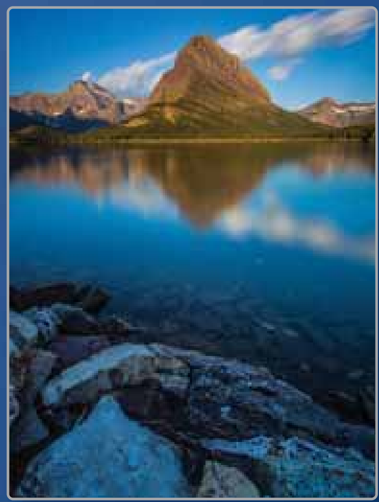
6 Relaciones dentro de los triángulos

Ciclismo ***(pág. 346)***



Montana ***(pág. 341)***

Estructura de un techo ***(pág. 331)***

Molino de viento ***(pág. 318)***

Puente ***(pág. 303)***

Mantener el dominio de las matemáticas

Escribir una ecuación de una línea perpendicular

Ejemplo 1 **Escribe la ecuación de una línea que atraviesa el punto (−2, 0) que es perpendicular a la línea $y = 2x + 8$.**

Paso 1 Halla la pendiente m de la línea perpendicular. La línea $y = 2x + 8$ tiene una pendiente de 2. Utiliza el Teorema de pendientes de rectas perpendiculares (Teorema 3.14).

$2 \cdot m = -1$ — El producto de las pendientes de líneas $\perp$ es −1.

$m = -\frac{1}{2}$ — Divide cada lado entre 2.

Paso 2 Halla la intersección de b con el eje y utilizando $m = -\frac{1}{2}$ y $(x, y) = (-2, 0)$.

$y = mx + b$ — Usa la forma de pendiente e intersección.

$0 = -\frac{1}{2}(-2) + b$ — Sustituye por m, x y y.

$-1 = b$ — Resuelve para hallar b.

▶ Como $m = -\frac{1}{2}$ y $b = -1$, una ecuación de la línea es $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Escribe una ecuación de la línea que atraviesa el punto *P* que es perpendicular a dicha línea.

1. $P(3, 1)$, $y = \frac{1}{3}x - 5$

2. $P(4, -3)$, $y = -x - 5$

3. $P(-1, -2)$, $y = -4x + 13$

Escribir desigualdades compuestas

Ejemplo 2 **Escribe cada oración como una desigualdad.**

a. Un número x es mayor que o igual a −1 y menor que 6.

Un $\underbrace{\text{número } x \text{ es mayor que o igual a } -1}_{x \geq -1}$ $\underbrace{\text{y}}_{y}$ $\underbrace{\text{menor que 6}}_{x < 6}$.

▶ Una desigualdad es $-1 \leq x < 6$.

b. Un número y es máximo 4 o mínimo 9.

Un $\underbrace{\text{número } y \text{ es máximo 4}}_{y \leq 4}$ $\underbrace{\text{o}}_{o}$ $\underbrace{\text{mínimo 9}}_{y \geq 9}$.

▶ Una desigualdad es $y \leq 4$ o $y \geq 9$.

Escribe la oración como una desigualdad.

4. Un número w es mínimo −3 y máximo 8.

5. Un número m es mayor que 0 y menor que 11

6. Un número s es menor que o igual a 5 o mayor que 2.

7. Un número d es menos que 12 y no menos que −7.

8. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** ¿Es posible que la solución de una desigualdad compuesta sean todos números reales? Explica tu razonamiento.

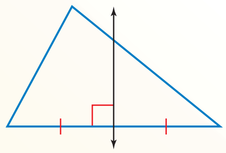
Prácticas matemáticas

Los estudiantes que dominan las matemáticas usan herramientas tecnológicas para explorar conceptos.

