJO DE ESTUDIO**

Haz que tu prueba sea fácil de leer, para ello, identifica los pasos donde muestras los lados (L) y los ángulos (A) congruentes.

SOLUCIÓN**ENUNCIADOS****RAZONES**L 1. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

1. Dado

2. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

2. Dado

A 3. $\angle BCA \cong \angle DAC$

3. Teorema de los ángulos interiores alternos (Teorema 3.2)

L 4. $\overline{AC} \cong \overline{CA}$

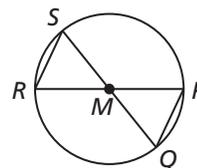
4. Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1)

5. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

5. Teorema de congruencia de LAL

EJEMPLO 2**Utilizar LAL y propiedades de figuras**

En el diagrama, \overline{QS} y \overline{RP} pasan por el centro M del círculo. ¿Qué puedes concluir acerca de $\triangle MRS$ y $\triangle MPQ$?

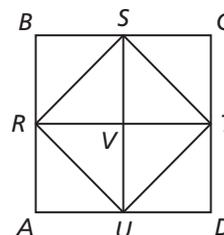
**SOLUCIÓN**

Como son ángulos verticales, $\angle PMQ \cong \angle RMS$. Todos los puntos en un círculo están a la misma distancia del centro, entonces, \overline{MP} , \overline{MQ} , \overline{MR} y \overline{MS} son todos congruentes.

▶ Entonces, $\triangle MRS$ y $\triangle MPQ$ son congruentes según el Teorema de congruencia de LAL.

Monitoreo del progreso  Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

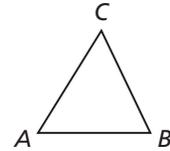
En el diagrama, $ABCD$ es un cuadrado con cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos. R , S , T y U son puntos medios de los lados de $ABCD$. También, $\overline{RT} \perp \overline{SU}$ y $\overline{SV} \cong \overline{UV}$.

1. Demuestra que $\triangle SVR \cong \triangle UVR$.2. Demuestra que $\triangle BSR \cong \triangle DUT$.

CONSTRUCCIÓN

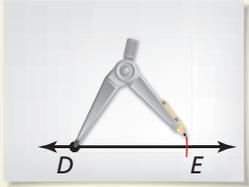
Copiar un triángulo utilizando LAL

Construye un triángulo que sea congruente con $\triangle ABC$ utilizando el Teorema de congruencia de LAL. Utiliza un compás y una regla.



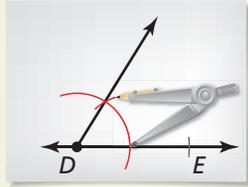
SOLUCIÓN

Paso 1



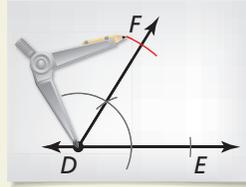
Construye un lado
Construye \overline{DE} de manera que sea congruente con \overline{AB} .

Paso 2



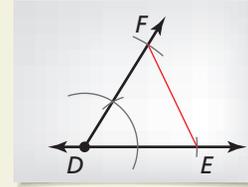
Construye un ángulo
Construye $\angle D$ con un vértice D y lado \overline{DE} de manera que sea congruente con $\angle A$.

Paso 3



Construye un lado
Construye \overline{DF} de manera que sea congruente con \overline{AC} .

Paso 4



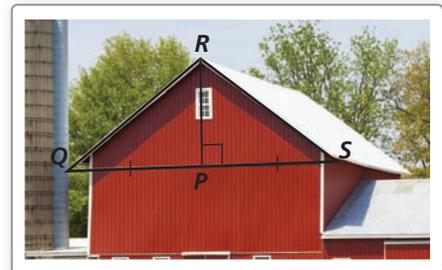
Dibuja un triángulo
Dibuja $\triangle DEF$. Por el Teorema de congruencia de LAL, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Resolver problemas de la vida real

EJEMPLO 3

Resolver un problema de la vida real

Estás haciendo un letrero de tela para colgarlo en la parte triangular del muro del granero mostrado en la foto. Crees que puedes utilizar dos pedazos triangulares idénticos de tela. Sabes que $\overline{RP} \perp \overline{QS}$ y $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$. Utiliza el Teorema de congruencia de LAL para mostrar que $\triangle PQR \cong \triangle PSR$.



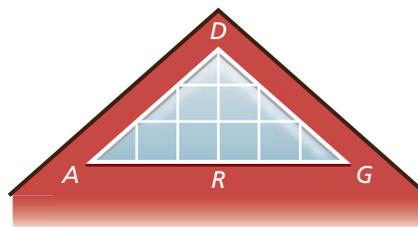
SOLUCIÓN

Sabes que $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$. Por la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1), $\overline{RP} \cong \overline{RP}$. Según la definición de las líneas perpendiculares, tanto $\angle RPQ$ y $\angle RPS$ son ángulos rectos, de manera que son congruentes. Entonces, dos pares de lados y sus ángulos incluidos son congruentes.

► $\triangle PQR$ y $\triangle PSR$ son congruentes según el Teorema de congruencia de LAL.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

- Estás diseñando la ventana mostrada en la foto. Deseas hacer que $\triangle DRA$ sea congruente con $\triangle DRG$. Diseñas la ventana de manera que $\overline{DA} \cong \overline{DG}$ y $\angle ADR \cong \angle GDR$. Utiliza el Teorema de congruencia de LAL para demostrar que $\triangle DRA \cong \triangle DRG$.



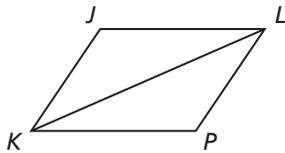
5.3 Ejercicios

Verificación de vocabulario y concepto esencial

- ESCRIBIR** ¿Qué es un ángulo incluido?
- COMPLETAR LA ORACIÓN** Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces _____.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

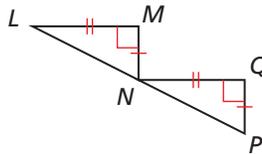
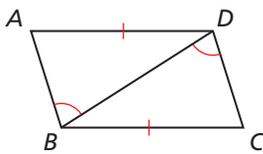
En los Ejercicios 3–8, indica el ángulo incluido entre el par de los lados dados.



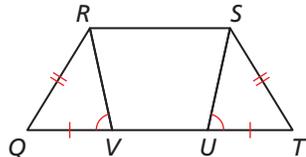
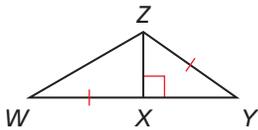
- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 3. \overline{JK} y \overline{KL} | 4. \overline{PK} y \overline{LK} |
| 5. \overline{LP} y \overline{LK} | 6. \overline{JL} y \overline{JK} |
| 7. \overline{KL} y \overline{JL} | 8. \overline{KP} y \overline{PL} |

En los Ejercicios 9–14, decide si se ha dado suficiente información para demostrar que los triángulos son congruentes usando el Teorema de congruencia de LAL (Teorema 5.5). Explica.

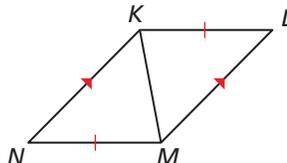
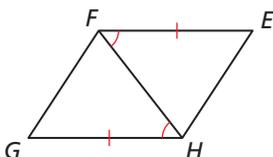
9. $\triangle ABD, \triangle CDB$ 10. $\triangle LMN, \triangle NQP$



11. $\triangle YXZ, \triangle WXZ$ 12. $\triangle QRV, \triangle TSU$

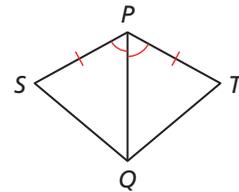


13. $\triangle EFH, \triangle GHF$ 14. $\triangle KLM, \triangle MNK$

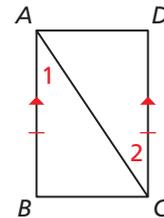


En los Ejercicios 15–18, escribe una prueba. (Consulta el Ejemplo 1).

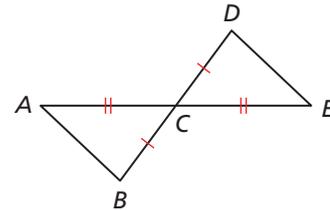
15. Dado \overline{PQ} biseca a $\angle SPT, \overline{SP} \cong \overline{TP}$
 Demostrar $\triangle SPQ \cong \triangle TPQ$



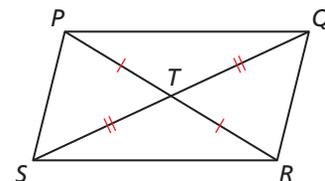
16. Dado $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle CDA$



17. Dado C es el punto medio de \overline{AE} y \overline{BD} .
 Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

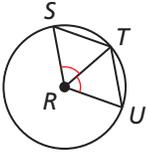


18. Dado $\overline{PT} \cong \overline{RT}, \overline{QT} \cong \overline{ST}$
 Demostrar $\triangle PQT \cong \triangle RST$

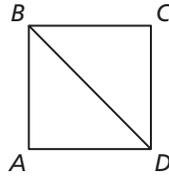


En los Ejercicios 19–22, utiliza la información dada para nombrar dos triángulos que sean congruentes. Explica tu razonamiento. (Consulta el Ejemplo 2).

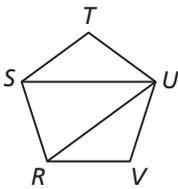
19. $\angle SRT \cong \angle URT$, y R es el centro del círculo.



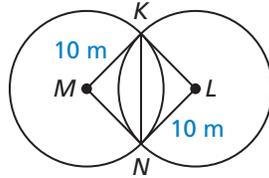
20. $ABCD$ es un cuadrado con cuatro lados congruentes y cuatro ángulos congruentes.



21. $RSTUV$ es un pentágono regular.

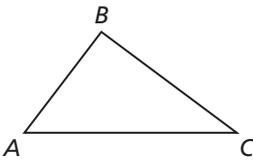


22. $\overline{MK} \perp \overline{MN}$, $\overline{KL} \perp \overline{NL}$, y M y L son los centros de los círculos.

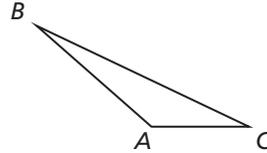


CONSTRUCCIÓN En los Ejercicios 23 y 24, construye un triángulo que sea congruente con $\triangle ABC$ utilizando el Teorema de congruencia de LAL (Teorema 5.5).

23.



24.



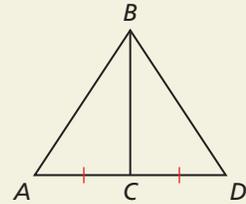
25. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al hallar el valor de x .

X

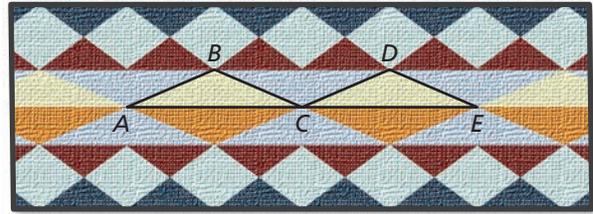
$4x + 6 = 3x + 9$
 $x + 6 = 9$
 $x = 3$

26. **¿CÓMO LO VES?**

¿Qué información adicional necesitas para demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DBC$?



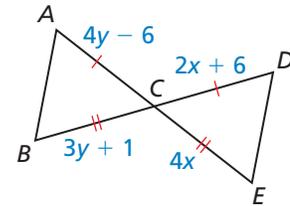
27. **PRUEBA** El tapete navajo está hecho de triángulos isósceles. Sabes que $\angle B \cong \angle D$. Utiliza el Teorema de congruencia de LAL (Teorema 5.5) para mostrar que $\triangle ABC \cong \triangle CDE$. (Consulta el Ejemplo 3).



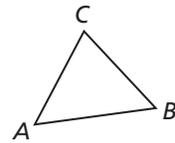
28. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Hay seis subconjuntos posibles de tres lados o ángulos de un triángulo: LLL, LAL, LLA, AAA, ALA y AAL. ¿Cuál de estos corresponde a los teoremas de congruencia? Para los que no correspondan, da un contraejemplo.

29. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Demuestra que $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.

Entonces, halla los valores de x y y .



30. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que es posible construir un triángulo congruente al $\triangle ABC$ si primero se construye \overline{AB} y \overline{AC} , y después se copia $\angle C$. ¿Tu amigo tiene razón? Explica tu razonamiento.

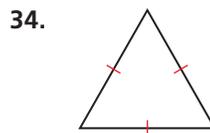
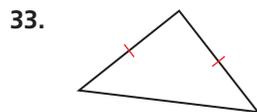
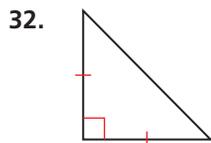


31. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Demuestra el Teorema de las reflexiones en las líneas intersecantes (Teorema 4.3).

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Clasifica el triángulo según sus lados y medidas de sus ángulos. (Sección 5.1)



5.4 Triángulos isósceles y equiláteros

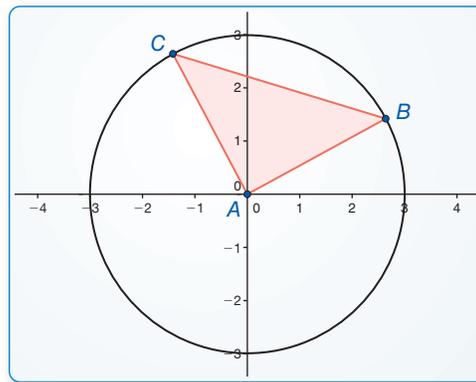
Pregunta esencial ¿Qué conjeturas puedes hacer acerca de las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles?

EXPLORACIÓN 1

Escribir una conjetura sobre los triángulos isósceles

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica.

- Construye un círculo con un radio de 3 unidades y céntralo en el origen.
- Construye $\triangle ABC$ de manera que B y C estén en el círculo y A en el origen.



Muestra

Puntos
 $A(0, 0)$
 $B(2.64, 1.42)$
 $C(-1.42, 2.64)$
 Segmentos
 $AB = 3$
 $AC = 3$
 $BC = 4.24$
 Ángulos
 $m\angle A = 90^\circ$
 $m\angle B = 45^\circ$
 $m\angle C = 45^\circ$

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas hacer conjeturas y desarrollar una progresión lógica de enunciados para explorar la veracidad de tus conjeturas.

- Recuerda que un triángulo es *isósceles* si tiene al menos dos lados congruentes. Explica por qué $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.
- ¿Qué observas acerca de los ángulos del $\triangle ABC$?
- Repite las partes (a) a (d) con varios otros triángulos isósceles utilizando círculos de diferentes radios. Copia y completa la tabla de abajo para anotar tus observaciones. Después, escribe una conjetura acerca de las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles.

	A	B	C	AB	AC	BC	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$
Muestra 1.	(0, 0)	(2.64, 1.42)	(-1.42, 2.64)	3	3	4.24	90°	45°	45°
2.	(0, 0)								
3.	(0, 0)								
4.	(0, 0)								
5.	(0, 0)								

- Escribe el recíproco de la conjetura que escribiste en la parte (e). ¿Es verdadero el recíproco?

Comunicar tu respuesta

- ¿Qué conjeturas puedes hacer acerca de las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles?
- ¿Cómo demostrarías tu conclusión en la Exploración 1(e)? ¿En la Exploración 1(f)?

5.4 Lección

Vocabulario Esencial

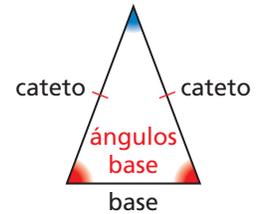
- catetos, pág. 252
- ángulo del vértice, pág. 252
- base, pág. 252
- ángulos base, pág. 252

Qué aprenderás

- ▶ Utilizar el Teorema de los ángulos base.
- ▶ Utilizar los triángulos isósceles y equiláteros.

Utilizar el Teorema de los ángulos base ángulo del vértice

Un triángulo es isósceles cuando tiene al menos dos lados congruentes. Cuando un triángulo isósceles tiene exactamente dos lados congruentes, estos lados son los **catetos**. El ángulo formado por los catetos es el **ángulo del vértice**. El tercer lado es la **base** del triángulo isósceles. Los dos ángulos adyacentes a la base se llaman **ángulos base**.



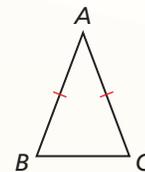
Teoremas

Teorema 5.6 Teorema de los ángulos base

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a ellos son congruentes.

Si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\angle B \cong \angle C$.

Prueba pág. 252

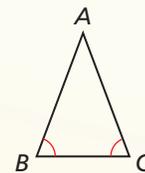


Teorema 5.7 Recíproco del Teorema de los ángulos base

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos son congruentes.

Si $\angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Prueba Ej. 27, pág. 275



PRUEBA Teorema de los ángulos base

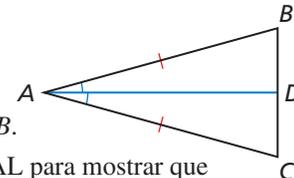
Dado $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Demostrar $\angle B \cong \angle C$

Planea la prueba a. Dibuja \overline{AD} de manera que biseque $\angle CAB$.

b. Utiliza el Teorema de congruencia de LAL para mostrar que $\triangle ADB \cong \triangle ADC$.

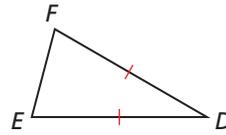
c. Utiliza propiedades de triángulos congruentes para demostrar que $\angle B \cong \angle C$.



Plan en acción	ENUNCIADOS	RAZONES
a.	1. Dibuja \overline{AD} , la bisectriz de ángulo del $\angle CAB$.	1. Construcción de la bisectriz de un ángulo
	2. $\angle CAD \cong \angle BAD$	2. Definición de la bisectriz de un ángulo
	3. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	3. Dado
	4. $\overline{DA} \cong \overline{DA}$	4. Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1)
	5. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$	5. Teorema de congruencia de LAL (Teorema 5.5)
	6. $\angle B \cong \angle C$	6. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

EJEMPLO 1 Utilizar el Teorema de los ángulos base

En $\triangle DEF$, $\overline{DE} \cong \overline{DF}$. Nombra dos ángulos congruentes.



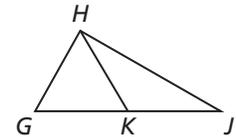
SOLUCIÓN

► $\overline{DE} \cong \overline{DF}$, entonces, según el Teorema de los ángulos base, $\angle E \cong \angle F$.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Copia y completa el enunciado.

1. Si $\overline{HG} \cong \overline{HK}$, entonces $\angle \underline{\hspace{1cm}} \cong \angle \underline{\hspace{1cm}}$.
2. Si $\angle KHJ \cong \angle KJH$, entonces $\underline{\hspace{1cm}} \cong \underline{\hspace{1cm}}$.



Recuerda que un triángulo equilátero tiene tres lados congruentes.

Corolarios

LEER

Los corolarios establecen que un triángulo es *equilátero*, si y sólo si, es *equiángulo*.

Corolario 5.2 Corolario al Teorema de los ángulos base

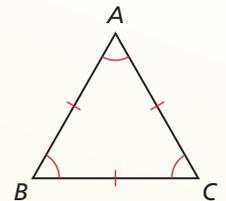
Si un triángulo es equiángulo, entonces, es equilátero.

Prueba Ej. 37, pág. 258; Ej. 10, pág. 353

Corolario 5.3 Corolario al recíproco del Teorema de los ángulos base

Si un triángulo es equilátero, entonces, es equiángulo.

Prueba Ej. 39, pág. 258



EJEMPLO 2 Hallar las medidas en un triángulo

Halla las medidas de $\angle P$, $\angle Q$, y $\angle R$.