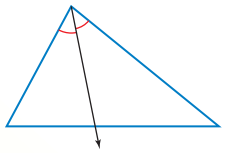
Líneas, rayos y segmentos en triángulos

Concepto Esencial

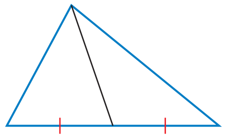
Líneas, rayos y segmentos en triángulos



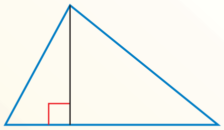
Bisectriz perpendicular



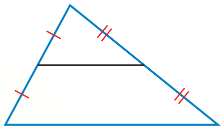
Bisectriz de un ángulo



Mediana



Altitud

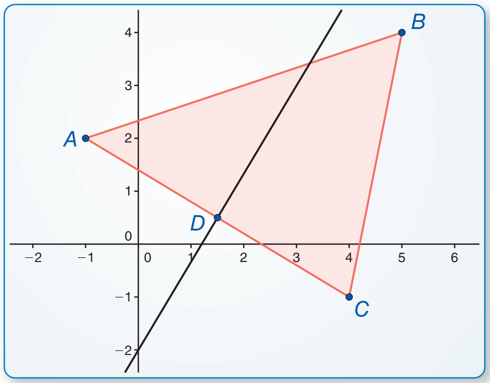


Segmento medio

EJEMPLO 1 Dibujar una bisectriz perpendicular

Utiliza el software de geometría dinámica para construir la bisectriz perpendicular de uno de los lados del triángulo con vértices $A(-1, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(4, -1)$. Halla las longitudes de los dos segmentos del lado bisecado.

SOLUCIÓN



Muestra
Puntos
$A(-1, 2)$
$B(5, 4)$
$C(4, -1)$
Línea
$-5x + 3y = -6$
Segmentos
$AD = 2.92$
$CD = 2.92$

▶ Los dos segmentos del lado bisecado tienen la misma longitud, $AD = CD = 2.92$ unidades.

Monitoreo del progreso

Consulta las figuras al inicio de la página para describir cada tipo de línea, rayo o segmento del triángulo.

1. bisectriz perpendicular **2.** bisectriz angular **3.** mediana

4. altitud **5.** segmento medio

6.1 Bisectrices perpendiculares y de ángulos

Pregunta esencial ¿Qué conjeturas puedes hacer sobre un punto sobre la bisectriz perpendicular de un segmento y un punto sobre la bisectriz de un ángulo?

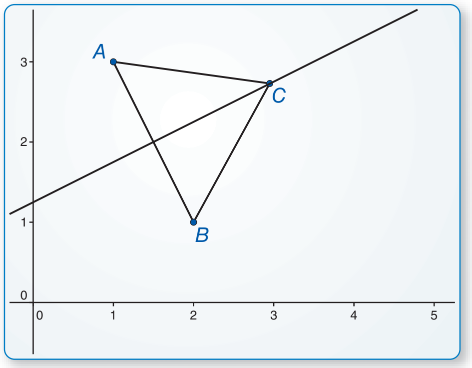
EXPLORACIÓN 1 Puntos en una bisectriz perpendicular

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica.

a. Traza cualquier segmento y rotúlalo como $\overline{AB}$. Construye la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

b. Rotula un punto C que esté sobre la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

c. Traza $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ y halla sus longitudes. Después mueve el punto C a otras ubicaciones sobre la bisectriz perpendicular y observa las longitudes de $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$.



Muestra
Puntos
$A(1, 3)$
$B(2, 1)$
$C(2.95, 2.73)$
Segmentos
$AB = 2.24$
$CA = ?$
$CB = ?$
Línea
$-x + 2y = 2.5$

d. Repite las partes (a) a (c) con otros segmentos. Describe cualquier relación que observes.

USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas visualizar los resultados de diferentes presuposiciones, explorar las consecuencias y comparar las predicciones usando los datos.

EXPLORACIÓN 2 Puntos en una bisectriz angular

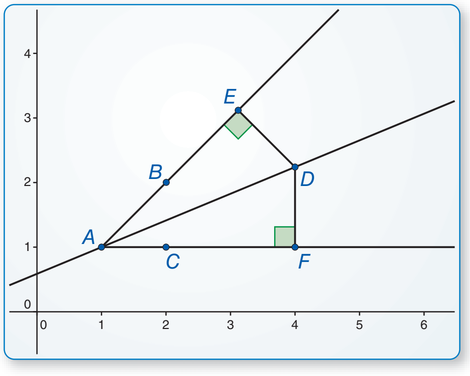
Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica.

a. Traza dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ para formar $\angle BAC$. Construye la bisectriz de $\angle BAC$.

b. Rotula un punto D en la bisectriz de $\angle BAC$.

c. Construye y halla las longitudes de los segmentos perpendiculares de D a los lados de $\angle BAC$. Mueve el punto D a lo largo de la bisectriz del ángulo y observa cómo cambian las longitudes.

d. Repite las partes (a) a (c) con otros ángulos. Describe cualquier relación que observes.



Muestra
Puntos
$A(1, 1)$
$B(2, 2)$
$C(2, 1)$
$D(4, 2.24)$
Rayos
$AB = -x + y = 0$
$AC = y = 1$
Línea
$-0.38x + 0.92y = 0.54$

Comunicar tu respuesta

3. ¿Qué conjeturas puedes hacer sobre un punto en la bisectriz perpendicular de un segmento y un punto en la bisectriz de un ángulo?

4. En la Exploración 2, ¿cuál es la distancia del punto D al $\overrightarrow{AB}$ cuando la distancia de D a $\overrightarrow{AC}$ es 5 unidades? Justifica tu respuesta.

6.1 Lección

Qué aprenderás

- Utilizar las bisectrices perpendiculares para hallar las medidas.
- Utilizar las bisectrices de un ángulo para hallar las relaciones de medida y distancia.
- Escribir ecuaciones para las bisectrices perpendiculares.

Vocabulario Esencial

equidistante, *pág. 302*

Anterior

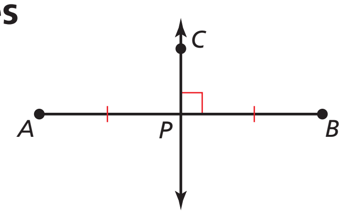
bisectriz perpendicular

bisectriz angular

Utilizar bisectrices perpendiculares

En la Sección 3.4, aprendiste que una *bisectriz perpendicular* de un segmento de línea es la línea que es perpendicular al segmento en su punto medio.

Un punto es **equidistante** respecto de dos figuras cuando el punto está a la *misma distancia* de cada figura.



$\overleftrightarrow{CP}$ es una bisectriz $\perp$ de $\overline{AB}$.

CONSEJO DE ESTUDIO

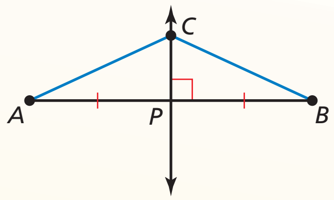
Una bisectriz perpendicular puede ser un segmento, un rayo, una línea o un plano.

Teoremas

Teorema 6.1 Teorema de la bisectriz perpendicular

En un plano, si un punto pertenece a la bisectriz perpendicular de un segmento, entonces, es equidistante respecto a los extremos del segmento.

Si $\overleftrightarrow{CP}$ es la bisectriz $\perp$ de $\overline{AB}$, entonces $CA = CB$.

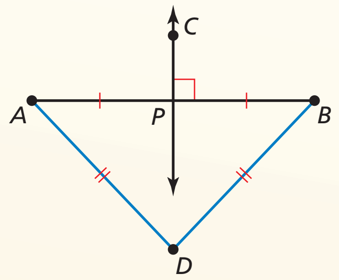


Prueba pág. 302

Teorema 6.2 Recíproco del Teorema de la bisectriz perpendicular

En un plano, si un punto es equidistante de los extremos de un segmento, entonces pertenece a la bisectriz perpendicular del segmento.

Si $DA = DB$, entonces el punto D pertenece a la bisectriz $\perp$ de $\overline{AB}$.

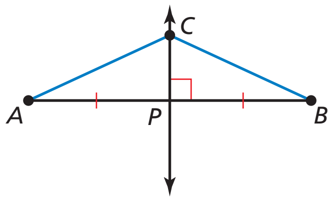


Prueba Ej. 32, pág. 308

PRUEBA **Teorema de la bisectriz perpendicular**

Dado $\overleftrightarrow{CP}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

Demostrar $CA = CB$

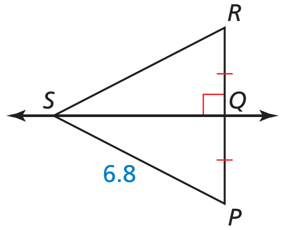


Prueba de párrafo Como $\overleftrightarrow{CP}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$, $\overleftrightarrow{CP}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y el punto P es el punto medio de $\overline{AB}$. Según la definición del punto medio $AP = BP$, y la definición de las rectas perpendiculares, $m\angle CPA = m\angle CPB = 90°$. Entonces, como la definición de la congruencia de segmento, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ y según la definición de la congruencia de ángulos, $\angle CPA \cong \angle CPB$. Según la Propiedad reflexiva de congruencia (Teorema 2.1), $\overline{CP} \cong \overline{CP}$. Entonces, $\triangle CPA \cong \triangle CPB$ por el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5), y $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ porque las partes correspondientes de triángulos congruentes, también son congruentes. Entonces, $CA = CB$ según la definición de la congruencia de segmentos.