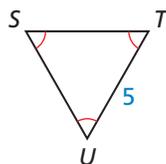
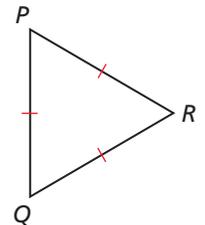
SOLUCIÓN

El diagrama muestra que $\triangle PQR$ es equilátero. Entonces, según el corolario del Teorema de ángulos base, $\triangle PQR$ es equiángulo. Entonces, $m\angle P = m\angle Q = m\angle R$.

$$3(m\angle P) = 180^\circ \quad \text{Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1)}$$

$$m\angle P = 60^\circ \quad \text{Divide cada lado entre 3.}$$

► Las medidas de $\angle P$, $\angle Q$ y $\angle R$ son todas 60° .



Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

3. Halla la longitud de \overline{ST} para el triángulo de la izquierda.

Utilizar triángulos isósceles y equiláteros

CONSTRUCCIÓN

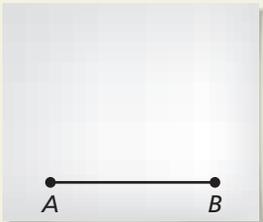
Construir un triángulo equilátero

Construye un triángulo equilátero cuyos lados sean congruentes con \overline{AB} . Utiliza un compás y una regla.



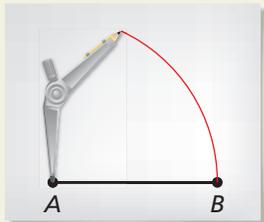
SOLUCIÓN

Paso 1



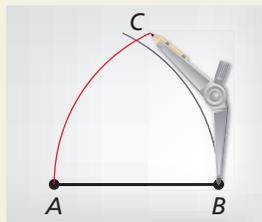
Copia un segmento
Copia \overline{AB} .

Paso 2



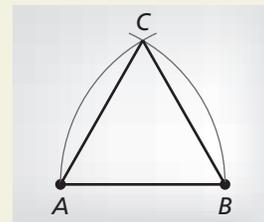
Dibuja un arco Dibuja un arco con un centro A y radio AB .

Paso 3



Dibuja un arco Dibuja un arco con un centro B y radio AB . Rotula la intersección de los arcos de los pasos 2 y 3 como C .

Paso 4

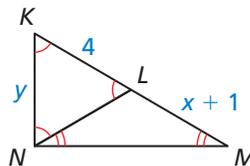


Dibuja un triángulo
Dibuja $\triangle ABC$. Debido que \overline{AB} y \overline{AC} son radios del mismo círculo, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Como \overline{AB} y \overline{BC} son radios del mismo círculo, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Según la propiedad transitiva de la congruencia (Teorema 2.1), $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Entonces, $\triangle ABC$ es equilátero.

EJEMPLO 3

Utilizar triángulos isósceles y equiláteros

Halla los valores de x y y en el diagrama.



ERROR COMÚN

No puedes utilizar N para referirte a $\angle LNM$ porque tres ángulos tienen a N como su vértice.

SOLUCIÓN

Paso 1 Halla el valor de y . Debido a que $\triangle KLN$ es equiángulo, también es equilátero y $\overline{KN} \cong \overline{KL}$. Entonces, $y = 4$.

Paso 2 Halla el valor de x . Debido a que $\angle LNM \cong \angle LMN$, $\overline{LN} \cong \overline{LM}$ y $\triangle LMN$ es un isósceles. También sabes que $LN = 4$ porque $\triangle KLN$ es equilátero.

$$LN = LM$$

Definición de segmentos congruentes

$$4 = x + 1$$

Sustituye 4 por LN y $x + 1$ por LM .

$$3 = x$$

Resta 1 de cada lado.

EJEMPLO 4 Resolver un problema de varios pasos

En la torre de salvavidas, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ y $\angle QPS \cong \angle PQR$.



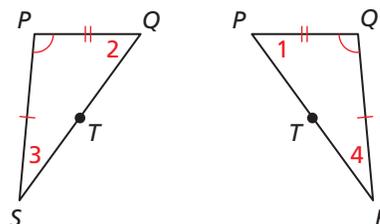
- Explica cómo demuestras que $\triangle QPS \cong \triangle PQR$.
- Explica por qué $\triangle PQT$ es isósceles.

ERROR COMÚN

Cuando redibujes los triángulos de manera que no se solapen, ten cuidado de copiar toda la información y los rótulos correctamente.

SOLUCIÓN

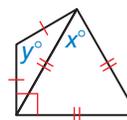
- Dibuja y rotula $\triangle QPS$ y $\triangle PQR$ de manera que no solapen. Puedes ver que $\overline{PQ} \cong \overline{QP}$, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$, y $\angle QPS \cong \angle PQR$. Entonces, según el Teorema de congruencia de LAL (Teorema 5.5), $\triangle QPS \cong \triangle PQR$.



- De la parte (a), sabes que $\angle 1 \cong \angle 2$ porque las partes correspondientes de los triángulos congruentes son congruentes. Por el recíproco del Teorema de los ángulos base, $\overline{PT} \cong \overline{QT}$, y $\triangle PQT$ es isósceles.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

- Halla los valores de x y y en el diagrama.



- En el Ejemplo 4, demuestra que $\triangle PTS \cong \triangle QTR$.

5.4 Ejercicios

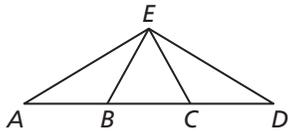
Soluciones dinámicas disponibles en BigIdeasMath.com

Verificación de vocabulario y concepto esencial

- VOCABULARIO** Describe cómo identificar el *ángulo del vértice* de un triángulo isósceles.
- ESCRIBIR** ¿Cuál es la relación entre los ángulos base de un triángulo isósceles? Explica.

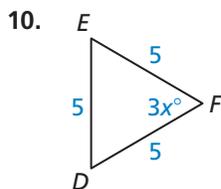
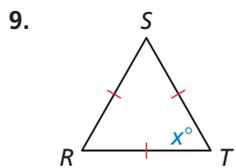
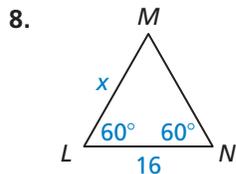
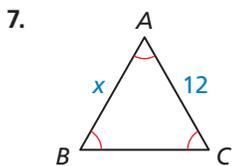
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, copia y completa el enunciado. Indica qué teorema utilizaste. (Consulta el Ejemplo 1).



- Si $\overline{AE} \cong \overline{DE}$, entonces $\angle __ \cong \angle __$.
- Si $\overline{AB} \cong \overline{EB}$, entonces $\angle __ \cong \angle __$.
- Si $\angle D \cong \angle CED$, entonces $__ \cong __$.
- Si $\angle EBC \cong \angle ECB$, entonces $__ \cong __$.

En los Ejercicios 7–10, halla el valor de x . (Consulta el Ejemplo 2).

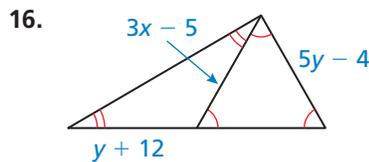
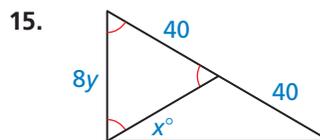
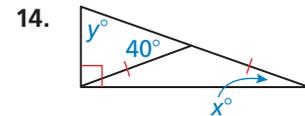
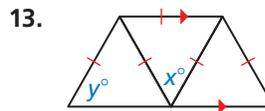


11. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Las dimensiones de un banderín deportivo se dan en el diagrama. Halla los valores x y y .



12. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un logotipo en un anuncio es un triángulo equilátero con un lado de 7 centímetros de longitud. Bosqueja el logotipo y da las medidas de cada lado.

En los Ejercicios 13–16, halla los valores de x y y . (Consulta el Ejemplo 3).



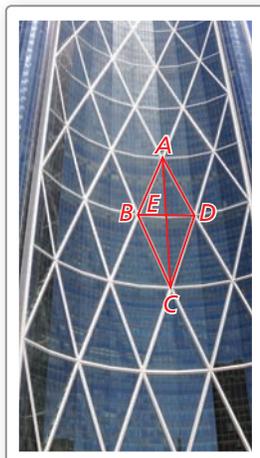
CONSTRUCCIÓN En los Ejercicios 17 y 18, construye un triángulo equilátero cuyos lados sean de la longitud dada.

- 3 pulgadas
- 1.25 pulgadas

19. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al hallar la longitud de \overline{BC} .

20. RESOLVER PROBLEMAS

El diagrama representa parte del exterior de la Bow Tower en Calgary, Alberta, Canadá. En el diagrama, $\triangle ABD$ y $\triangle CBD$ son triángulos equiláteros congruentes. (Consulta el Ejemplo 4.)



- Explica por qué $\triangle ABC$ es isósceles.
- Explica por qué $\angle BAE \cong \angle BCE$.
- Demuestra que $\triangle ABE$ y $\triangle CBE$ son congruentes.
- Halla la medida de $\angle BAE$.

21. HALLAR UN PATRÓN En el patrón mostrado, cada pequeño triángulo es un triángulo equilátero con un área de 1 unidad cuadrada.

- Explica cómo sabes que cualquier triángulo hecho de triángulos equiláteros es equilátero.
- Halla las áreas de los primeros cuatro triángulos en el patrón.
- Describe cualquier patrón en las áreas. Predice el área del séptimo triángulo en el patrón. Explica tu razonamiento.

Triángulo	Área
	1 unidad cuadrada

22. RAZONAR La base del isósceles $\triangle XYZ$ es \overline{YZ} . ¿Qué puedes demostrar? Selecciona todas las opciones aplicables.

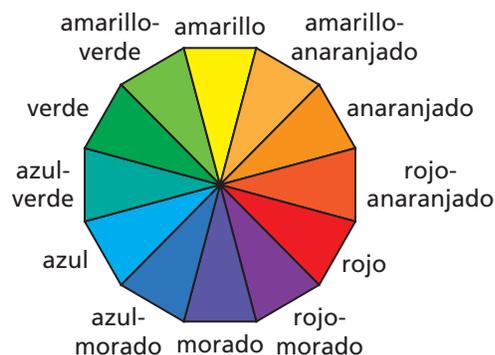
- (A) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (B) $\angle X \cong \angle Y$
 (C) $\angle Y \cong \angle Z$ (D) $\overline{YZ} \cong \overline{ZX}$

En los Ejercicios 23 y 24, halla el perímetro del triángulo.

23.

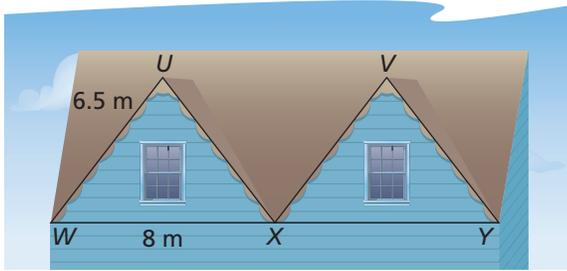
24.

REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS En los Ejercicios 25–28, utiliza el diagrama de la rueda de colores. Los 12 triángulos en el diagrama son triángulos isósceles con ángulos de vértice congruentes.

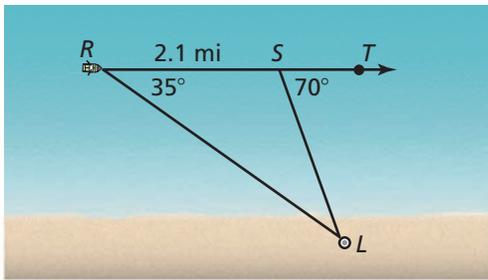


- Los colores complementarios están colocados directamente opuestos a cada uno de los demás en la rueda de colores. Explica cómo sabes que el triángulo amarillo es congruente con el triángulo morado.
- La medida del ángulo de vértice del triángulo amarillo es 30° . Halla las medidas de los ángulos base.
- Traza la rueda de colores. Después forma un triángulo cuyos vértices son los puntos medios de las bases de los triángulos rojo, amarillo y azul. (Estos colores son los *colores primarios*). ¿Qué tipo de triángulo es?
- Puedes formar otros triángulos en la rueda de colores que sean congruentes con el triángulo en el ejercicio 27. Los colores en los vértices de esos triángulos se llaman *triadas*. ¿Cuáles son las triadas posibles?
- PENSAMIENTO CRÍTICO** ¿Los triángulos isósceles siempre son triángulos agudos? Explica tu razonamiento.
- PENSAMIENTO CRÍTICO** ¿Es posible que un triángulo equilátero tenga un ángulo con una medida diferente de 60° ? Explica tu razonamiento.
- CONEXIONES MATEMÁTICAS** Las longitudes de los lados de un triángulo son $3t$, $5t - 12$, y $t + 20$. Halla los valores de t que hacen que el triángulo sea isósceles. Explica tu razonamiento.
- CONEXIONES MATEMÁTICAS** La medida de un ángulo exterior de un triángulo isósceles es x° . Escribe las expresiones que representen las posibles medidas de los ángulos del triángulo en términos de x .
- ESCRIBIR** Explica por qué la medida del ángulo de vértice de un triángulo isósceles debe ser un número par de grados cuando las medidas de todos los ángulos del triángulo son números enteros.

34. **RESOLVER PROBLEMAS** Las caras triangulares de los picos de un techo son triángulos isósceles congruentes con ángulos de vértice U y V .



- a. Nombra dos ángulos congruentes con $\angle WUX$. Explica tu razonamiento.
- b. Halla la distancia entre los puntos U y V .
35. **RESOLVER PROBLEMAS** Un bote viaja paralelo a la costa a lo largo de \overline{RT} . Cuando el bote está en el punto R , el capitán obtiene una medida del ángulo respecto al faro de 35° . Después de que el bote ha viajado 2.1 millas, el capitán mide el ángulo al faro como 70° .

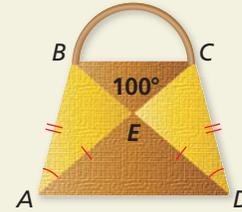


- a. Halla SL . Explica tu razonamiento.
- b. Explica cómo hallar la distancia entre el bote y la costa.

36. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Los postulados y teoremas en este libro representan la geometría Euclidiana. En la geometría esférica, todos los puntos son puntos sobre la superficie de una esfera. Una línea es un círculo sobre la esfera cuyo diámetro es igual al diámetro de la esfera. En la geometría esférica, ¿todos los triángulos equiángulos tienen ángulos de la misma medida? Justifica tu respuesta.

37. **DEMOSTRAR UN COROLARIO** Demuestra que el corolario al Teorema de los ángulos base (Corolario 5.2) se desprende del Teorema de los ángulos base (Teorema 5.6).

38. **¿CÓMO LO VES?** Estás diseñando bolsos de tela para vender en la feria escolar.

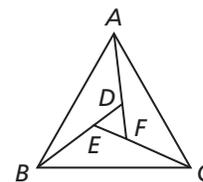


- a. Explica porqué $\triangle ABE \cong \triangle DCE$.
- b. Nombra los triángulos isósceles en el bolso.
- c. Nombra los tres ángulos que sean congruentes con $\angle EAD$.

39. **DEMOSTRAR UN COROLARIO** Demuestra que el corolario al recíproco del Teorema de los ángulos base (Corolario 5.3) se desprende del recíproco del Teorema de los ángulos base (Teorema 5.7).

40. **ARGUMENTAR** Las coordenadas de dos puntos son $T(0, 6)$ y $U(6, 0)$. Tu amigo afirma que los puntos T , U y V siempre serán los vértices de un triángulo isósceles cuando V es un punto en la línea $y = x$. ¿Tiene razón tu amigo? Explica tu razonamiento.

41. **PRUEBA** Utiliza el diagrama para demostrar que $\triangle DEF$ es equilátero.



Dado $\triangle ABC$ es equilátero.
 $\angle CAD \cong \angle ABE \cong \angle BCF$

Demostrar $\triangle DEF$ es equilátero.

Mantener el dominio de las matemáticas Reparar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Utiliza la propiedad dada para completar el enunciado. (Sección 2.5)

42. Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1): $\underline{\hspace{2cm}} \cong \overline{SE}$
43. Propiedad simétrica de la congruencia (Teorema 2.1): Si $\underline{\hspace{2cm}} \cong \underline{\hspace{2cm}}$, entonces $\overline{RS} \cong \overline{JK}$.
44. Propiedad transitiva de la congruencia (Teorema 2.1): Si $\overline{EF} \cong \overline{PQ}$, y $\overline{PQ} \cong \overline{UV}$, entonces $\underline{\hspace{2cm}} \cong \underline{\hspace{2cm}}$.

5.1–5.4 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

ángulos interiores, *pág.* 233
ángulos exteriores, *pág.* 233
corolario a un teorema, *pág.* 235
partes correspondientes, *pág.* 240

catetos (de un triángulo isósceles), *pág.* 252
ángulo del vértice (de un triángulo isósceles), *pág.* 252
base (de un triángulo isósceles), *pág.* 252
ángulos base (de un triángulo isósceles), *pág.* 252

Conceptos Esenciales

Clasificar triángulos según sus lados, *pág.* 232
Clasificar triángulos según sus ángulos, *pág.* 232
Teorema 5.1 Teorema de la suma del triángulo, *pág.* 233
Teorema 5.2 Teorema del ángulo exterior, *pág.* 234
Corolario 5.1 Corolario al Teorema de la suma del triángulo, *pág.* 235
Identificar y utilizar partes correspondientes, *pág.* 240
Teorema 5.3 Propiedades de la congruencia de triángulos, *pág.* 241

Teorema 5.4 Teorema de los terceros ángulos, *pág.* 242
Teorema 5.5 Teorema de congruencia de lado-ángulo-lado (LAL), *pág.* 246
Teorema 5.6 Teorema de los ángulos base, *pág.* 252
Teorema 5.7 Recíproco del Teorema de los ángulos base, *pág.* 252
Corolario 5.2 Corolario al Teorema de los ángulos base, *pág.* 253
Corolario 5.3 Corolario al recíproco del Teorema de los ángulos base, *pág.* 253

Prácticas matemáticas

1. En el Ejercicio 37 de la página 237, ¿qué información se te proporciona? ¿Qué relaciones están presentes? ¿Cuál es tu meta?
2. Explica las relaciones presentes en el Ejercicio 23 de la página 244.
3. Describe al menos tres diferentes patrones creados utilizando triángulos para la foto en el Ejercicio 20 de la página 257.

Destrezas de estudio

Aprendizaje visual

Haz un dibujo de un problema de palabras.

- Haz un dibujo de un problema de palabras antes de comenzar a resolver el problema. No tienes que ser un artista para hacerlo.
- Al hacer una tarjeta de repaso para un problema de palabras, incluye un dibujo. Esto te ayudará a recordar la información al responder tu examen.
- Asegúrate de que tus notas se vean ordenadas para que sean fáciles de recordar.



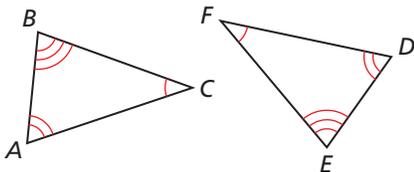
5.1–5.4 Prueba

Halla la medida del ángulo exterior. (Sección 5.1)

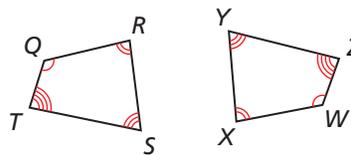
-
-
-

Identifica todos los pares de las partes correspondientes congruentes. Después escribe otro enunciado de congruencia para los polígonos. (Sección 5.2)

4. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

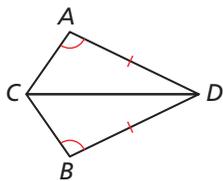


5. $QRST \cong WXYZ$

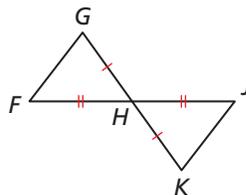


Determina si se proporciona suficiente información para demostrar que los triángulos son congruentes utilizando el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5). Si es así, escribe una prueba. Si no, explica por qué. (Sección 5.3)

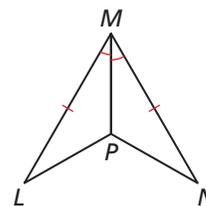
6. $\triangle CAD, \triangle CBD$



7. $\triangle GHF, \triangle KHJ$

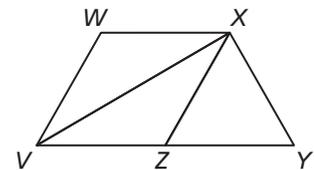


8. $\triangle LMP, \triangle NMP$



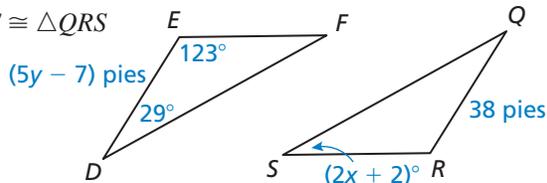
Copia y completa el enunciado. Indica el teorema que utilizaste. (Sección 5.4)

- Si $VW \cong WX$, entonces $\angle _ \cong \angle _$.
- Si $XZ \cong XY$, entonces $\angle _ \cong \angle _$.
- Si $\angle ZVX \cong \angle ZXV$, entonces $_ \cong _$.
- Si $\angle XYZ \cong \angle ZXY$, entonces $_ \cong _$.