EJEMPLO 1 Utilizar los teoremas de bisectriz perpendicular

Halla la medida.

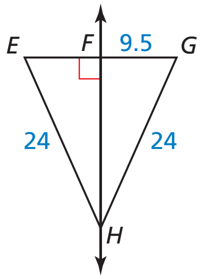
a. RS



De la figura, $\overleftrightarrow{SQ}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{PR}$. Según el Teorema de la bisectriz perpendicular, $PS = RS$.

▶ Entonces, $RS = PS = 6.8$.

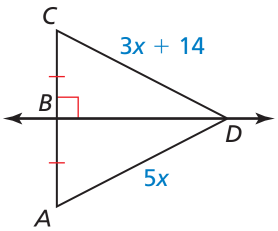
b. EG



Debido a que $EH = GH$ y $\overleftrightarrow{HF} \perp \overline{EG}$, $\overleftrightarrow{HF}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{EG}$ según el recíproco del Teorema de la bisectriz perpendicular. Por la definición de la bisectriz de segmentos, $EG = 2GF$.

▶ Entonces, $EG = 2(9.5) = 19$.

c. AD

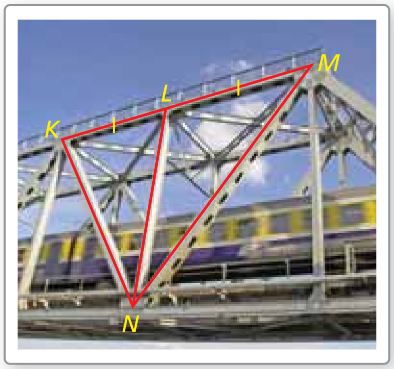


De la figura, $\overleftrightarrow{BD}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AC}$.

$AD = CD$	Teorema de la bisectriz perpendicular
$5x = 3x + 14$	Sustituye.
$x = 7$	Resuelve para hallar x.

▶ Entonces, $AD = 5x = 5(7) = 35$.

EJEMPLO 2 Resolver un problema de la vida real



¿Hay la suficiente información en el diagrama para concluir que el punto N pertenece a la bisectriz perpendicular de $\overline{KM}$?

SOLUCIÓN

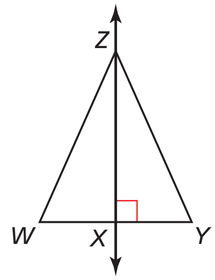
Se sabe que $\overline{KL} \cong \overline{ML}$. Entonces, $\overline{LN}$ es una bisectriz de segmento $\overline{KM}$. No sabes si, $\overline{LN}$ es perpendicular a $\overline{KM}$ debido a que no se indica en el diagrama.

▶ Entonces, no puedes concluir que el punto N pertenece a la bisectriz perpendicular de $\overline{KM}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Utiliza el diagrama y la información dada para hallar la medida indicada.

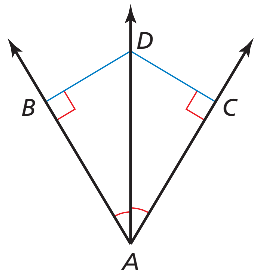


1. $\overleftrightarrow{ZX}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{WY}$, y $YZ = 13.75$. Halla WZ.

2. $\overleftrightarrow{ZX}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{WY}$, $WZ = 4n - 13$ y $YZ = n + 17$. Halla YZ.

3. Halla WX cuando $WZ = 20.5$, $WY = 14.8$ y $YZ = 20.5$.

Utilizar las bisectrices de un ángulo



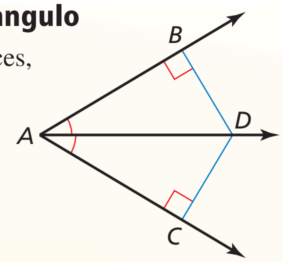
En la Sección 1.5, aprendiste que una *bisectriz de un ángulo* es un rayo que divide un ángulo en dos adyacentes congruentes. También sabes que la *distancia de un punto a una línea* es la longitud de un segmento perpendicular, del punto a la línea. Entonces, en la figura, $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz de $\angle BAC$, y la distancia de un punto D a $\overrightarrow{AB}$ es DB, donde $\overline{DB} \perp \overrightarrow{AB}$.

Teoremas

Teorema 6.3 Teorema de la bisectriz de un ángulo

Si un punto pertenece a la bisectriz de un ángulo, entonces, es equidistante de los dos lados del ángulo.

Si $\overrightarrow{AD}$ biseca $\angle BAC$ y $\overline{DB} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overline{DC} \perp \overrightarrow{AC}$ entonces $DB = DC$.

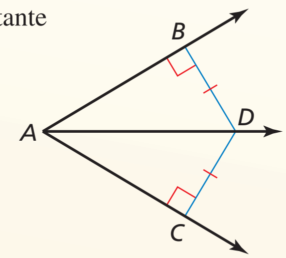


Prueba Ej. 33(a), pág. 308

Teorema 6.4 Recíproco del Teorema de la bisectriz de un ángulo

Si un punto está en el interior de un ángulo y es equidistante de los dos lados del ángulo, entonces, pertenece a la bisectriz del ángulo.

Si $\overline{DB} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overline{DC} \perp \overrightarrow{AC}$ y $DB = DC$, entonces, $\overrightarrow{AD}$ biseca a $\angle BAC$.

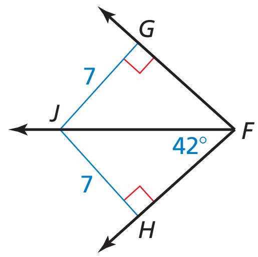


Prueba Ej. 33(b), pág. 308

EJEMPLO 3 Utilizar los Teoremas de la bisectriz de un ángulo

Halla cada medida.

a. $m\angle GFJ$

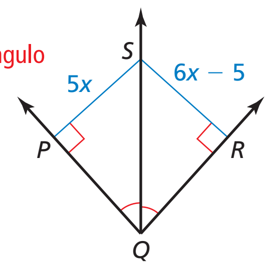


Como $\overline{JG} \perp \overrightarrow{FG}$ y $\overline{JH} \perp \overrightarrow{FH}$ y $JG = JH = 7$, $\overrightarrow{FJ}$ biseca a $\angle GFH$ según el recíproco del Teorema de la bisectriz de un ángulo.

▶ Entonces, $m\angle GFJ = m\angle HFJ = 42°$.

b. RS

$PS = RS$	Teorema de la bisectriz de un ángulo
$5x = 6x - 5$	Sustituye.
$5 = x$	Resuelve para hallar x.

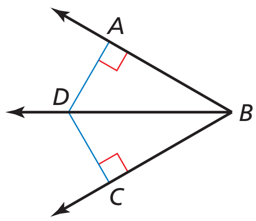


▶ Entonces, $RS = 6x - 5 = 6(5) - 5 = 25$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Utiliza el diagrama y la información dada para hallar la medida indicada.



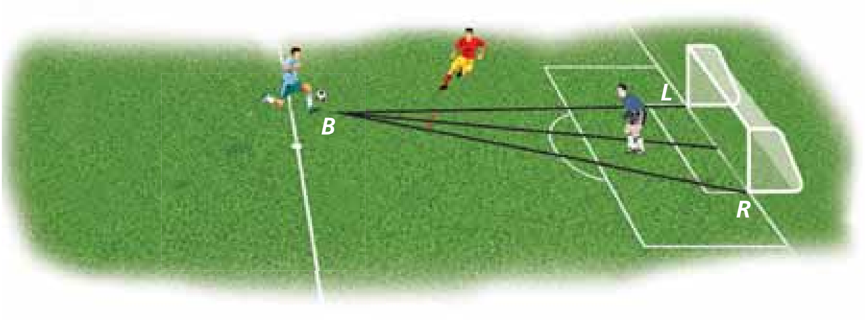
4. $\overrightarrow{BD}$ biseca a $\angle ABC$, y $DC = 6.9$. Halla DA.

5. $\overrightarrow{BD}$ biseca a $\angle ABC$, $AD = 3z + 7$, y $CD = 2z + 11$. Halla CD.