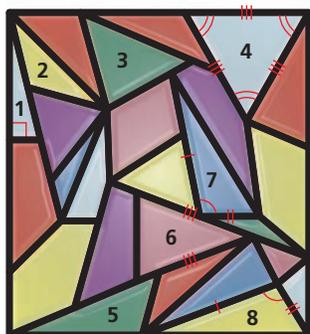
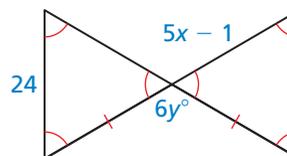


Halla los valores de x y y . (Sección 5.2 y Sección 5.4)

13. $\triangle DEF \cong \triangle QRS$



14.



- En un triángulo rectángulo, la medida de un ángulo agudo es 4 veces la diferencia de la medida del otro ángulo agudo y 5. Halla la medida de cada ángulo agudo en el triángulo. (Sección 5.1)
- La figura muestra un vitral. (Sección 5.1 y Sección 5.3)
 - Clasifica los triángulos 1–4 según sus ángulos.
 - Clasifica los triángulos 4–6 según sus lados.
 - ¿Se proporciona suficiente información para demostrar que $\triangle 7 \cong \triangle 8$? Si es así, rotula los vértices y escribe una prueba. Si no, determina qué información adicional se necesita.

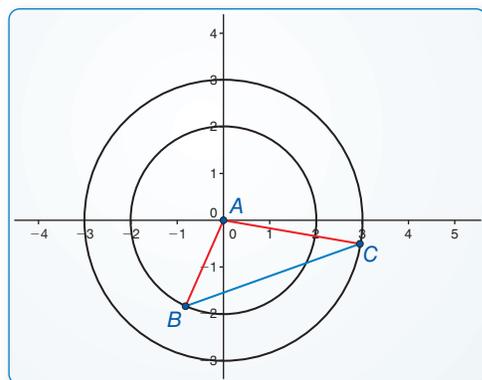
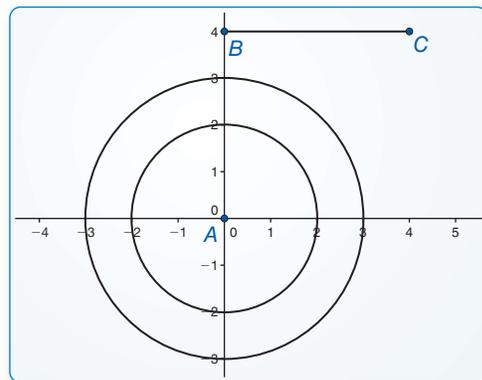
5.5 Demostrar congruencia de triángulos con LLL

Pregunta esencial ¿Qué puedes concluir acerca de dos triángulos cuando sabes que los lados correspondientes son congruentes?

EXPLORACIÓN 1 Dibujar triángulos

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica.

- Construye círculos con radio de 2 y 3 unidades centrados en el origen. Rotula el origen como A . Después traza \overline{BC} de 4 unidades de longitud.
- Mueve \overline{BC} de manera que B esté en el círculo más pequeño y C en el círculo mayor. Después traza $\triangle ABC$.
- Explica por qué las longitudes de los lados de $\triangle ABC$ son 2, 3 y 4 unidades.
- Halla $m\angle A$, $m\angle B$, y $m\angle C$.
- Repite las partes (b) y (d) varias veces, moviendo \overline{BC} a diferentes posiciones. Copia y completa la siguiente tabla para llevar un registro de tus resultados. ¿Qué puedes concluir?



USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas usar la tecnología como una ayuda para visualizar los resultados de diferentes presuposiciones, explorar consecuencias y comparar las predicciones con los datos.



	A	B	C	AB	AC	BC	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$
1.	(0, 0)			2	3	4			
2.	(0, 0)			2	3	4			
3.	(0, 0)			2	3	4			
4.	(0, 0)			2	3	4			
5.	(0, 0)			2	3	4			

Comunicar tu respuesta

- ¿Qué puedes concluir sobre dos triángulos cuando sabes que los lados correspondientes son congruentes?
- ¿Cómo demostrarías tu conclusión en la Exploración 1(e)?

5.5 Lección

Vocabulario Esencial

catetos, pág 264
hipotenusa, pág. 264

Anterior

figuras congruentes
movimiento rígido

Qué aprenderás

- ▶ Utilizar el Teorema de congruencia lado-lado-lado (LLL).
- ▶ Utilizar el Teorema de congruencia hipotenusa-cateto (HC).

Utilizar el Teorema de congruencia lado-lado-lado (LLL)

Teorema

Teorema 5.8 Teorema de congruencia lado-lado-lado (LLL)

Si tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces, los dos triángulos son congruentes.

Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

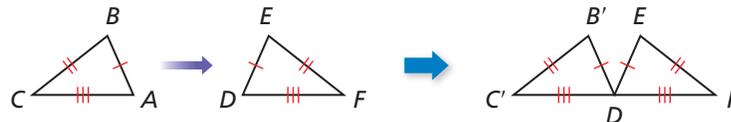


PRUEBA Teorema de congruencia lado-lado-lado (LLL)

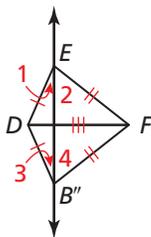
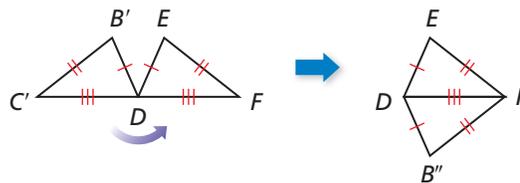
Dado $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Primero, traslada $\triangle ABC$ de manera que el punto A mapee el punto D , como se muestra a continuación.



Esta traslación mapea $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DB'C'$. Después, rota $\triangle DB'C'$ en sentido contrario a las manecillas del reloj a través de $\angle C'DF$ de manera que la imagen de $\overline{DC'}$ coincida con \overline{DF} , como se muestra a continuación.



Debido a que $\overline{DC'} \cong \overline{DF}$, la rotación mapea el punto C' respecto al punto F . Entonces, esta rotación mapea $\triangle DB'C'$ respecto a $\triangle DB''F$. Traza una línea auxiliar a través de los puntos E y B'' . Esta línea crea $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$, como se muestra a la izquierda.

Debido a que $\overline{DE} \cong \overline{DB''}$, $\triangle DEB''$ es un triángulo isósceles. Como $\overline{FE} \cong \overline{FB''}$, $\triangle FEB''$ es un triángulo isósceles. Según el Teorema de los ángulos base (Teorema 5.6), $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 2 \cong \angle 4$. Según la definición de la congruencia, $m\angle 1 = m\angle 3$ y $m\angle 2 = m\angle 4$. Por interpretación, $m\angle DEF = m\angle 1 + m\angle 2$ y $m\angle DB''F = m\angle 3 + m\angle 4$. Ahora puedes utilizar la propiedad de igualdad de la sustitución para demostrar que $m\angle DEF = m\angle DB''F$.

$$\begin{aligned} m\angle DEF &= m\angle 1 + m\angle 2 \\ &= m\angle 3 + m\angle 4 \\ &= m\angle DB''F \end{aligned}$$

Postulado de la suma de ángulos (Postulado 1.4)

Sustituye $m\angle 3$ por $m\angle 1$ y $m\angle 4$ por $m\angle 2$.

Postulado de la suma de ángulos (Postulado 1.4)

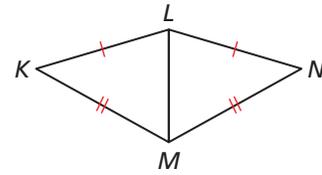
Según la definición de la congruencia, $\angle DEF \cong \angle DB''F$. Entonces, dos pares de lados y sus ángulos incluidos son congruentes. Según el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5), $\triangle DB''F \cong \triangle DEF$. Entonces, una composición de movimientos rígidos mapea $\triangle DB''F$ respecto a $\triangle DEF$. Debido a que una composición de movimientos rígidos mapea $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DB''F$ y una composición de movimientos rígidos mapea a $\triangle DB''F$ respecto a $\triangle DEF$, una composición de movimientos rígidos mapea $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$. Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

EJEMPLO 1 Utilizar el Teorema de congruencia LLL

Escribe una prueba.

Dado $\overline{KL} \cong \overline{NL}$, $\overline{KM} \cong \overline{NM}$

Demostrar $\triangle KLM \cong \triangle NLM$



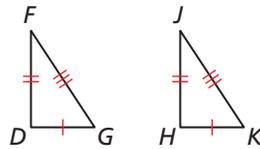
SOLUCIÓN

ENUNCIADOS	RAZONES
L 1. $\overline{KL} \cong \overline{NL}$	1. Dado
L 2. $\overline{KM} \cong \overline{NM}$	2. Dado
L 3. $\overline{LM} \cong \overline{LM}$	3. Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1)
4. $\triangle KLM \cong \triangle NLM$	4. Teorema de congruencia LLL

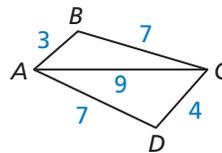
Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Determina si el enunciado de congruencia es verdadero. Explica tu razonamiento.

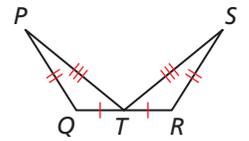
1. $\triangle DFG \cong \triangle HJK$



2. $\triangle ACB \cong \triangle CAD$

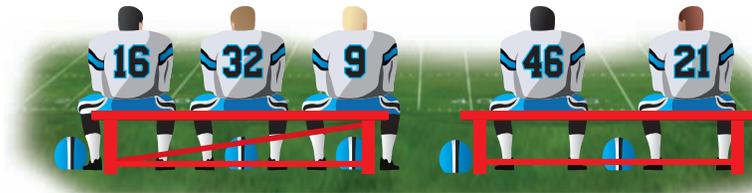


3. $\triangle QPT \cong \triangle RST$



EJEMPLO 2 Resolver un problema de la vida real

Explica por qué la banca con el soporte diagonal es estable, mientras la otra sin el soporte podría colapsar.

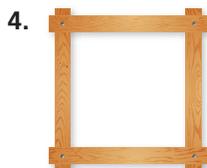


SOLUCIÓN

La banca con el soporte diagonal forma triángulos con longitudes laterales fijas. Según el Teorema de congruencia LLL, estos triángulos no pueden cambiar de forma, por lo que la banca es estable. La banca sin el soporte diagonal no es estable porque hay muchos cuadriláteros posibles con las longitudes laterales dadas.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

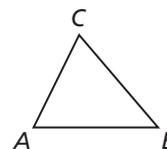
Determina si la figura es estable. Explica tu razonamiento.



CONSTRUCCIÓN

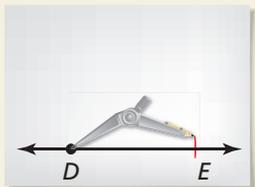
Copiar un triángulo usando LLL

Construye un triángulo que sea congruente con $\triangle ABC$ usando el Teorema de congruencia LLL. Utiliza un compás y una regla.



SOLUCIÓN

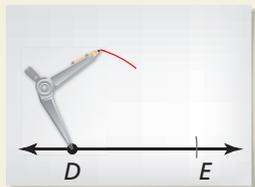
Paso 1



Construye un lado

Construye \overline{DE} de manera que sea congruente con \overline{AB} .

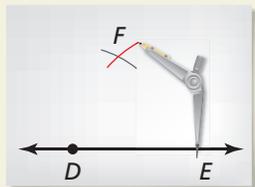
Paso 2



Traza un arco

Abre tu compás a la longitud de AC . Utiliza esta longitud para trazar un arco con centro D .

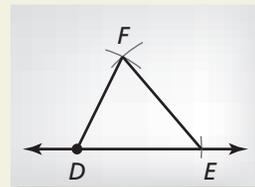
Paso 3



Traza un arco

Traza un arco con radio BC y centro E que interseque el arco del paso 2. Rotula la intersección como punto F .

Paso 4



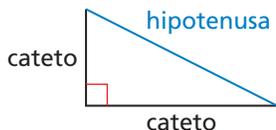
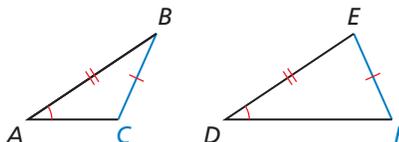
Traza un triángulo

Traza $\triangle DEF$. Según el Teorema de congruencia LLL, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Utilizar el Teorema de congruencia hipotenusa-cateto

Sabes que LAL y LLL son métodos valiosos para demostrar que los triángulos son congruentes. ¿Qué sucede con LLA?

En general, LLA *no* es un método válido para demostrar que los triángulos son congruentes. En los triángulos siguientes, dos pares de lados y un par de ángulos no incluidos entre ellos son congruentes, pero los triángulos no son congruentes.



Si bien, en general, LLA no es válido, hay una excepción para los triángulos rectos.

En un triángulo rectángulo, los lados adyacentes al ángulo recto se denominan **catetos**. El lado opuesto al ángulo recto se denomina la **hipotenusa** del triángulo rectángulo.

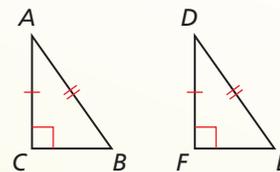
Teorema

Teorema 5.9 Teorema de congruencia hipotenusa-cateto (HC)

Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces, los dos triángulos son congruentes.

Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $m\angle C = m\angle F = 90^\circ$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Prueba Ej. 38, pág. 470; BigIdeasMath.com



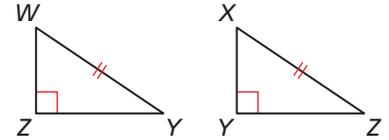
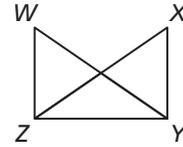
EJEMPLO 3

Utilizar el Teorema de congruencia hipotenusa-cateto

Escribe una prueba.

Dado $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$, $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$, $\overline{XY} \perp \overline{ZY}$

Demostrar $\triangle WYZ \cong \triangle XZY$

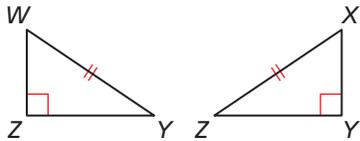


SOLUCIÓN

Redibuja los triángulos de manera que uno al lado del otro y sus partes correspondientes en la misma posición. Marca la información en el diagrama.

CONSEJO DE ESTUDIO

Si tienes problemas para hacer coincidir los vértices con las letras al separar los ángulos solapados, deja los triángulos en sus orientaciones originales.



ENUNCIADOS

- H**
- $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$
 - $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$, $\overline{XY} \perp \overline{ZY}$
 - $\angle Z$ y $\angle Y$ son ángulos rectos.
 - $\triangle WYZ$ y $\triangle XZY$ son triángulos rectos.
- C**
- $\overline{ZY} \cong \overline{ZY}$
 - $\triangle WYZ \cong \triangle XZY$

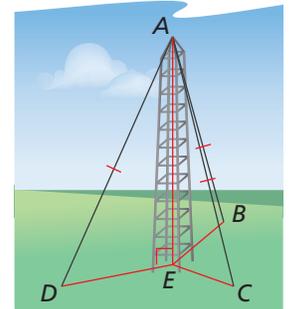
RAZONES

- Dado
- Dado
- Definición de las líneas \perp
- Definición del triángulo rectángulo
- Propiedad reflexiva de congruencia (Teorema 2.1)
- Teorema de congruencia HC

EJEMPLO 4

Utilizar el Teorema de congruencia hipotenusa-cateto

La antena de televisión es perpendicular al plano que contiene los puntos, B , C , D , y E . Cada uno de los cables que van de la parte superior de la antena a B , C , y D tiene la misma longitud. Demuestra que $\triangle AEB$, $\triangle AEC$, y $\triangle AED$ son congruentes.



Dado $\overline{AE} \perp \overline{EB}$, $\overline{AE} \perp \overline{EC}$, $\overline{AE} \perp \overline{ED}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{AD}$

Demostrar $\triangle AEB \cong \triangle AEC \cong \triangle AED$

SOLUCIÓN

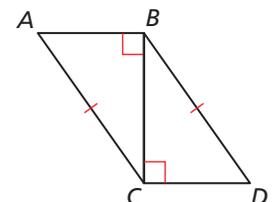
Sabes que $\overline{AE} \perp \overline{EB}$ y $\overline{AE} \perp \overline{EC}$. Entonces, $\angle AEB$ y $\angle AEC$ son ángulos rectos según la definición de líneas perpendiculares. Por definición, $\triangle AEB$ y $\triangle AEC$ son triángulos rectos. Sabes que las hipotenusas de estos dos triángulos, \overline{AB} y \overline{AC} , son congruentes. También que, \overline{AE} es un cateto de ambos triángulos, y que $\overline{AE} \cong \overline{AE}$ según la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1). Entonces, según el Teorema de congruencia hipotenusa-cateto, $\triangle AEB \cong \triangle AEC$. Puedes utilizar un razonamiento similar para demostrar que $\triangle AEC \cong \triangle AED$.

- Entonces, según la propiedad transitiva de la congruencia de triángulos (Teorema 5.3), $\triangle AEB \cong \triangle AEC \cong \triangle AED$.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

Utiliza el diagrama.

- Redibuja $\triangle ABC$ y $\triangle DCB$ lado a lado con las partes correspondientes en la misma posición.
- Utiliza la información del diagrama para demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

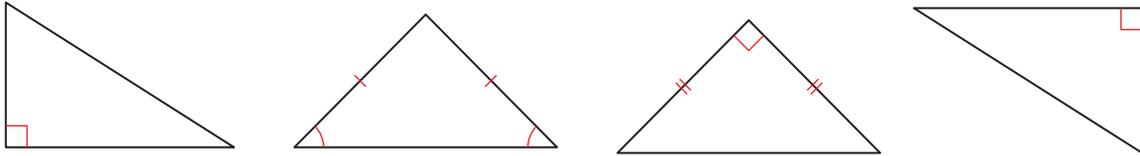


5.5 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en BigIdeasMath.com

Verificación de vocabulario y concepto esencial

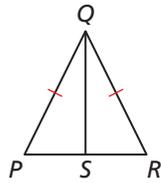
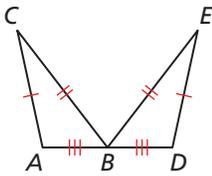
- COMPLETAR LA ORACIÓN** El lado opuesto del ángulo recto se llama _____ del triángulo rectángulo.
- ¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Cuáles catetos del triángulo *no* pertenecen a los otros tres? Explica tu razonamiento.



Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

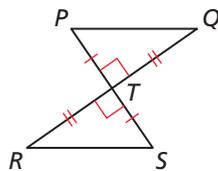
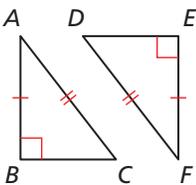
En los Ejercicios 3 y 4, determina si se ha proporcionado la información suficiente para demostrar que los triángulos son congruentes usando el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8). Explica.

- $\triangle ABC, \triangle DBE$
- $\triangle PQS, \triangle RQS$



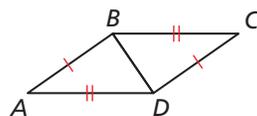
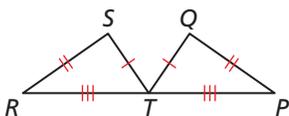
En los Ejercicios 5 y 6, determina si se ha proporcionado la información suficiente para demostrar que los triángulos son congruentes mediante el Teorema de congruencia HC (Teorema 5.9). Explica.

- $\triangle ABC, \triangle FED$
- $\triangle PQT, \triangle SRT$

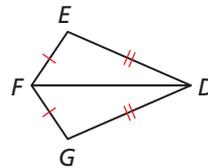


En los Ejercicios 7–10, determina si el enunciado de congruencia es verdadero. Explica tu razonamiento. (Consulta el Ejemplo 1).

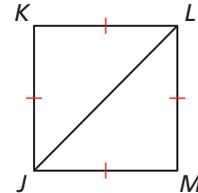
- $\triangle RST \cong \triangle TQP$
- $\triangle ABD \cong \triangle CDB$



- $\triangle DEF \cong \triangle DGF$



- $\triangle JKL \cong \triangle LJM$



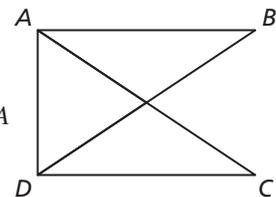
En los Ejercicios 11 y 12, determina si la figura es estable. Explica tu razonamiento. (Consulta el Ejemplo 2).



En los Ejercicios 13 y 14, redibuja los triángulos de manera que estén lado a lado con las partes correspondientes en la misma posición. Después escribe una prueba. (Consulta el Ejemplo 3).

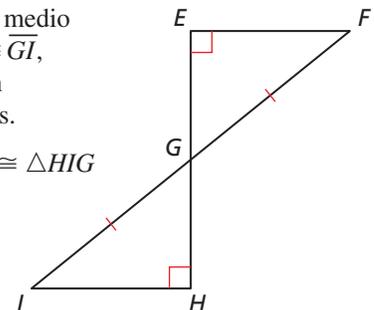
- Dado $\overline{AC} \cong \overline{BD}$,
 $\overline{AB} \perp \overline{AD}$,
 $\overline{CD} \perp \overline{AD}$

Demostrar $\triangle BAD \cong \triangle CDA$



- Dado G es el punto medio de \overline{EH} , $\overline{FG} \cong \overline{GI}$,
 $\angle E$ y $\angle H$ son ángulos rectos.

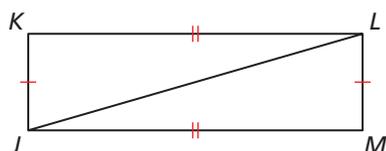
Demostrar $\triangle EFG \cong \triangle HIG$



En los Ejercicios 15 y 16, escribe una prueba.

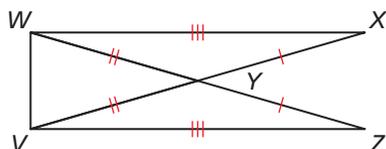
15. Dado $\overline{LM} \cong \overline{JK}$, $\overline{MJ} \cong \overline{KL}$

Demostrar $\triangle LMJ \cong \triangle JKL$



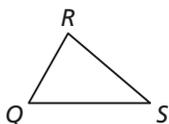
16. Dado $\overline{WX} \cong \overline{VZ}$, $\overline{WY} \cong \overline{VY}$, $\overline{YZ} \cong \overline{YX}$

Demostrar $\triangle VWX \cong \triangle WVZ$

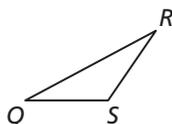


CONSTRUCCIÓN En los Ejercicios 17 y 18, construye un triángulo que sea congruente con $\triangle QRS$ mediante el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8).

17.



18.



19. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al identificar triángulos congruentes.

X

$\triangle TUV \cong \triangle XYZ$ según el Teorema de congruencia LLL.

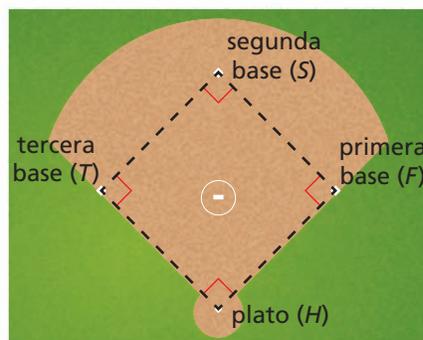
20. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al determinar el valor de x que haga que los triángulos sean congruentes.

X

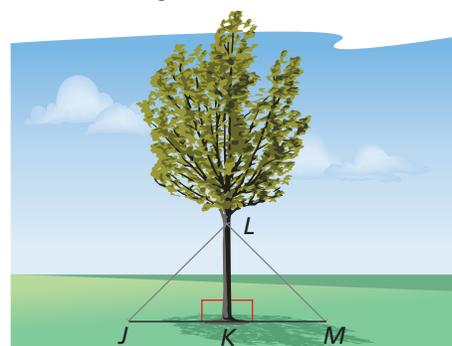
$6x = 2x + 1$
 $4x = 1$
 $x = \frac{1}{4}$

21. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que para demostrar por medio del Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8) que dos triángulos son congruentes, ambos triángulos deben ser triángulos equiláteros. ¿Tiene razón tu amigo? Explica tu razonamiento.

22. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Las distancias entre las bases consecutivas de un campo de softbol son iguales. La distancia del home a la segunda base es la misma que la distancia de la primera base a la tercera base. Los ángulos creados en cada base miden 90° . Demuestra que $\triangle HFS \cong \triangle FST \cong \triangle STH$. (Consulta el Ejemplo 4).

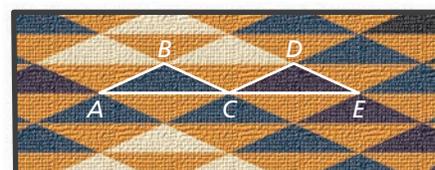


23. **RAZONAR** Para sujetar un árbol, amarras cables del tronco del árbol a estacas clavadas en el suelo, como se muestra en el diagrama.



- ¿Qué información adicional necesitas para usar el Teorema de congruencia HC (Teorema 5.9) para demostrar que $\triangle JKL \cong \triangle MKL$?
- Supón que K es el punto medio de JM . Nombra un teorema que puedas utilizar para demostrar que $\triangle JKL \cong \triangle MKL$. Explica tu razonamiento.

24. **RAZONAR** Utiliza la foto del tapete navajo, donde $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{CE}$.



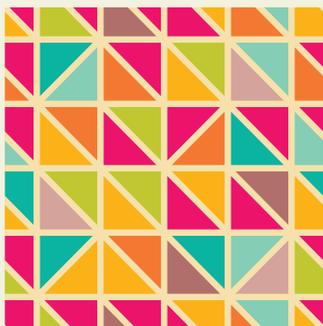
- ¿Qué información adicional necesitas para utilizar el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8) para demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle CDE$?
- ¿Qué información adicional necesitas para utilizar el Teorema de congruencia HC (Teorema 5.9) para demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle CDE$?

En los Ejercicios 25–28, utiliza las coordenadas dadas para determinar si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

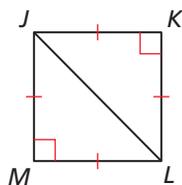
25. $A(-2, -2), B(4, -2), C(4, 6), D(5, 7), E(5, 1), F(13, 1)$
26. $A(-2, 1), B(3, -3), C(7, 5), D(3, 6), E(8, 2), F(10, 11)$
27. $A(0, 0), B(6, 5), C(9, 0), D(0, -1), E(6, -6), F(9, -1)$
28. $A(-5, 7), B(-5, 2), C(0, 2), D(0, 6), E(0, 1), F(4, 1)$

29. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Observas dos triángulos en el mosaico del piso del lobby de un hotel. Deseas determinar si los triángulos son congruentes, pero sólo tienes un trozo de cinta. ¿Puedes determinar si los triángulos son congruentes? Explica.

30. **¿CÓMO LO VES?** Hay varios teoremas que puedes utilizar para demostrar que los triángulos en el patrón “cuadrado” son congruentes. Nombra dos de ellos.



31. **ARGUMENTAR** Tu primo te dice que $\triangle JKL$ es congruente con $\triangle LMJ$ según el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8). Tu amigo dice que $\triangle JKL$ es congruente con $\triangle LMJ$ según el Teorema de congruencia HC (Teorema 5.9). ¿Quién tiene razón? Explica tu razonamiento.



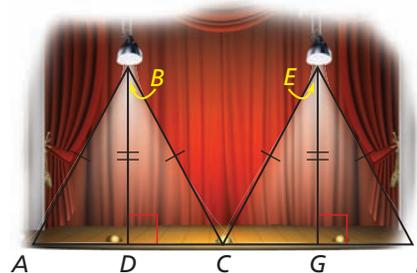
32. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Los postulados y teoremas en este libro representan la geometría Euclidiana. En la geometría esférica, todos los puntos están sobre la superficie de una esfera. Una línea es un círculo sobre la esfera cuyo diámetro es igual al diámetro de la esfera. En geometría esférica, ¿piensas que dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son correspondientes? Justifica tu respuesta.

USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 33 y 34, utiliza la información dada para dibujar $\triangle LMN$ y $\triangle STU$. Marca los triángulos con la información dada.

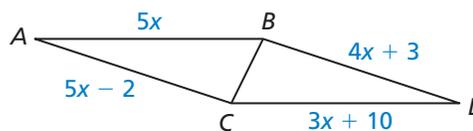
33. $\overline{LM} \perp \overline{MN}, \overline{ST} \perp \overline{TU}, \overline{LM} \cong \overline{NM} \cong \overline{UT} \cong \overline{ST}$

34. $\overline{LM} \perp \overline{MN}, \overline{ST} \perp \overline{TU}, \overline{LM} \cong \overline{ST}, \overline{LN} \cong \overline{SU}$

35. **PENSAMIENTO CRÍTICO** El diagrama muestra la luz emitida por dos reflectores. Ambos reflectores están a la misma distancia del escenario.



- a. Demuestra que $\triangle ABD \cong \triangle CBD$. Indica qué teorema o postulado utilizaste y explica tu razonamiento.
 - b. ¿Los cuatro triángulos rectos mostrados en el diagrama son congruentes? Explica tu razonamiento.
36. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Halla todos los valores de x que hacen que los triángulos sean congruentes. Explica.

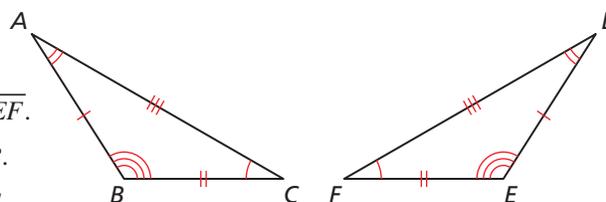


Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Utiliza los triángulos congruentes. (Sección 5.2)

37. Nombra el segmento en $\triangle DEF$ que sea congruente con \overline{AC} .
38. Nombra el segmento en $\triangle ABC$ que sea congruente con \overline{EF} .
39. Nombra el ángulo en $\triangle DEF$ que sea congruente con $\angle B$.
40. Nombra el ángulo en $\triangle ABC$ que sea congruente con $\angle F$.



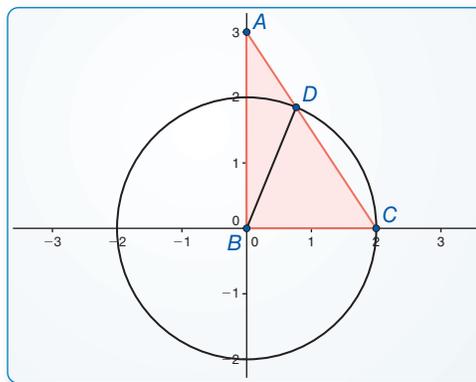
5.6 Demostrar congruencia de triángulos con ALA y AAL

Pregunta esencial ¿Qué información es suficiente para determinar si dos triángulos son congruentes?

EXPLORACIÓN 1 Determinar si LLA es suficiente

Trabaja con un compañero.

- Utiliza un software de geometría dinámica para construir $\triangle ABC$. Construye el triángulo de manera que el vértice B esté en el origen, \overline{AB} tenga una longitud de 3 unidades y \overline{BC} una longitud de 2 unidades.
- Construye un círculo con un radio de 2 unidades centrado en el origen. Localiza el punto D donde el círculo interseque a \overline{AC} . Traza \overline{BD} .



Muestra

- Puntos
 $A(0, 3)$
 $B(0, 0)$
 $C(2, 0)$
 $D(0.77, 1.85)$
- Segmentos
 $AB = 3$
 $AC = 3.61$
 $BC = 2$
 $AD = 1.38$
- Ángulo
 $m\angle A = 33.69^\circ$

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas reconocer y utilizar los contraejemplos.

- $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ tienen dos lados congruentes y un ángulo congruente no incluido. Nómbralos.
- ¿Es $\triangle ABC \cong \triangle ABD$? Explica tu razonamiento.
- ¿Es LLA suficiente para determinar si dos triángulos son congruentes? Explica tu razonamiento.

EXPLORACIÓN 2 Determinar la validez de teoremas de congruencia

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica para determinar cuál de los siguientes teoremas de congruencia de triángulos son válidos. Para los que no sean válidos, escribe un contraejemplo. Explica tu razonamiento.

Posible teorema de congruencia	¿Válido o no?
SSS	
SSA	
SAS	
AAS	
ASA	
AAA	

Comunicar tu respuesta

- ¿Qué información es suficiente para determinar si dos triángulos son congruentes?
- ¿Es posible demostrar que dos triángulos son congruentes utilizando más de un teorema de congruencia? Si es así, da un ejemplo.

5.6 Lección

Qué aprenderás

- ▶ Utilizar los Teoremas de congruencia ALA y AAL.

Vocabulario Esencial

Anterior
figuras congruentes
movimiento rígido

Utilizar los Teoremas de congruencia ALA y AAL

Teorema

Teorema 5.10 Teorema de congruencia ángulo-lado-ángulo (ALA)

Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Si $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle C \cong \angle F$,
entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Prueba pág. 270



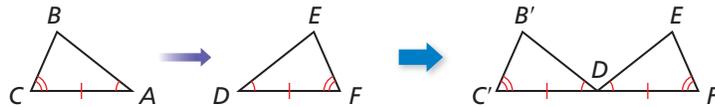
PRUEBA Teorema de congruencia ángulo-lado-ángulo (ALA)

Dado $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$

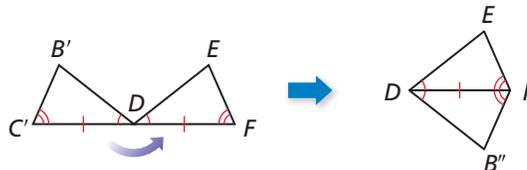
Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



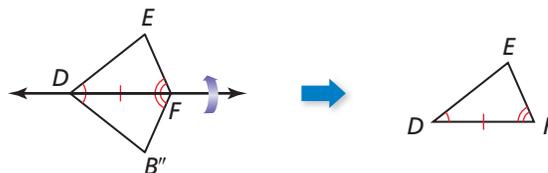
Primero, traslada $\triangle ABC$ de tal manera que el punto A mapee al punto D , como se muestra abajo.



Esta traslación mapea $\triangle ABC$ a $\triangle DB'C'$. Después, rota $\triangle DB'C'$ en sentido contrario a las manecillas del reloj a través de $\angle C'DF$ de manera que la imagen de $\overline{DC'}$ coincida con \overline{DF} , como se muestra a continuación.



Debido a que $\overline{DC'} \cong \overline{DF}$, la rotación mapea el punto C' respecto al punto F . Entonces, esta rotación mapea $\triangle DB'C'$ respecto a $\triangle DB''F$. Ahora, refleja $\triangle DB''F$ en la línea a través de los puntos D y F , como se muestra a continuación.



Debido a que los puntos D y F pertenecen a \overline{DF} , este reflejo los mapea sobre ellos mismos. Debido a que el reflejo preserva la medida de los ángulos y $\angle B''DF \cong \angle EDF$, el reflejo mapea a $\overline{DB''}$ respecto a \overline{DE} . De manera similar, debido a que $\angle B''FD \cong \angle EFD$, el reflejo mapea a $\overline{FB''}$ respecto a \overline{FE} . La imagen de B'' pertenece a \overline{DE} y \overline{FE} . Debido a que \overline{DE} y \overline{FE} sólo tienen el punto E en común, la imagen de B'' debe ser E . Entonces, este reflejo mapea $\triangle DB''F$ respecto a $\triangle DEF$.

Debido a que puedes mapear $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$ utilizando una composición de movimientos rígidos, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

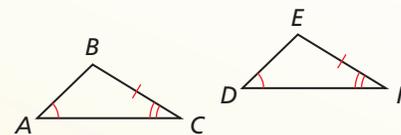
Teorema

Teorema 5.11 Teorema de congruencia ángulo-ángulo-lado (AAL)

Si dos ángulos y un lado no incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente no incluido de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Si $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

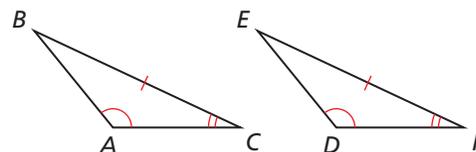
Prueba pág. 271



PRUEBA Teorema de congruencia ángulo-ángulo-lado (AAL)

Dado $\angle A \cong \angle D$,
 $\angle C \cong \angle F$,
 $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

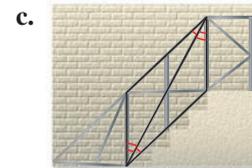
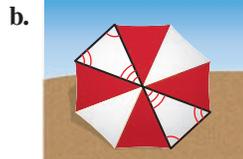
Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



Sabes que $\angle A \cong \angle D$ y $\angle C \cong \angle F$. Según el Teorema de los terceros ángulos (Teorema 5.4), $\angle B \cong \angle E$. También sabes que $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Entonces, dos pares de ángulos y sus lados incluidos son congruentes. Según el Teorema de congruencia ALA, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

EJEMPLO 1 Identificar triángulos congruentes

¿Se puede demostrar que los triángulos son congruentes con la información dada en el diagrama? Si es así, indica el teorema que utilizarías.



ERROR COMÚN

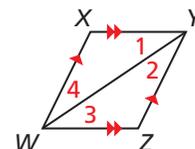
Necesitas al menos un par de lados correspondientes congruentes para demostrar que dos triángulos son congruentes.

SOLUCIÓN

- Los ángulos verticales son congruentes, entonces, dos pares de ángulos y un par de lados no incluidos son congruentes. Los triángulos son congruentes según el Teorema de congruencia AAL.
- No hay suficiente información para demostrar que los triángulos son congruentes, debido a que no se sabe que algún lado sea congruente.
- Dos pares de ángulos y sus lados incluidos son congruentes. Los triángulos son congruentes según el Teorema de congruencia ALA.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

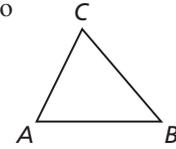
- ¿Se puede demostrar que los triángulos son congruentes con la información dada en el diagrama? Si es así, menciona el teorema que utilizarías.



CONSTRUCCIÓN

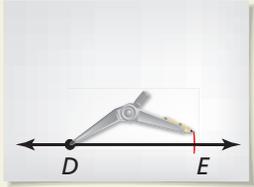
Copiar un triángulo usando ALA

Construye un triángulo que sea congruente con $\triangle ABC$ utilizando el Teorema de congruencia ALA. Utiliza un compás y regla.



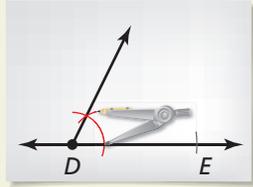
SOLUCIÓN

Paso 1



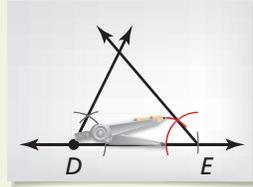
Construye un lado
Construye \overline{DE} de manera que sea congruente con \overline{AB} .