6. Halla $m\angle ABC$ cuando $AD = 3.2$, $CD = 3.2$ y $m\angle DBC = 39°$.

EJEMPLO 4 Resolver un problema de la vida real

La posición del portero de soccer en relación con el balón y la portería forma ángulos congruentes, como se muestra. ¿El portero tendrá que alejarse más para bloquear un tiro hacia la portería derecha R o hacia la portería izquierda L?



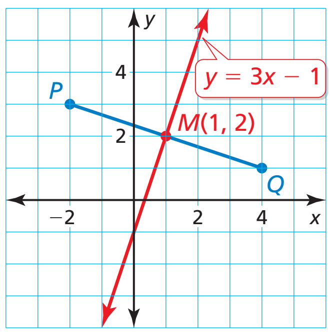
SOLUCIÓN

Los ángulos congruentes te indican que el portero está en la bisectriz de $\angle LBR$. Según el Teorema de la bisectriz del ángulo, el portero es equidistante de $\overrightarrow{BR}$ y $\overrightarrow{BL}$.

▶ Entonces, el portero se debe mover a la misma distancia para bloquear cualquier tiro.

Escribir ecuaciones para las bisectrices perpendiculares

EJEMPLO 5 Escribir una ecuación para una bisectriz



Escribe una ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento con extremos $P(-2, 3)$ y $Q(4, 1)$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Grafica $\overline{PQ}$. Por definición, la bisectriz perpendicular de $\overline{PQ}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$ en su punto medio.

Paso 2 Halla el punto medio M de $\overline{PQ}$.

$$M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = M\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = M(1, 2)$$

Paso 3 Halla la pendiente de la bisectriz perpendicular.

$$\text{pendiente de } \overline{PQ} = \frac{1-3}{4-(-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Debido a que las pendientes de las rectas perpendiculares son recíprocos negativos, la pendiente de la bisectriz perpendicular es 3.

Paso 4 Escribe una ecuación. La bisectriz de $\overline{PQ}$ tiene una pendiente 3 y atraviesa (1, 2).

$y = mx + b$ Usa la forma de pendiente e intersección.

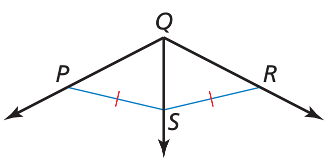
$2 = 3(1) + b$ Sustituye para *m, x* y *y*.

$-1 = b$ Resuelve para hallar *b*.

▶ Entonces, la ecuación de la bisectriz perpendicular de $\overline{PQ}$ es $y = 3x - 1$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*



7. ¿Tienes suficiente información para concluir que $\overrightarrow{QS}$ biseca a $\angle PQR$? Explica.

8. Escribe una ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento con extremos $(-1, -5)$ y $(3, -1)$.

6.1 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** El punto C está en el interior de $\angle DEF$. Si $\angle DEC$ y $\angle CEF$ son congruentes, entonces $\overrightarrow{EC}$ es _________ de $\angle DEF$.

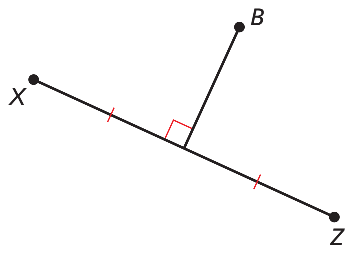
2. **DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** ¿Cuál es distinta? Halla “ambas” respuestas.

¿El punto B está a la misma distancia de X y Z?

¿El punto B es equidistante de X y Z?

¿El punto B es colineal con X y Z?

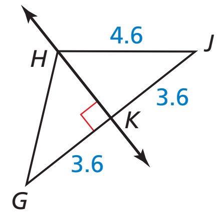
¿El punto B se encuentra en la bisectriz perpendicular de $\overline{XZ}$?



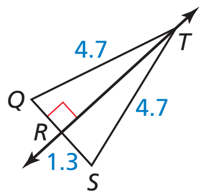
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, halla la medida indicada. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 1).*

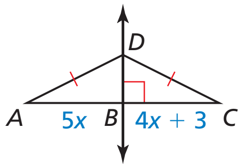
3. GH



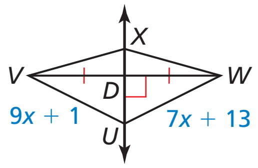
4. QR



5. AB

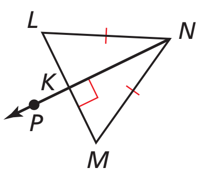


6. UW

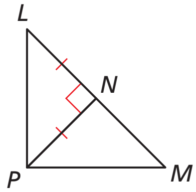


En los Ejercicios 7–10, indica si la información en el diagrama te permite concluir que el punto P pertenece a la bisectriz perpendicular de $\overline{LM}$. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 2).*

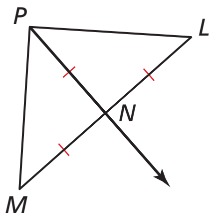
7.