Paso 2



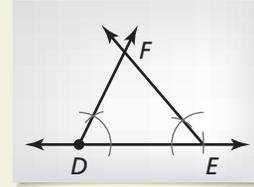
Construye un ángulo
Construye $\angle D$ con vértice D y lado \overline{DE} de manera que sea congruente con $\angle A$.

Paso 3



Construye un ángulo
Construye $\angle E$ con vértice E y lado \overline{ED} de manera que sea congruente con $\angle B$.

Paso 4



Rotula un punto
Rotula la intersección de los lados de $\angle D$ y $\angle E$ que construiste en los pasos 2 y 3 como F . Según el Teorema de congruencia ALA, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

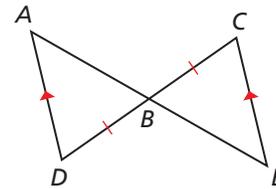
EJEMPLO 2

Utilizar el Teorema de congruencia ALA

Escribe una prueba.

Dado $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$, $\overline{BD} \cong \overline{BC}$

Demostrar $\triangle ABD \cong \triangle EBC$



SOLUCIÓN

ENUNCIADOS

1. $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$
- A 2. $\angle D \cong \angle C$
- L 3. $\overline{BD} \cong \overline{BC}$
- A 4. $\angle ABD \cong \angle EBC$
5. $\triangle ABD \cong \triangle EBC$

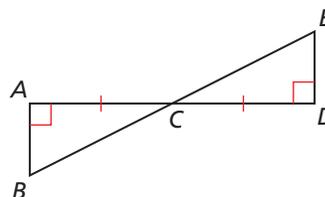
RAZONES

1. Dado
2. Teorema de los ángulos interiores alternos (Teorema 3.2)
3. Dado
4. Teorema de la congruencia de ángulos verticales (Teorema 2.6)
5. Teorema de congruencia ALA

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

2. En el diagrama, $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{DE} \perp \overline{AD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DC}$. Demuestra que $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.



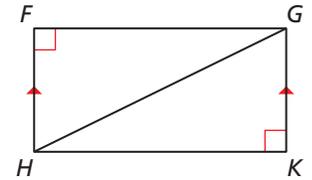
EJEMPLO 3

Utilizar el Teorema de congruencia AAL

Escribe una prueba.

Dado $\overline{HF} \parallel \overline{GK}$, $\angle F$ y $\angle K$ son ángulos rectos.

Demostrar $\triangle HFG \cong \triangle GKH$

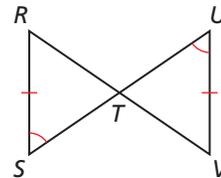


SOLUCIÓN

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\overline{HF} \parallel \overline{GK}$	1. Dado
A 2. $\angle GHF \cong \angle HGK$	2. Teorema de los ángulos interiores alternos (Teorema 3.2)
3. $\angle F$ y $\angle K$ son ángulos rectos.	3. Dado
A 4. $\angle F \cong \angle K$	4. Teorema de la congruencia de ángulos rectos (Teorema 2.3)
L 5. $\overline{HG} \cong \overline{GH}$	5. Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1)
6. $\triangle HFG \cong \triangle GKH$	6. Teorema de congruencia AAL

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

3. En el diagrama, $\angle S \cong \angle U$ y $\overline{RS} \cong \overline{VU}$. Demuestra que $\triangle RST \cong \triangle VUT$.



Resumen de conceptos

Teoremas de congruencia de triángulos

Has aprendido cinco métodos para demostrar que los triángulos son congruentes.

LAL	LLL	HC (solo \triangle derecho)	ALA	AAL
<p>Dos lados y el ángulo incluido son congruentes.</p>	<p>Los 3 lados son congruentes.</p>	<p>La hipotenusa y uno de los catetos son congruentes.</p>	<p>Dos ángulos y el lado incluido son congruentes.</p>	<p>Dos ángulos y un lado no incluido son congruentes.</p>

En los ejercicios, demostrarás tres teoremas adicionales acerca de la congruencia de los triángulos rectos: hipotenusa-ángulo, cateto-cateto y ángulo-cateto.

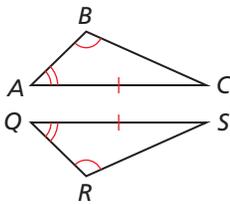
Verificación de vocabulario y concepto esencial

- ESCRIBIR** ¿En qué se parece el Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11) y el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10)? ¿En qué se diferencian?
- ESCRIBIR** Sabes que un par de triángulos tiene dos pares de ángulos correspondientes congruentes. ¿Qué otra información necesitas para demostrar que los triángulos son congruentes?

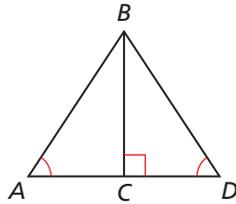
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, determina si la información dada es suficiente para demostrar que los triángulos son congruentes. Si es así, indica el teorema que utilizarías. (Consulta el Ejemplo 1).

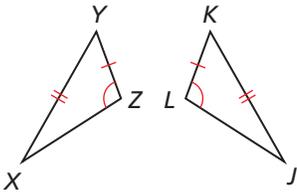
3. $\triangle ABC, \triangle QRS$



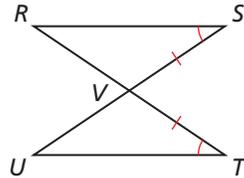
4. $\triangle ABC, \triangle DBC$



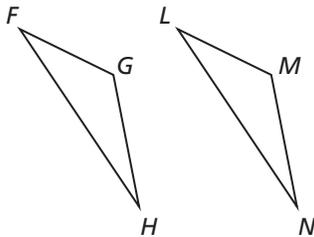
5. $\triangle XYZ, \triangle JKL$



6. $\triangle RSV, \triangle UTV$



En los Ejercicios 7 y 8, indica el tercer enunciado de congruencia necesario para demostrar que $\triangle FGH \cong \triangle LMN$ utilizando el teorema dado.



7. Dado $\overline{GH} \cong \overline{MN}$, $\angle G \cong \angle M$, $\underline{\hspace{1cm}} \cong \underline{\hspace{1cm}}$

Utiliza el Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11).

8. Dado $\overline{FG} \cong \overline{LM}$, $\angle G \cong \angle M$, $\underline{\hspace{1cm}} \cong \underline{\hspace{1cm}}$

Utiliza el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10).

En los Ejercicios 9–12, determina si puedes utilizar la información dada para demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Explica tu razonamiento.

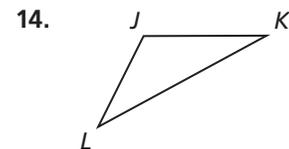
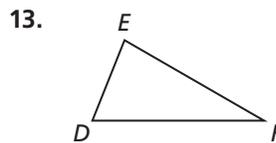
9. $\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle F, \overline{AC} \cong \overline{DF}$

10. $\angle C \cong \angle F, \overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$

11. $\angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F, \overline{AC} \cong \overline{DE}$

12. $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \overline{BC} \cong \overline{EF}$

CONSTRUCCIÓN En los Ejercicios 13 y 14, construye un triángulo que sea congruente con el triángulo dado utilizando el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10). Utiliza un compás y una regla.



ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 15 y 16, describe y corrige el error cometido.

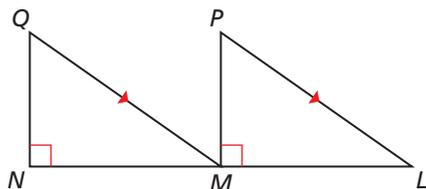
15. $\triangle JKL \cong \triangle FHG$ según el Teorema de congruencia ALA.

16. $\triangle QRS \cong \triangle VWX$ según el Teorema de congruencia AAL.

PRUEBA En los Ejercicios 17 y 18, demuestra que los triángulos son congruentes utilizando el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10). (Consulta el Ejemplo 2).

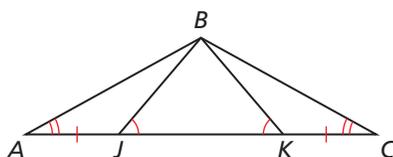
17. Dado M es el punto medio de \overline{NL} .
 $\overline{NL} \perp \overline{NQ}$, $\overline{NL} \perp \overline{MP}$, $\overline{QM} \parallel \overline{PL}$

Demostrar $\triangle NQM \cong \triangle MPL$



18. Dado $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$, $\angle BJK \cong \angle BKJ$, $\angle A \cong \angle C$

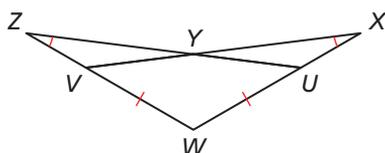
Demostrar $\triangle ABK \cong \triangle CBK$



PRUEBA En los Ejercicios 19 y 20, demuestra que los triángulos son congruentes utilizando el Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11). (Consulta el Ejemplo 3).

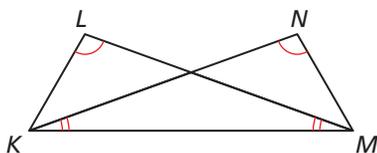
19. Dado $\overline{VW} \cong \overline{UW}$, $\angle X \cong \angle Z$

Demostrar $\triangle XWV \cong \triangle ZWU$



20. Dado $\angle NKM \cong \angle LMK$, $\angle L \cong \angle N$

Demostrar $\triangle NKM \cong \triangle LKM$



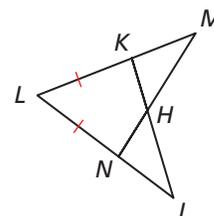
PRUEBA En los Ejercicios 21–23, escribe un párrafo de prueba para el teorema acerca de los triángulos rectos.

21. **Teorema de congruencia hipotenusa-ángulo (HA)**
 Si un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo son congruentes con un ángulo y la hipotenusa de un segundo triángulo rectángulo, entonces, los triángulos son congruentes.
22. **Teorema de congruencia cateto-cateto (CC)**
 Si los catetos de un triángulo rectángulo son congruentes con los catetos de un segundo triángulo rectángulo, entonces, los triángulos son congruentes.

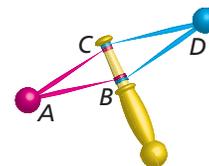
23. **Teorema de congruencia ángulo-cateto (AC)**
 Si un ángulo y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con un ángulo y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

24. **RAZONAR** ¿Qué información adicional necesitas para demostrar que $\triangle JKL \cong \triangle MNL$ según el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10)?

- (A) $\overline{KM} \cong \overline{KJ}$
 (B) $\overline{KH} \cong \overline{NH}$
 (C) $\angle M \cong \angle J$
 (D) $\angle LKJ \cong \angle LNM$



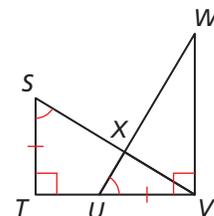
25. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Este juguete contiene $\triangle ABC$ y $\triangle DBC$. ¿Puedes concluir que $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ a partir de las medidas de ángulos dadas? Explica.



$$\begin{aligned} m\angle ABC &= (8x - 32)^\circ \\ m\angle DBC &= (4y - 24)^\circ \\ m\angle BCA &= (5x + 10)^\circ \\ m\angle BCD &= (3y + 2)^\circ \\ m\angle CAB &= (2x - 8)^\circ \\ m\angle CDB &= (y - 6)^\circ \end{aligned}$$

26. **RAZONAR** ¿Cuál de los siguientes enunciados de congruencia son verdaderos? Selecciona todos los aplicables

- (A) $\overline{TU} \cong \overline{UV}$
 (B) $\triangle STV \cong \triangle XVW$
 (C) $\triangle TVS \cong \triangle VWU$
 (D) $\triangle VST \cong \triangle VUW$



27. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Demuestra el recíproco del Teorema de los ángulos base (Teorema 5.7). (Sugerencia: Dibuja una línea auxiliar dentro del triángulo).

28. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma ser capaz de reescribir cualquier prueba que utilice el Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11) como una prueba que utilice el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10). ¿Es esto posible? Explica tu razonamiento.

29. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Cuando un rayo de luz proveniente de un objeto choca contra un espejo, se refleja de vuelta en tu ojo. Por ejemplo, en el diagrama, un rayo de luz proveniente del punto C se refleja en el punto D y regresa al punto A . La ley del reflejo afirma que el ángulo de incidencia, $\angle CDB$, es congruente con el ángulo de reflejo, $\angle ADB$.

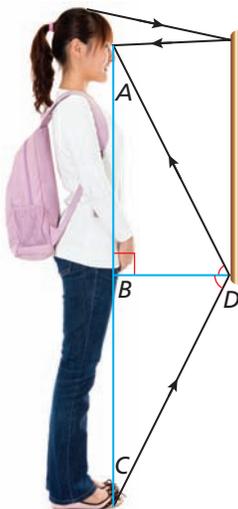
- a. Demuestra que $\triangle ABD$ es congruente con $\triangle CBD$.

Dado $\angle CDB \cong \angle ADB$,
 $\overline{DB} \perp \overline{AC}$

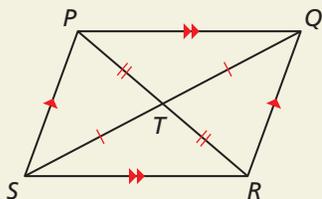
Demostrar

$\triangle ABD \cong \triangle CBD$

- b. Verifica que $\triangle ACD$ es isósceles.
c. ¿Alejarse de un espejo tiene algún efecto en la cantidad que una persona ve de su reflejo? Explica.



30. **¿CÓMO LO VES?** Nombra tantos pares de triángulos congruentes como puedas a partir del diagrama. Explica cómo sabes que cada par de triángulos son congruentes.

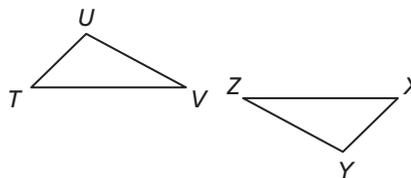


31. **CONSTRUCCIÓN** Construye un triángulo. Demuestra que no hay ninguna regla de congruencia AAA construyendo un segundo triángulo con las mismas medidas de ángulos pero sin ser congruente.

32. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** La teoría de gráficas es una rama de las matemáticas que estudia los vértices y la forma en que éstos están conectados. En la teoría de gráficas, dos polinomios son *isomorfos* si hay un mapa de cada uno de los vértices de un polinomio a los otros vértices del otro polinomio que preserva los vértices adyacentes. En la teoría de gráficas, ¿existen dos triángulos isomorfos? Explica tu razonamiento.

33. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Dados los siguientes seis enunciados acerca de $\triangle TUV$ y $\triangle XYZ$.

$\overline{TU} \cong \overline{XY}$ $\overline{UV} \cong \overline{YZ}$ $\overline{TV} \cong \overline{XZ}$
 $\angle T \cong \angle X$ $\angle U \cong \angle Y$ $\angle V \cong \angle Z$



- a. Haz una lista de todas las combinaciones de los tres enunciados dados que ofrecen suficiente información para demostrar que $\triangle TUV$ es congruente con $\triangle XYZ$.
b. Elige tres enunciados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los enunciados que elegiste ofrezcan suficiente información para demostrar que los triángulos son congruentes?

Mantener el dominio de las matemáticas Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla las coordenadas del punto medio del segmento de línea con los extremos dados. (Sección 1.3)

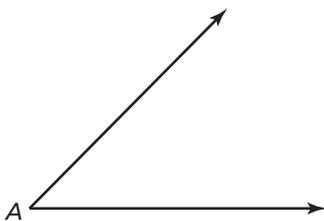
34. $C(1, 0)$ y $D(5, 4)$

35. $J(-2, 3)$ y $K(4, -1)$

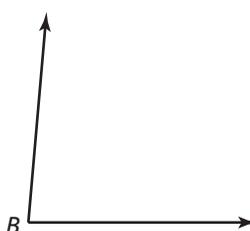
36. $R(-5, -7)$ y $S(2, -4)$

Copia el ángulo usando un compás y una regla. (Sección 1.5)

37.



38.



5.7 Utilizar triángulos congruentes

Pregunta esencial ¿Cómo puedes utilizar triángulos congruentes para hacer una medición indirecta?

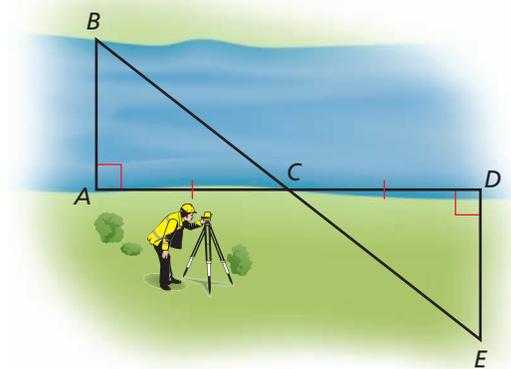
OPINAR SOBRE EL RAZONAMIENTO DE LOS DEMÁS

Para dominar las matemáticas, necesitas escuchar o leer los argumentos de los demás, decidir si son lógicos y hacer preguntas útiles para aclarar o mejorar los argumentos.

EXPLORACIÓN 1 Medir el ancho de un río

Trabaja con un compañero.

La figura muestra cómo puede medir un topógrafo el ancho de un río midiendo sólo un lado.



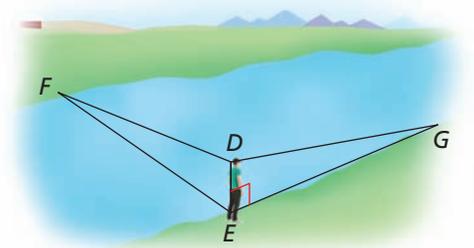
- Estudia la figura. Después, explica cómo puede el topógrafo hallar el ancho del río.
- Escribe una prueba para verificar que el método que describiste en la parte (a) es válido.

Dado $\angle A$ es un ángulo recto, $\angle D$ es un ángulo recto, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

- Intercambia pruebas con tu compañero y discute el razonamiento utilizado.

EXPLORACIÓN 2 Medir el ancho de un río

Trabaja con un compañero. Se reportó que uno de los oficiales de Napoleón estimó el ancho de un río de la siguiente manera. El oficial, situado en la orilla del río, bajó el visor de su gorra hasta que la orilla del otro lado del río fuera el objeto más lejano visible. Después, volteó a un lado y observó el punto a su lado que estaba alineado con la parte superior de su visor y su ojo. El oficial entonces midió la distancia a este punto y concluyó que la distancia era igual al ancho del río.



- Estudia la figura. Después, explica cómo concluyó el oficial que el ancho del río es EG .
- Escribe una prueba que verifique que la conclusión del oficial es correcta.

Dado $\angle DEG$ es un ángulo recto, $\angle DEF$ es un ángulo recto, $\angle EDG \cong \angle EDF$

- Intercambia pruebas con tu compañero y discute el razonamiento utilizado.

Comunicar tu respuesta

- ¿Cómo puedes usar triángulos congruentes para realizar una medición indirecta?
- ¿Por qué crees que los tipos de mediciones descritas en las exploraciones 1 y 2 se conocen como mediciones *indirectas*?

5.7 Lección

Vocabulario Esencial

Anterior

figuras congruentes
partes correspondientes
construcción

Qué aprenderás

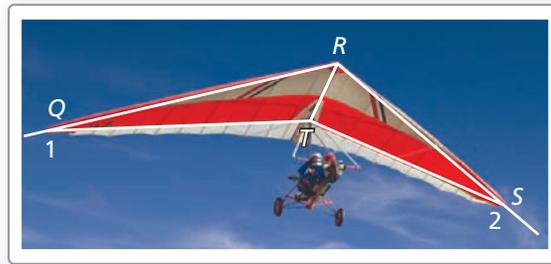
- ▶ Utilizar triángulos congruentes.
- ▶ Demostrar construcciones.

Utilizar triángulos congruentes

Los triángulos congruentes tienen partes correspondientes congruentes. Entonces, si puedes demostrar que dos triángulos son congruentes, sabes que sus partes correspondientes deben ser también congruentes.

EJEMPLO 1 Utilizar triángulos congruentes

Explica cómo puedes usar la información dada para demostrar que las partes del parapente son congruentes.



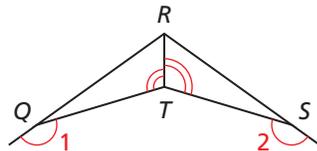
Dado $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle RTQ \cong \angle RTS$

Demostrar $\overline{QT} \cong \overline{ST}$

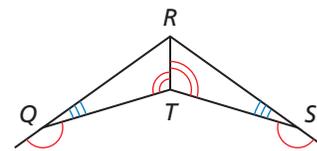
SOLUCIÓN

Si puedes demostrar que $\triangle QRT \cong \triangle SRT$, entonces sabrás que $\overline{QT} \cong \overline{ST}$. Primero, copia el diagrama y marca la información dada. Después, marca la información que puedas deducir. En este caso, $\angle RQT$ y $\angle RST$ son suplementarios a los ángulos congruentes, de manera que $\angle RQT \cong \angle RST$. Además, $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ según la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1).

Marca la información dada.



Marca la información deducida.

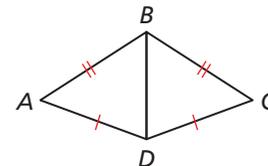


Dos pares de ángulos y un lado no incluido son congruentes, entonces, según el Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11), $\triangle QRT \cong \triangle SRT$.

- ▶ Debido a que las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes, $\overline{QT} \cong \overline{ST}$.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

1. Explica cómo puedes demostrar que $\angle A \cong \angle C$.

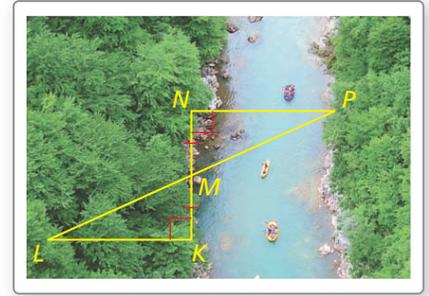


EJEMPLO 2**Utilizar triángulos congruentes para las mediciones****DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS**

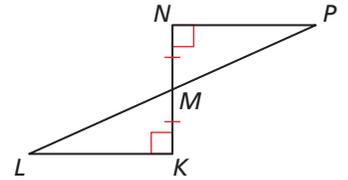
Cuando no puedas medir directamente una longitud, puedes sacar conclusiones *indirectas* acerca de la longitud, por lo general, mediante cálculos basados en las longitudes conocidas.

Utiliza el siguiente método para hallar la distancia a través del río, del punto N al punto P .

- Coloca una estaca en K en el lado cercano, de manera que $\overline{NK} \perp \overline{NP}$.
- Halla M , el punto medio de \overline{NK} .
- Ubica el punto L de manera que $\overline{NK} \perp \overline{KL}$ y $L, P, y M$ son colineales.

**SOLUCIÓN**

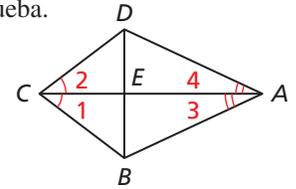
Como $\overline{NK} \perp \overline{NP}$ y $\overline{NK} \perp \overline{KL}$, $\angle N$ y $\angle K$ son ángulos rectos congruentes. Como M es el punto medio de \overline{NK} , $\overline{NM} \cong \overline{KM}$. Los ángulos verticales $\angle KML$ y $\angle NMP$ son congruentes. Por tanto, $\triangle MLK \cong \triangle MPN$ según el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10). Entonces, debido a que las partes correspondientes de los triángulos congruentes son congruentes, $\overline{KL} \cong \overline{NP}$ puedes hallar la distancia NP a través del río midiendo KL .

**EJEMPLO 3****Planear una prueba que incluya pares de triángulos**

Utiliza la información dada para escribir un plan para la prueba.

Dado $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$

Demostrar $\triangle BCE \cong \triangle DCE$

**SOLUCIÓN**

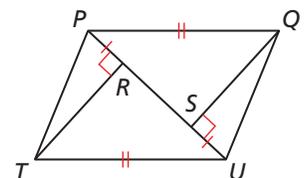
En $\triangle BCE$ y $\triangle DCE$, sabes que $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\overline{CE} \cong \overline{CE}$. Si puedes demostrar que $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, entonces puedes utilizar el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5).

Para demostrar que $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, primero demuestra que $\triangle CBA \cong \triangle CDA$. Sabes que $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$. $\overline{CA} \cong \overline{CA}$ según la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1). Puedes utilizar el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10) para demostrar que $\triangle CBA \cong \triangle CDA$.

- **Planea la prueba** Utiliza el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10) para demostrar que $\triangle CBA \cong \triangle CDA$. Después, indica que $\overline{CB} \cong \overline{CD}$. Utiliza el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5) para demostrar que $\triangle BCE \cong \triangle DCE$.

Monitoreo del progreso  Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

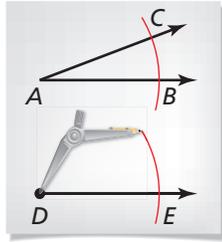
2. En el Ejemplo 2, ¿importa qué tan lejos del punto N coloques una estaca del punto N al punto K ? Explica.
3. Escribe un plan para demostrar que $\triangle PTU \cong \triangle QUP$.



Demostrar construcciones

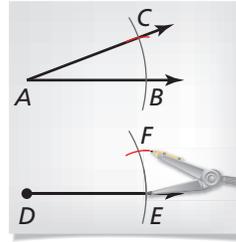
Recuerda que puedes usar un compás y una regla para copiar un ángulo. La construcción se muestra a continuación. Puedes usar triángulos congruentes para demostrar que esta construcción es válida.

Paso 1



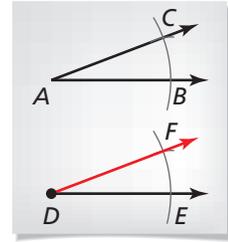
Traza un segmento y unos arcos Para copiar $\angle A$, traza un segmento con un punto inicial D . Traza un arco con centro A . Utilizando el mismo radio, traza un arco con centro D . Rotula los puntos B , C y E .

Paso 2



Traza un arco Traza un arco con un radio BC y centro E . Rotula la intersección F .

Paso 3



Traza un rayo Traza \overline{DF} . En el Ejemplo 4, demostrarás que $\angle D \cong \angle A$.

EJEMPLO 4

Demostrar una construcción

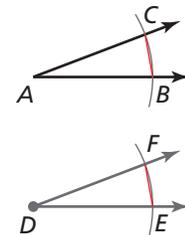
Escribe una prueba para verificar que la construcción para copiar un ángulo es válida.

SOLUCIÓN

Agrega \overline{BC} y \overline{EF} al diagrama. En la construcción, una apertura del compás determina \overline{AB} , \overline{DE} , \overline{AC} y \overline{DF} , y otra apertura del compás determina a \overline{BC} y \overline{EF} . Así que, puedes asumir los siguientes enunciados.

Dado $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

Demstrar $\angle D \cong \angle A$



Planea la prueba Demuestra que $\triangle DEF \cong \triangle ABC$, de manera que puedas concluir que las partes correspondientes $\angle D$ y $\angle A$ son congruentes.

Plan en acción	ENUNCIADOS	RAZONES
	1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1. Dado
	2. $\triangle DEF \cong \triangle ABC$	2. Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8)
	3. $\angle D \cong \angle A$	3. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

- Utiliza la construcción de una bisectriz de ángulo, mencionada en la página 42. ¿Qué segmentos podrías suponer son congruentes?

5.7 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en BigIdeasMath.com

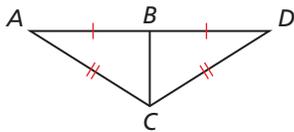
Verificación de vocabulario y concepto esencial

- COMPLETAR LA ORACIÓN** Partes _____ de triángulos congruentes son congruentes.
- ESCRIBIR** Describe una situación en la que optes por utilizar una medición indirecta con triángulos congruentes en lugar de medirla directamente.

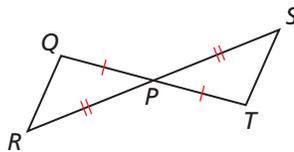
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–8, explica cómo demostrar que el enunciado es verdadero. (Consulta el Ejemplo 1).

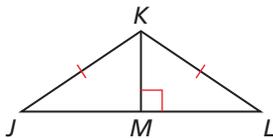
3. $\angle A \cong \angle D$



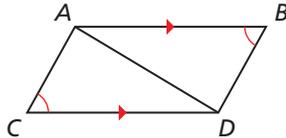
4. $\angle Q \cong \angle T$



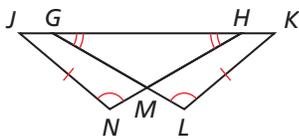
5. $\overline{JM} \cong \overline{LM}$



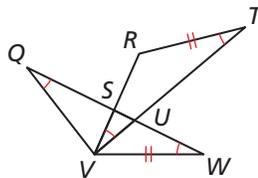
6. $\overline{AC} \cong \overline{DB}$



7. $\overline{GK} \cong \overline{HJ}$

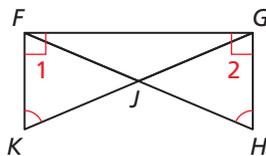


8. $\overline{QW} \cong \overline{VT}$

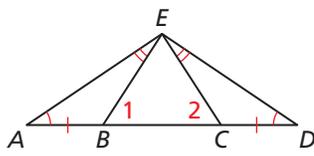


En los Ejercicios 9–12, escribe un plan para demostrar que $\angle 1 \cong \angle 2$. (Consulta el Ejemplo 3).

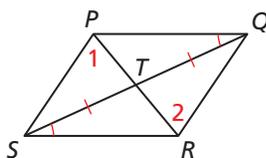
9.



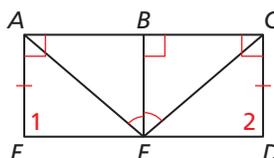
10.



11.

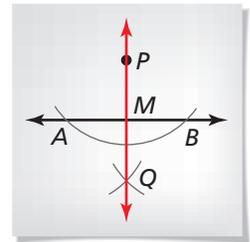


12.



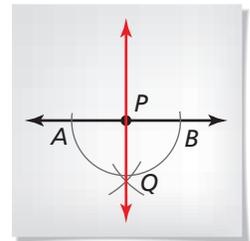
En los Ejercicios 13 y 14, escribe una prueba de que la construcción es válida. (Consulta el Ejemplo 4).

13. Una línea perpendicular respecto a otra que pasa por un punto que no pertenece a la línea.



Planea la prueba Demuestra que $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ según el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8). Después, demuestra que $\triangle APM \cong \triangle BPM$ utilizando el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5). Utiliza las partes correspondientes de triángulos congruentes para demostrar que $\angle AMP$ y $\angle BMP$ son ángulos rectos.

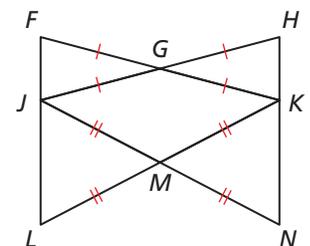
14. Una línea perpendicular a una que pasa por un punto en la línea.



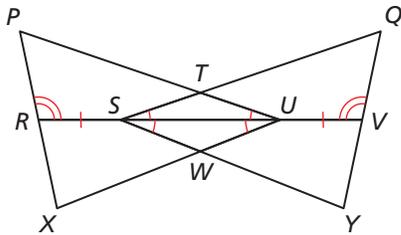
Planea la prueba Demuestra que $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ según el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8). Utiliza las partes correspondientes de triángulos congruentes para demostrar que $\angle QPA$ y $\angle QPB$ son ángulos rectos.

En los Ejercicios 15 y 16, utiliza la información dada en el diagrama para escribir una prueba.

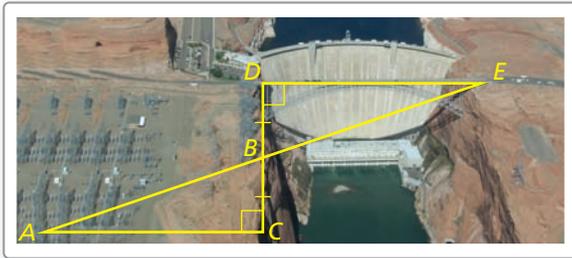
15. Demostrar $\overline{FL} \cong \overline{HN}$



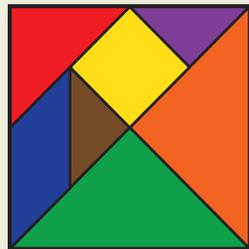
16. **Demostrar** $\triangle PUX \cong \triangle QSY$



17. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Explica cómo hallar la distancia a través del cañón. (Consulta el Ejemplo 2).



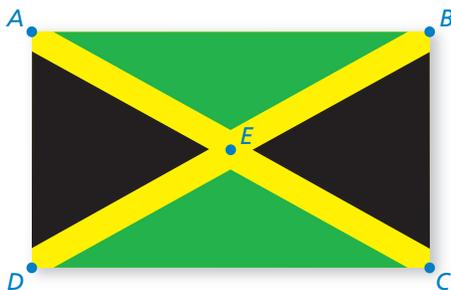
18. **¿CÓMO LO VES?** Utiliza el rompecabezas tangram.



a. ¿Qué triángulo(s) tiene(n) un área dos veces la del triángulo morado?

b. ¿Cuántas veces mayor el área del triángulo anaranjado es más grande que el área del triángulo morado?

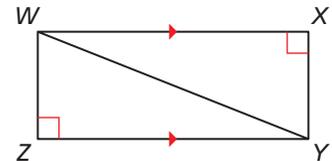
19. **PRUEBA** Demuestra que los triángulos verdes en la bandera jamaicana son congruentes si $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y E es el punto medio de \overline{AC} .



20. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** El Triángulo de las Bermudas es una región en el Océano Atlántico en la cual muchas naves y aviones han desaparecido misteriosamente. Los vértices son Miami, San Juan y Bermuda. Investiga en Internet u otras fuentes las longitudes de los lados, el perímetro y el área de este triángulo (en millas). Después, crea un triángulo congruente sobre tierra utilizando las ciudades como vértices.



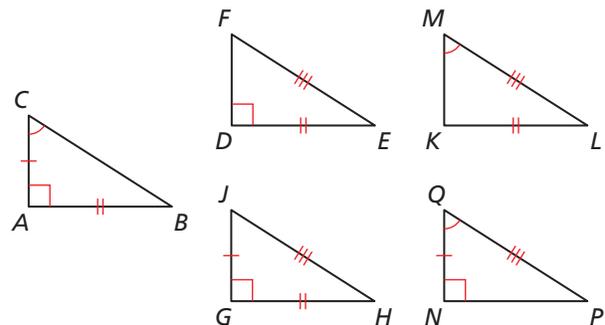
21. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que se puede demostrar que $\triangle WZY$ es congruente con $\triangle YXW$ utilizando el Teorema de congruencia HC (Teorema 5.9). ¿Tu amigo tiene razón? Explica tu razonamiento.



22. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Determina si cada enunciado condicional es verdadero o falso. Si el enunciado es falso, reescríbelo como enunciado verdadero utilizando el recíproco, inverso o contrarrecíproco.

- Si dos triángulos tienen el mismo perímetro, entonces son congruentes.
- Si dos triángulos son congruentes, entonces tienen la misma área.

23. **PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN** ¿Qué triángulos son congruentes con $\triangle ABC$? Selecciona todos los que aplican.



Mantener el dominio de las matemáticas

Reparar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla el perímetro del polígono con los vértices dados. (Sección 1.4)

24. $A(-1, 1), B(4, 1), C(4, -2), D(-1, -2)$

25. $J(-5, 3), K(-2, 1), L(3, 4)$

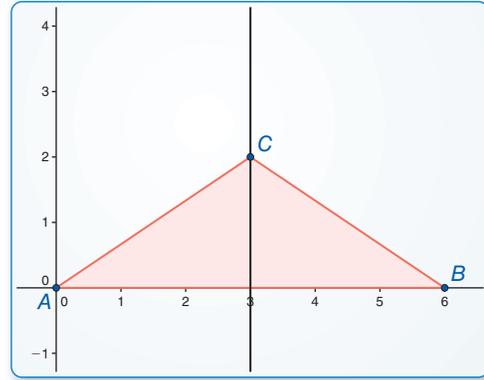
5.8 Pruebas de coordenadas

Pregunta esencial ¿Cómo puedes utilizar un plano de coordenadas para escribir una prueba?

EXPLORACIÓN 1 Escribir una prueba de coordenadas

Trabaja con un compañero.

- Utiliza un software de geometría dinámica para trazar \overline{AB} con extremos $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$.
- Traza la línea vertical $x = 3$.
- Traza $\triangle ABC$ de manera que C esté sobre la línea $x = 3$.
- Utiliza tu dibujo para demostrar que $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.

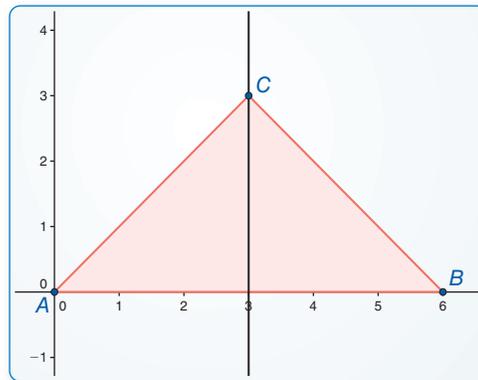


Muestra
 Puntos
 $A(0, 0)$
 $B(6, 0)$
 $C(3, 2)$
 Segmentos
 $AB = 6$
 Línea
 $x = 3$

EXPLORACIÓN 2 Escribir una prueba de coordenadas

Trabaja con un compañero.

- Utiliza un software de geometría dinámica para trazar \overline{AB} con extremos $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$.
- Traza la línea vertical $x = 3$.
- Gráfica el punto $C(3, 3)$ y dibuja $\triangle ABC$. Después, utiliza tu dibujo para demostrar que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo isósceles.



Muestra
 Puntos
 $A(0, 0)$
 $B(6, 0)$
 $C(3, 3)$
 Segmentos
 $AB = 6$
 $BC = 4.24$
 $AC = 4.24$
 Línea
 $x = 3$

OPINAR SOBRE EL RAZONAMIENTO DE LOS DEMÁS

Para dominar las matemáticas, necesitas comprender y utilizar suposiciones expresadas, definiciones y resultados previamente establecidos.

- Cambia las coordenadas de C de manera que C esté debajo del eje x y $\triangle ABC$ sea un triángulo isósceles recto.
- Escribe una prueba para demostrar que si C pertenece a la línea $x = 3$ y $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles recto, entonces, C debe ser un punto final $(3, 3)$ o el punto encontrado en la parte (d).

Comunicar tu respuesta

- ¿Cómo puedes utilizar un plano de coordenadas para escribir una prueba?
- Escribe una prueba de coordenadas para demostrar que $\triangle ABC$ con vértices $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(3, 3\sqrt{3})$ es un triángulo equilátero.

5.8 Lección

Vocabulario Esencial

prueba de coordenadas,
pág. 284

Qué aprenderás

- ▶ Colocar figuras en un plano de coordenadas.
- ▶ Escribir pruebas de coordenadas.

Colocar figuras en un plano de coordenadas

Una **prueba de coordenadas** implica colocar figuras geométricas en un plano de coordenadas. Cuando utilizas variables para representar las coordenadas de una figura en una prueba de coordenadas, los resultados son verdaderos para todas las figuras de ese tipo.

EJEMPLO 1 Colocar una figura en un plano de coordenadas

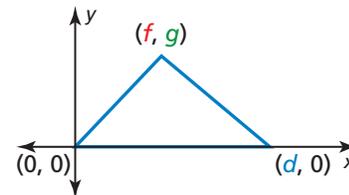
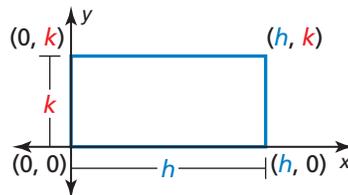
Coloca cada figura en un plano de coordenadas, de tal forma, que sea fácil hallar las longitudes de los lados. Asigna coordenadas a cada vértice.