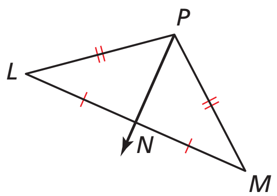
8.



9.

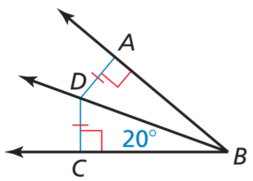


10.

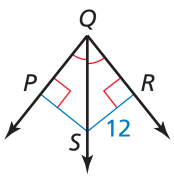


En los Ejercicios 11–14, halla la medida indicada. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 3).*

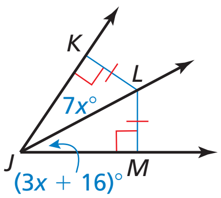
11. $m\angle ABD$



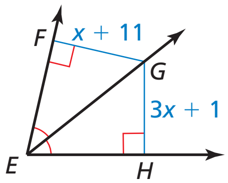
12. PS



13. $m\angle KJL$

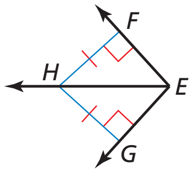


14. FG

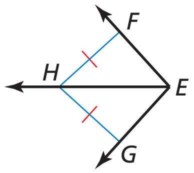


En los Ejercicios 15 y 16, indica si la información en el diagrama te permite concluir que $\overrightarrow{EH}$ biseca a $\angle FEG$. Explica tu razonamiento. *(Consulte el Ejemplo 4).*

15.

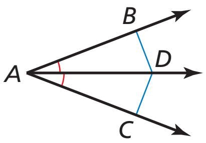


16.

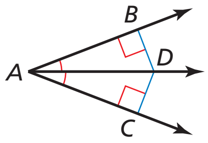


En los Ejercicios 17 y 18, indica si la información en el diagrama te permite concluir que $DB = DC$. Explica tu razonamiento.

17.



18.



En los Ejercicios 19–22, escribe una ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento con los extremos dados. *(Consulta el Ejemplo 5).*

19. $M(1, 5)$, $N(7, -1)$

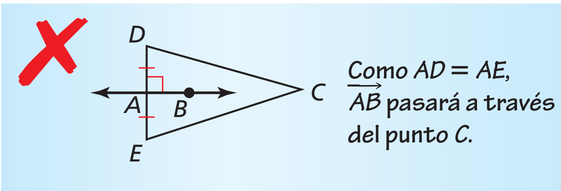
20. $Q(-2, 0)$, $R(6, 12)$

21. $U(-3, 4)$, $V(9, 8)$

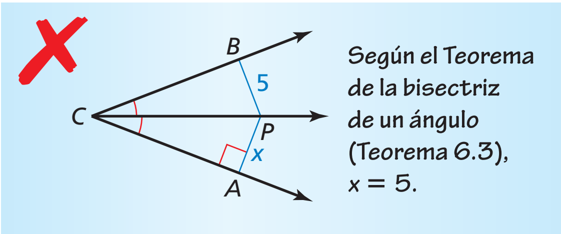
22. $Y(10, -7)$, $Z(-4, 1)$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 23 y 24, Describe y corrige el error cometido en el razonamiento del estudiante.**

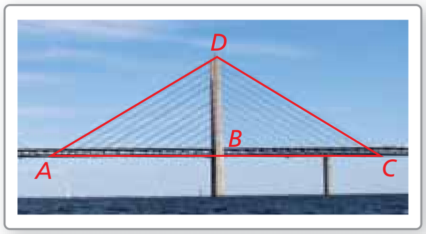
23.



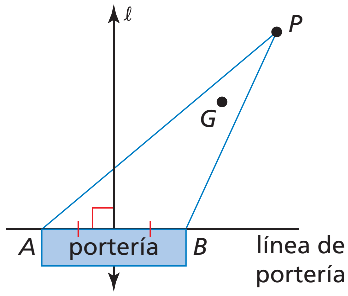
24.