- a. un rectángulo b. un triángulo escaleno

SOLUCIÓN

Hallar las longitudes de los segmentos horizontales y verticales y las distancias a partir de $(0, 0)$, es fácil, así que coloca un vértice en el origen y uno o más lados sobre un eje.

- a. Sea h la longitud y k el ancho. b. Observa que necesitas usar tres variables diferentes.



Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

1. Muestra otra forma de colocar el rectángulo en el Ejemplo 1 parte (a) que sea conveniente para hallar las longitudes de los lados. Asigna nuevas coordenadas.
2. Un cuadrado tiene vértices $(0, 0)$, $(m, 0)$, y $(0, m)$. Halla el cuarto vértice.

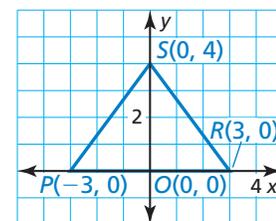
Una vez colocada la figura en un plano de coordenadas, podrás demostrar enunciados acerca de la figura.

EJEMPLO 2 Escribir un plan para una prueba de coordenadas

Escribe un plan para probar que \overrightarrow{SO} biseca a $\angle PSR$.

Dado Las coordenadas de los vértices $\triangle POS$ y $\triangle ROS$

Demostrar \overrightarrow{SO} biseca a $\angle PSR$.



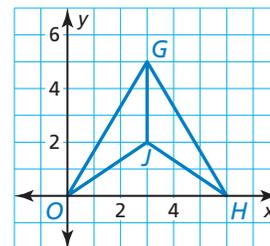
SOLUCIÓN

Planea la prueba Utiliza la fórmula de la distancia para hallar las longitudes de lados de $\triangle POS$ y $\triangle ROS$. Después utiliza el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8) para demostrar $\triangle POS \cong \triangle ROS$. Por último, utiliza el hecho de que las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes para concluir que $\angle PSO \cong \angle RSO$, lo que implica que \overrightarrow{SO} biseca a $\angle PSR$.

3. Escribe un plan para la prueba.

Dado \overrightarrow{GJ} biseca a $\angle OGH$.

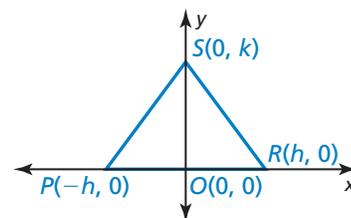
Demostrar $\triangle GJO \cong \triangle GJH$



La prueba de coordenadas en el Ejemplo 2 aplica a un triángulo en específico. Cuando desees demostrar un enunciado acerca de un conjunto general de figuras, te será útil usar variables como coordenadas.

Por ejemplo, puedes usar variables como coordenadas para duplicar la prueba del Ejemplo 2.

Una vez hecho esto, puedes concluir que \overrightarrow{SO} biseca a $\angle PSR$ para cualquier triángulo cuyas coordenadas se ajusten al patrón dado.

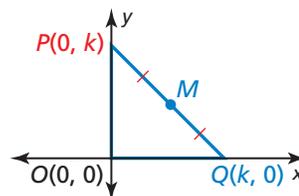


EJEMPLO 3 Aplicar coordenadas variables

Coloca un triángulo isósceles recto en un plano de coordenadas. Después halla la longitud de la hipotenusa y las coordenadas de su punto medio M .

SOLUCIÓN

Coloca $\triangle PQO$ con el ángulo recto en el origen. Deja que k sea la longitud de los catetos. Entonces, los vértices se localizan en $P(0, k)$, $Q(k, 0)$, y $O(0, 0)$.



Utiliza la fórmula de la distancia para hallar PQ , la longitud de la hipotenusa.

$$PQ = \sqrt{(k-0)^2 + (0-k)^2} = \sqrt{k^2 + (-k)^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = k\sqrt{2}$$

Utiliza la fórmula del punto medio para hallar el punto medio M de la hipotenusa.

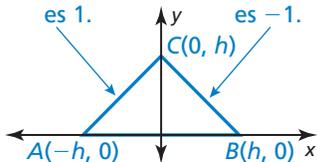
$$M\left(\frac{0+k}{2}, \frac{k+0}{2}\right) = M\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$$

Entonces, la longitud de la hipotenusa es $k\sqrt{2}$ y el punto medio de la hipotenusa es $\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$.

HALLAR UN PUNTO DE ENTRADA

Otra forma de resolver el ejemplo 3 es colocar un triángulo con un punto C en $(0, h)$ en el eje y y la hipotenusa \overline{AB} en el eje x . Para hacer que $\angle ACB$ sea un ángulo recto, coloca A y B de manera que los catetos \overline{CA} y \overline{CB} tengan pendientes de 1 y -1 , respectivamente.

La pendiente es 1. La pendiente es -1 .



Longitud de la hipotenusa = $2h$

$$M\left(\frac{-h+h}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = M(0, 0)$$

4. Grafica los puntos $O(0, 0)$, $H(m, n)$ y $J(m, 0)$. ¿Es $\triangle OHJ$ un triángulo rectángulo? Halla las longitudes de los lados y las coordenadas del punto medio de cada lado.

Escribir pruebas de coordenadas

EJEMPLO 4 Escribir pruebas de coordenadas

Escribe una prueba de coordenadas.

Dado Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $OTUV$

Demostrar $\triangle OTU \cong \triangle UVO$

SOLUCIÓN

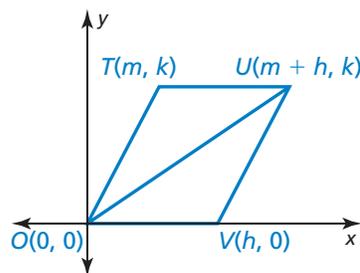
Los segmentos \overline{OV} y \overline{UT} tienen la misma longitud.

$$OV = |h - 0| = h$$

$$UT = |(m + h) - m| = h$$

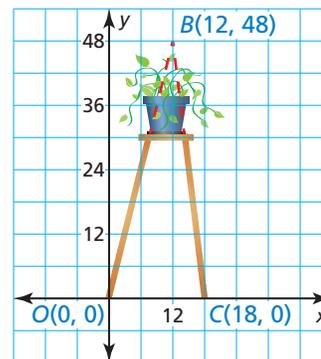
Los segmentos horizontales \overline{UT} y \overline{OV} tienen una pendiente de 0, lo cual implica que son paralelos. El segmento \overline{OU} interseca a \overline{UT} y \overline{OV} para formar ángulos interiores alternos congruentes, $\angle TUO$ y $\angle VOU$. Según la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1), $\overline{OU} \cong \overline{OU}$.

▶ Entonces, puedes aplicar el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5) para concluir que $\triangle OTU \cong \triangle UVO$.



EJEMPLO 5 Escribir una prueba de coordenadas

Compras un atril de tres patas para colocar una planta. Al colocar la planta encima, observas que es inestable bajo el peso de la planta. El diagrama de la derecha muestra un plano de coordenadas sobrepuesto sobre dos de las patas del atril. Los catetos se extienden para formar $\triangle OBC$. Demuestra que $\triangle OBC$ es un triángulo escaleno. Explica por qué el atril para la planta es inestable.



SOLUCIÓN

Primero halla las longitudes de los lados de $\triangle OBC$.

$$OB = \sqrt{(48 - 0)^2 + (12 - 0)^2} = \sqrt{2448} \approx 49.5$$

$$BC = \sqrt{(18 - 12)^2 + (0 - 48)^2} = \sqrt{2340} \approx 48.4$$

$$OC = |18 - 0| = 18$$

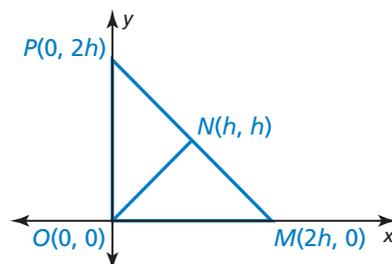
▶ Como $\triangle OBC$ no tiene lados congruentes, $\triangle OBC$ es un triángulo escaleno por definición. El atril para la planta podría ser inestable debido a que \overline{OB} es más largo que \overline{BC} , así que, el atril para la planta se inclina hacia la derecha.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en BigIdeasMath.com

5. Escribe una prueba de coordenadas.

Dado Las coordenadas de los vértices de $\triangle NPO$ y $\triangle NMO$

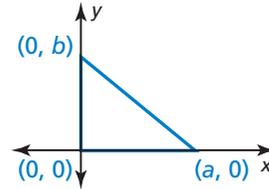
Demostrar $\triangle NPO \cong \triangle NMO$



5.8 Ejercicios

Verificación de vocabulario y concepto esencial

- VOCABULARIO** ¿Cómo es diferente una *prueba de coordenadas* de otros tipos de pruebas que has estudiado? ¿En qué se parece?
- ESCRIBIR** Explica por qué es conveniente colocar un triángulo rectángulo en la cuadrícula, como se muestra al escribir una prueba de coordenadas.



Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

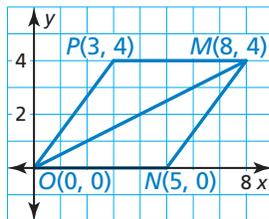
En los Ejercicios 3–6, coloca la figura en un plano de coordenadas de una manera conveniente. Asigna coordenadas a cada vértice. Explica las ventajas de tu colocación (Consulta el Ejemplo 1).

- un triángulo rectángulo con catetos de 3 y 2 unidades de longitud
- un cuadrado con lados de 3 unidades de longitud
- un triángulo isósceles recto con un cateto de longitud p
- un triángulo escaleno con un lado de $2m$ de longitud

En los Ejercicios 7 y 8, escribe un plan para la prueba. (Consulta el Ejemplo 2).

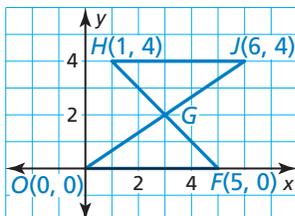
- Dado** Las coordenadas de los vértices $\triangle OPM$ y $\triangle ONM$

Demostrar $\triangle OPM$ y $\triangle ONM$ son triángulos isósceles.



- Dado** G es el punto medio de \overline{HF} .

Demostrar $\triangle GHJ \cong \triangle GFO$



En los Ejercicios 9–12, coloca la figura en un plano de coordenadas y halla la longitud indicada.

- un triángulo rectángulo con catetos de 7 y 9 unidades de longitud. Halla la longitud de la hipotenusa.
- un triángulo isósceles con una base de 60 unidades de longitud y una altura de 50 unidades. Halla la longitud de uno de los catetos.
- un rectángulo con una longitud de 5 unidades y un ancho de 4 unidades. Halla la longitud de la diagonal.
- un cuadrado con longitud de lado n . Halla la longitud de la diagonal.

En los Ejercicios 13 y 14, grafica el triángulo con los vértices dados. Halla la longitud y la pendiente de cada lado del triángulo. Después, halla las coordenadas del punto medio de cada lado. ¿Es el triángulo un triángulo rectángulo?, ¿isósceles? Explica. (Asume que las variables son positivas y $m \neq n$.) (Consulta el Ejemplo 3).

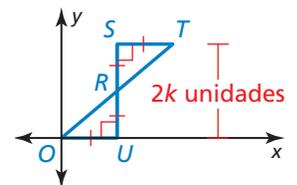
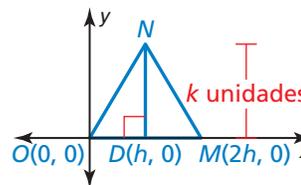
- $A(0, 0), B(h, h), C(2h, 0)$

- $D(0, n), E(m, n), F(m, 0)$

En los Ejercicios 15 y 16, halla las coordenadas de todos los vértices no rotulados. Después, halla la(s) longitud(es) indicada(s).

- Halla ON y MN .

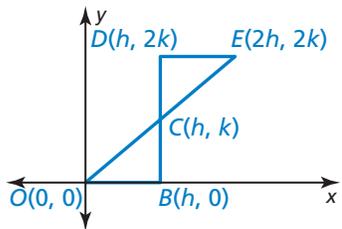
- Halla OT .



PRUEBA En los Ejercicios 17 y 18, escribe una prueba de coordenadas. (Consulta el Ejemplo 4).

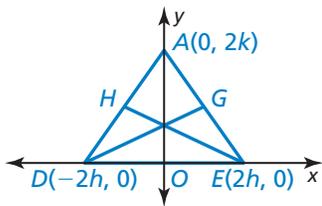
17. **Dado** Coordenadas de los vértices de $\triangle DEC$ y $\triangle BOC$

Demostrar $\triangle DEC \cong \triangle BOC$



18. **Dado** Coordenadas de $\triangle DEA$, H es el punto medio de \overline{DA} , G es el punto medio de \overline{EA} .

Demostrar $\overline{DG} \cong \overline{EH}$



19. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Tu primo y tú están acampando en el bosque. Caminas a un punto que está a 500 metros al este y 1200 al norte del campamento. Tu primo camina a un punto que está 1000 metros al este del campamento. Utiliza una prueba de coordenadas para demostrar que el triángulo formado por tu posición, la posición de tu primo y el campamento es un isósceles. (Consulta el Ejemplo 5).



20. **ARGUMENTAR** Dos amigos ven un dibujo de un cuadrilátero $PQRS$ con vértices en $P(0, 2)$, $Q(3, -4)$, $R(1, -5)$, y $S(-2, 1)$. Uno de ellos dice que el cuadrilátero es un paralelogramo pero no un rectángulo, el otro que el cuadrilátero es un rectángulo. ¿Cuál amigo tiene razón? Utiliza una prueba de coordenadas para apoyar tu respuesta.
21. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Escribe una expresión algebraica para las coordenadas de cada extremo de un segmento de recta, cuyo punto medio es el origen.

22. **RAZONAR** Los vértices de un paralelogramo son $(w, 0)$, $(0, v)$, $(-w, 0)$, y $(0, -v)$. ¿Cuál es el punto medio del lado en el cuadrante III?

- (A) $(\frac{w}{2}, \frac{v}{2})$ (B) $(-\frac{w}{2}, -\frac{v}{2})$
 (C) $(-\frac{w}{2}, \frac{v}{2})$ (D) $(\frac{w}{2}, -\frac{v}{2})$

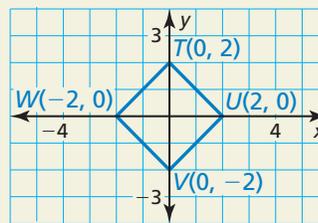
23. **RAZONAR** Un rectángulo con una longitud de $3h$ y un ancho de k tiene un vértice en $(-h, k)$. ¿Qué punto no puede ser un vértice del rectángulo?

- (A) (h, k) (B) $(-h, 0)$
 (C) $(2h, 0)$ (D) $(2h, k)$

24. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Elige uno de los teoremas que has estudiado hasta ahora y que pienses sería más fácil de comprobar con una prueba de coordenadas que con otro tipo de prueba. Explica tu razonamiento. Después escribe una prueba de coordenadas.

25. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Las coordenadas de un triángulo son $(5d, -5d)$, $(0, -5d)$, y $(5d, 0)$. ¿Cómo se deberían cambiar las coordenadas para facilitar una prueba de coordenadas?

26. **¿CÓMO LO VES?** Sin realizar ningún cálculo, ¿cómo sabes que las diagonales del cuadrado $TUVW$ son perpendiculares entre sí? ¿Cómo puedes utilizar un diagrama similar para demostrar que las diagonales de cualquier cuadrado son perpendiculares entre sí?



27. **PRUEBA** Escribe una prueba de coordenadas para cada enunciado.
- El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo está a la misma distancia de cada vértice del triángulo.
 - Dos triángulos isósceles rectos congruentes cualesquiera pueden combinarse para formar un triángulo isósceles.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

\overrightarrow{YW} biseca a $\angle XYZ$ de tal manera que $m\angle XYW = (3x - 7)^\circ$ y $m\angle WYZ = (2x + 1)^\circ$. (Sección 1.5)

28. Halla el valor de x .

29. Halla $m\angle XYZ$.

5.5–5.8 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

catetos (de un triángulo rectángulo), *pág. 264*
hipotenusa (de un triángulo rectángulo), *pág. 264*
prueba de coordenadas, *pág. 284*

Conceptos Esenciales

Teorema 5.8 Teorema de congruencia lado-lado-lado (LLL), *pág. 262*
Teorema 5.9 Teorema de congruencia hipotenusa-cateto (HL), *pág. 264*
Teorema 5.10 Teorema de congruencia ángulo-lado-ángulo (ALA), *pág. 270*
Teorema 5.11 Teorema de congruencia ángulo-ángulo-lado (AAL), *pág. 271*
Utilizar triángulos congruentes, *pág. 278*
Demostrar construcciones, *pág. 280*
Colocar figuras en un plano de coordenadas, *pág. 284*
Escribir pruebas de coordenadas, *pág. 286*

Prácticas matemáticas

1. Escribe un problema más simple, que sea similar al Ejercicio 22 de la página 267. Describe cómo usar el problema más simple para comprender la solución del problema más complicado en el Ejercicio 22.
2. Haz una conjetura acerca del significado de tus soluciones en los Ejercicios 21–23 de la página 275.
3. Identifica al menos dos recursos externos que puedas usar como ayuda para resolver el Ejercicio 20 de la página 282.

Tarea de desempeño

Crear un logo

Los triángulos congruentes suelen utilizarse para crear logotipos empresariales. ¿Por qué se utilizan y cuáles son las propiedades que los hacen atractivos? Con base a las restricciones requeridas, crea tu nuevo logotipo y explica cómo tu estructura contiene las propiedades requeridas.

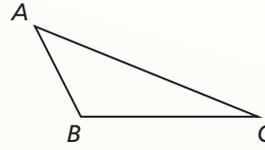
Para explorar las respuestas a estas preguntas y más, ve a BigIdeasMath.com.



5.1 Ángulos de triángulos (págs. 231–238)

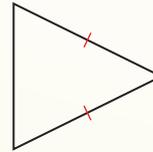
Clasifica el triángulo según sus lados y las medidas de sus ángulos.

El triángulo no tiene ningún lado congruente, por tanto, es escaleno. La medida de $\angle B$ es 117° , entonces, el triángulo es obtuso.

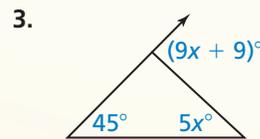
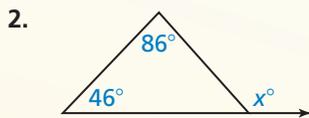


► El triángulo es un triángulo escaleno obtuso.

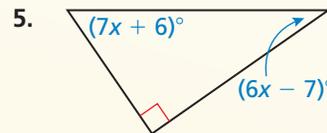
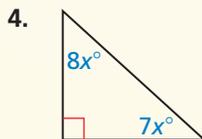
1. Clasifica el triángulo de la derecha según sus lados y las medidas de sus ángulos.



Halla la medida del ángulo exterior.



Halla la medida de cada ángulo agudo.



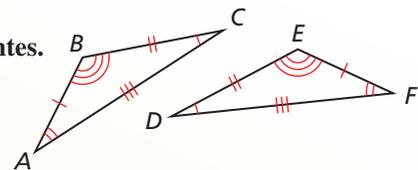
5.2 Polígonos congruentes (págs. 239–244)

Escribe un enunciado de congruencia para los triángulos.
Identifica todos los pares de partes correspondientes congruentes.

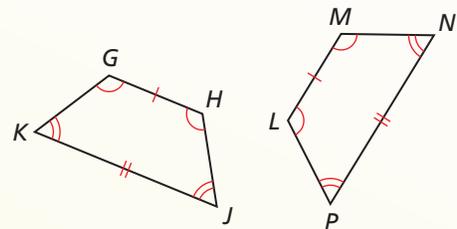
El diagrama indica que $\triangle ABC \cong \triangle FED$.

Ángulos correspondientes $\angle A \cong \angle F, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle D$

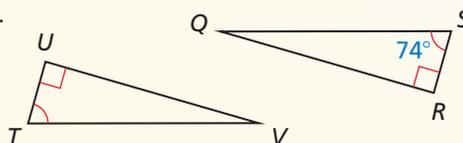
Lados correspondientes $\overline{AB} \cong \overline{FE}, \overline{BC} \cong \overline{ED}, \overline{AC} \cong \overline{FD}$



6. En el diagrama, $GHIK \cong LMNP$. Identifica todos los pares de partes correspondientes congruentes. Después escribe otro enunciado de congruencia para los cuadriláteros.



7. Halla $m\angle V$.

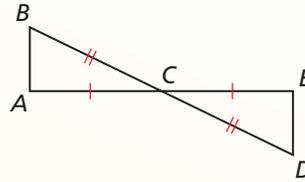


5.3 Demostrar congruencia de triángulos con LAL (págs. 245–250)

Escribe una prueba.

Dado $\overline{AC} \cong \overline{EC}, \overline{BC} \cong \overline{DC}$

Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



ENUNCIADOS

RAZONES

1. $\overline{AC} \cong \overline{EC}$

1. Dado

2. $\overline{BC} \cong \overline{DC}$

2. Dado

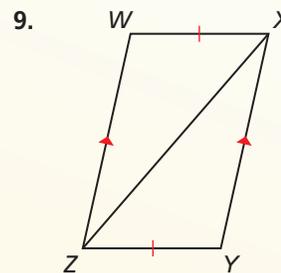
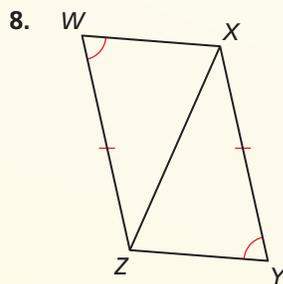
3. $\angle ACB \cong \angle ECD$

3. Teorema de la congruencia de los ángulos verticales (Teorema 2.6)

4. $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

4. Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5)

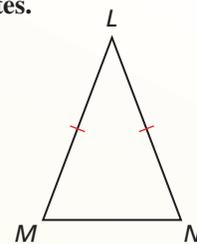
Determina si se da la información suficiente para demostrar que $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ según el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5). Si es así, escribe una prueba. Si no, explica por qué.



5.4 Triángulos equiláteros e isósceles (págs. 251–258)

En $\triangle LMN$, $\overline{LM} \cong \overline{LN}$. Nombra dos ángulos congruentes.

► $\overline{LM} \cong \overline{LN}$, entonces, según el Teorema de los ángulos base (Teorema 5.6), $\angle M \cong \angle N$.



Copia y completa el enunciado.

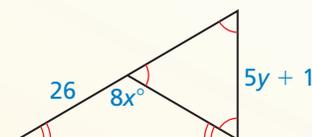
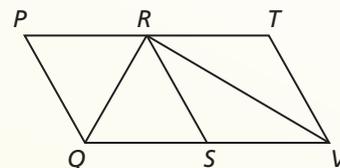
10. Si $\overline{QP} \cong \overline{QR}$, entonces $\angle _ \cong \angle _$.

11. Si $\angle TRV \cong \angle TVR$, entonces $_ \cong _$.

12. Si $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$, entonces $\angle _ \cong \angle _$.

13. Si $\angle SRV \cong \angle SVR$, entonces $_ \cong _$.

14. Halla los valores de x y y en el diagrama.

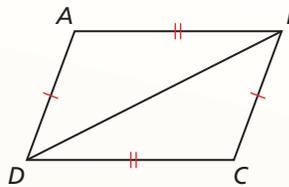


5.5 Demostrar congruencia de triángulos con LLL (págs. 261–268)

Escribe una prueba.

Dado $\overline{AD} \cong \overline{CB}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$

Demostrar $\triangle ABD \cong \triangle CDB$



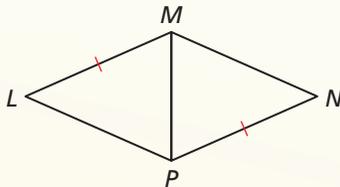
ENUNCIADOS

1. $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
3. $\overline{BD} \cong \overline{DB}$
4. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

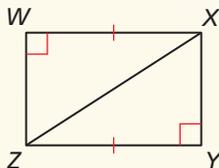
RAZONES

1. Dado
2. Dado
3. Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1)
4. Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8)

15. Determina si la información proporcionada es suficiente para demostrar que $\triangle LMP \cong \triangle NPM$ utilizando el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8). Si es así, escribe una prueba. Si no, explica por qué.



16. Determina si la información proporcionada es suficiente para demostrar que $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ utilizando el Teorema de congruencia HC (Teorema 5.9). Si es así, escribe una prueba. Si no, explica por qué.

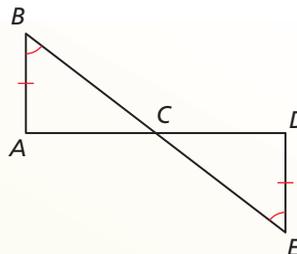


5.6 Demostrar congruencia de triángulos con ALA y AAL (págs. 269–276)

Escribe una prueba.

Dado $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \angle ABC \cong \angle DEC$

Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle DEC$



ENUNCIADOS

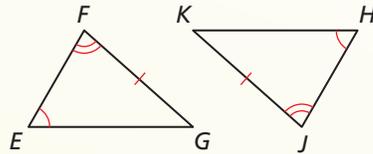
1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
2. $\angle ABC \cong \angle DEC$
3. $\angle ACB \cong \angle DCE$
4. $\triangle ABC \cong \triangle DEC$

RAZONES

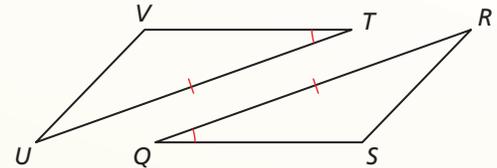
1. Dado
2. Dado
3. Teorema de la congruencia de ángulos verticales (Teorema 2.6)
4. Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11)

Determina si la información proporcionada es suficiente para demostrar que los triángulos son congruentes, según el Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11). Si es así, escribe una prueba. Si no, explica por qué.

17. $\triangle EFG, \triangle HJK$

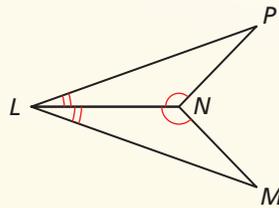


18. $\triangle TUV, \triangle QRS$

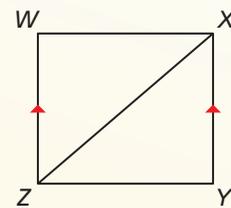


Determina si la información proporcionada es suficiente para demostrar que los triángulos son congruentes, según el Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10). Si es así, escribe una prueba. Si no, explica por qué.

19. $\triangle LPN, \triangle LMN$



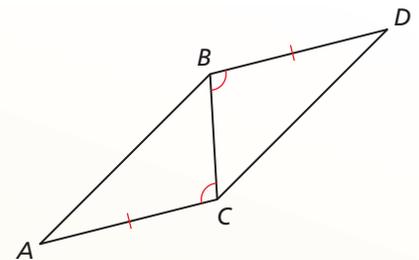
20. $\triangle WXZ, \triangle YZX$



5.7 Utilizar triángulos congruentes (págs. 277–282)

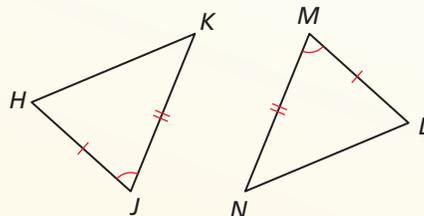
Explica cómo puedes demostrar que $\angle A \cong \angle D$.

Si puedes demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, entonces sabrás que $\angle A \cong \angle D$. Se te da $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ y $\angle ACB \cong \angle DBC$. Sabes que $\overline{BC} \cong \overline{CB}$ según la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1). Dos pares de lados y sus ángulos incluidos son congruentes, por lo que, según el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5), $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

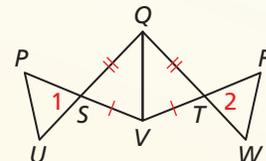


► Debido a las partes correspondientes de los triángulos congruentes son congruentes, $\angle A \cong \angle D$.

21. Explica cómo demostrar que $\angle K \cong \angle N$.



22. Escribe un plan para demostrar que $\angle 1 \cong \angle 2$.

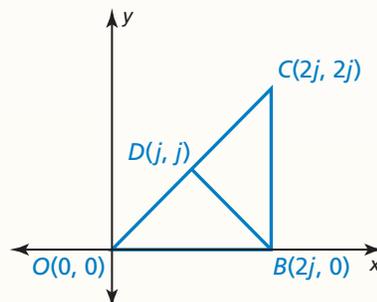


5.8 Pruebas de coordenadas (págs. 283–288)

Escribe una prueba de coordenadas.

Dado Las coordenadas de los vértices de $\triangle ODB$ y $\triangle BDC$

Demostrar $\triangle ODB \cong \triangle BDC$



Los segmentos \overline{OD} y \overline{BD} tienen la misma longitud.

$$OD = \sqrt{(j - 0)^2 + (j - 0)^2} = \sqrt{j^2 + j^2} = \sqrt{2j^2} = j\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(j - 2j)^2 + (j - 0)^2} = \sqrt{(-j)^2 + j^2} = \sqrt{2j^2} = j\sqrt{2}$$

Los segmentos \overline{DB} y \overline{DC} tienen la misma longitud.

$$DB = BD = j\sqrt{2}$$

$$DC = \sqrt{(2j - j)^2 + (2j - j)^2} = \sqrt{j^2 + j^2} = \sqrt{2j^2} = j\sqrt{2}$$

Los segmentos \overline{OB} y \overline{BC} tienen la misma longitud.

$$OB = |2j - 0| = 2j$$

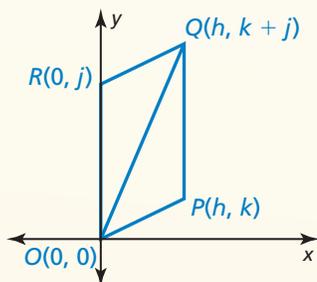
$$BC = |2j - 0| = 2j$$

▶ Entonces, puedes aplicar el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8) para concluir que $\triangle ODB \cong \triangle BDC$.

23. Escribe una prueba de coordenadas.

Dado Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $OPQR$

Demostrar $\triangle OPQ \cong \triangle QRO$



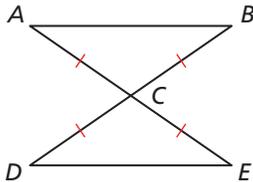
24. Coloca un triángulo isósceles en un plano de coordenadas, de tal forma, que sea fácil hallar las longitudes de sus lados. Asigna coordenadas a cada vértice.

25. Un rectángulo tiene vértices $(0, 0)$, $(2k, 0)$, y $(0, k)$. Halla el cuarto vértice.

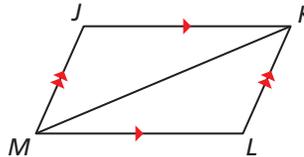
5 Prueba del capítulo

Escribe una prueba.

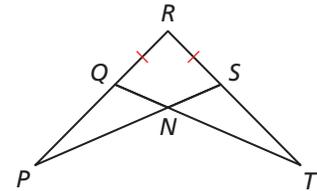
1. Dado $\overline{CA} \cong \overline{CB} \cong \overline{CD} \cong \overline{CE}$
 Demostrar $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



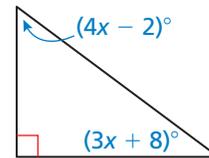
2. Dado $\overline{JK} \parallel \overline{ML}, \overline{MJ} \parallel \overline{KL}$
 Demostrar $\triangle MJK \cong \triangle KLM$



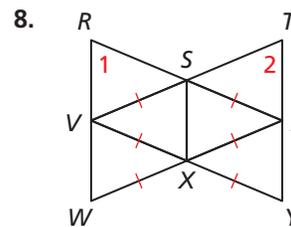
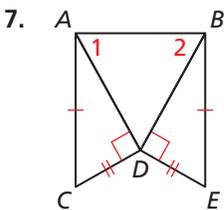
3. Dado $\overline{QR} \cong \overline{RS}, \angle P \cong \angle T$
 Demostrar $\triangle SRP \cong \triangle QRT$



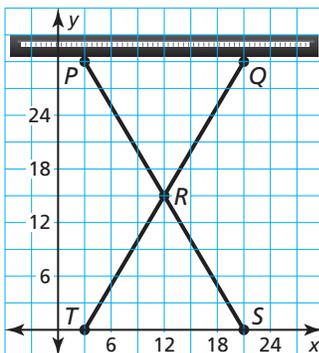
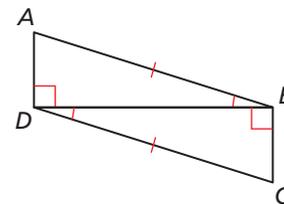
4. Halla la medida de cada ángulo agudo en la figura de la derecha.
 5. ¿Es posible dibujar un triángulo equilátero que no sea equiángulo? Si es así, da un ejemplo. Si no, explica por qué.
 6. ¿Puedes usar el Teorema de los terceros ángulos (Teorema 5.4) para demostrar que dos triángulos son congruentes? Explica tu razonamiento.



Escribe un plan para probar que $\angle 1 \cong \angle 2$.

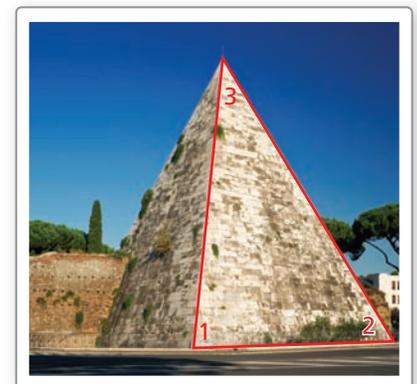


9. ¿Hay más de un teorema que se puede utilizar para demostrar que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$? Si es así, haz una lista de todos los teoremas posibles.



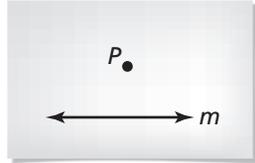
10. Escribe una prueba de coordenadas para demostrar que los triángulos de la mesita del teclado son congruentes.

11. La foto muestra a la Pirámide Cestia, en Roma, Italia. La medida de la base del triángulo mostrado es de 100 pies romanos. Los otros dos lados del triángulo miden 144 pies romanos cada uno.
 a. Clasifica el triángulo mostrado según sus lados.
 b. La medida de $\angle 3$ es 40° . ¿Cuáles son las medidas de $\angle 1$ y $\angle 2$? Explica tu razonamiento.

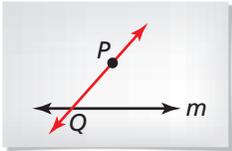


5 Evaluación acumulativa

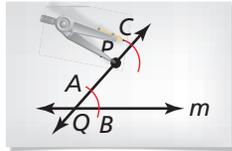
- Tu amigo afirma que el Teorema del ángulo exterior (Teorema 5.2) puede utilizarse para demostrar el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1). ¿Tiene razón? Explica tu razonamiento.
- Utiliza los pasos en la construcción para explicar cómo sabes que la línea que atraviesa el punto P es paralela a la línea m .



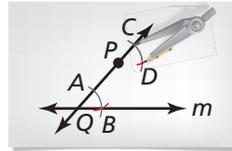
Paso 1



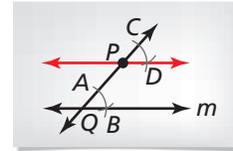
Paso 2



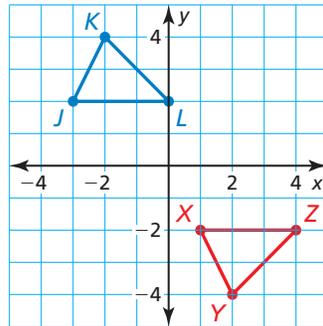
Paso 3



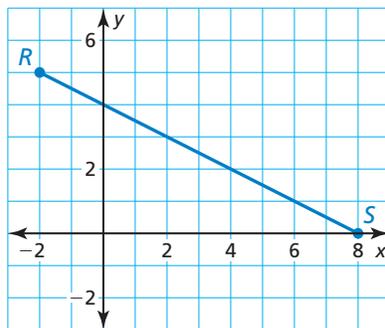
Paso 4



- El plano de coordenadas muestra $\triangle JKL$ y $\triangle XYZ$.

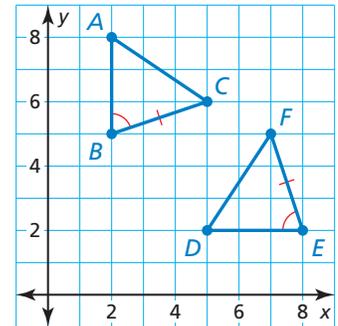


- Escribe una composición de transformaciones que mapeen $\triangle JKL$ respecto a $\triangle XYZ$.
 - ¿La composición es una transformación de congruencia? Si es así, identifica todas las partes correspondientes congruentes.
- Se muestra el segmento de recta dirigido \overline{RS} . El punto Q está ubicado a lo largo de \overline{RS} de manera que la relación de RQ respecto a QS es de 2 a 3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto Q ?

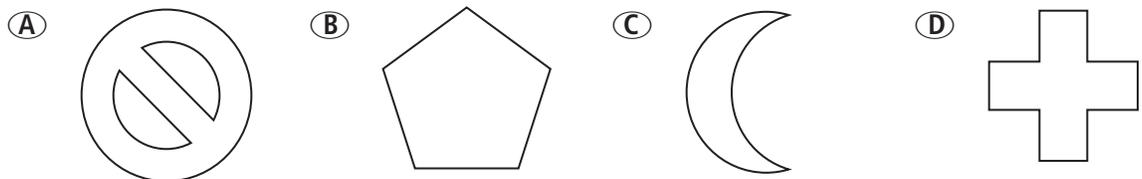


- A $Q(1.2, 3)$
 B $Q(4, 2)$
 C $Q(2, 3)$
 D $Q(-6, 7)$

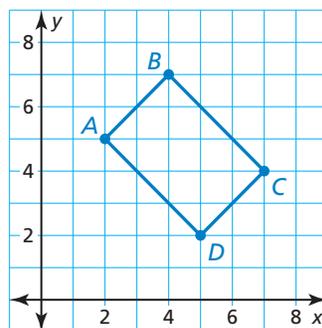
5. El plano de coordenadas muestra $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$.
- Demuestra que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ utilizando la información dada.
 - Describe la composición de movimientos rígidos que mapee $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$.



6. Los vértices de un cuadrilátero son $W(0, 0)$, $X(-1, 3)$, $Y(2, 7)$ y $Z(4, 2)$. Tu amigo afirma que el punto W no cambiará después de dilatar el cuadrilátero $WXYZ$ por un factor de escala de 2. ¿Tiene razón tu amigo? Explica tu razonamiento.
7. ¿Cuáles figura(s) tiene(n) simetría rotacional? Selecciona todas las aplicables.

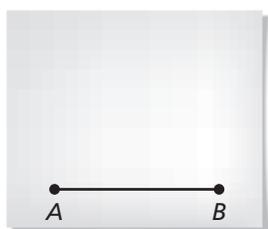


8. Escribe una prueba de coordenadas.
- Dado** Coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$
- Demostrar** El cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo.

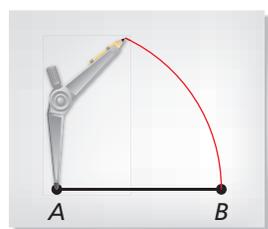


9. Escribe una prueba para verificar que la construcción del triángulo equilátero mostrado abajo es válida.

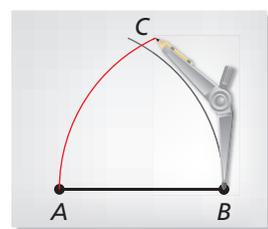
Paso 1



Paso 2



Paso 3



Paso 4