25. REPRESENTAR MATEMÁTICAS En la foto, el camino es perpendicular al poste de soporte y $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. ¿Qué teorema te permite concluir que $\overline{AD} \cong \overline{CD}$?



26. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS El diagrama muestra la posición del portero y del puck durante un partido de hockey. El portero está en el punto G, y el puck está en el punto P.



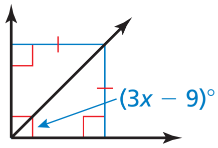
a. ¿Cuál sería la relación entre $\overrightarrow{PG}$ y $\angle APB$ para que el portero tenga distancias iguales para desplazarse en cada lado de $\overrightarrow{PG}$?

b. ¿Cómo cambia $m\angle APB$ a medida que el puck se acerca a la portería? ¿Este cambio facilita o dificulta la defensa del portero? Explica tu razonamiento.

27. CONSTRUCCIÓN Utiliza un compás y una regla para construir una copia de $\overline{XY}$. Construye una bisectriz perpendicular y traza un punto Z en la bisectriz de manera que la distancia entre el punto Z y $\overline{XY}$ sea de 3 centímetros. Mide $\overline{XZ}$ y $\overline{YZ}$. ¿Qué teorema demuestra esta construcción?

28. ESCRIBIR Explica cómo se relaciona el Teorema de la bisectriz perpendicular (Teorema 6.2) con la construcción de una bisectriz perpendicular.

29. RAZONAR ¿Cuál es el valor de x en el diagrama?



Ⓐ 13

Ⓑ 18

Ⓒ 33

Ⓓ no hay suficiente información

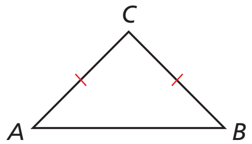
30. RAZONAR ¿Qué punto pertenece a la bisectriz perpendicular del segmento con extremos $M(7, 5)$ y $N(-1, 5)$?

Ⓐ $(2, 0)$ Ⓑ $(3, 9)$

Ⓒ $(4, 1)$ Ⓓ $(1, 3)$

31. ARGUMENTAR Tu amigo dice que es imposible que la bisectriz de un ángulo de un triángulo esté en la misma línea que la bisectriz perpendicular del lado opuesto. ¿Tu amigo tiene razón? Explica tu razonamiento.

32. DEMOSTRAR UN TEOREMA Demuestra el recíproco del Teorema de la bisectriz perpendicular (Teorema 6.2). (*Sugerencia:* Construye una línea a través del punto C perpendicular a $\overline{AB}$ al punto P.)



Dado $CA = CB$

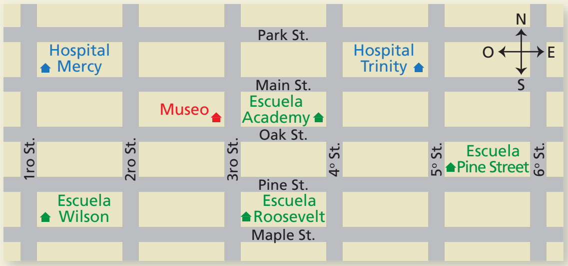
Demostrar El punto C pertenece a la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

33. DEMOSTRAR UN TEOREMA Utiliza el Teorema de congruencia para demostrar cada teorema.

a. Teorema de la bisectriz de un ángulo (Teorema 6.3)

b. Recíproco del Teorema de la bisectriz de un ángulo (Teorema 6.4)

34. ¿CÓMO LO VES? La figura muestra el mapa de una ciudad. La ciudad está organizada de tal manera que, cada cuadra de norte a sur tiene la misma longitud y cada cuadra de este a oeste tiene la misma longitud.



a. ¿Qué escuela es aproximadamente equidistante de ambos hospitales? Explica tu razonamiento.

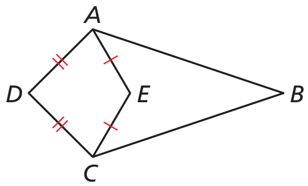
b. ¿El museo es aproximadamente equidistante de Escuela Wilson y Escuela Roosevelt? Explica tu razonamiento.

35. CONEXIONES MATEMÁTICAS Escribe una ecuación cuya gráfica consista en todos los puntos en los cuadrantes dados que sean equidistantes del eje x y el eje y.

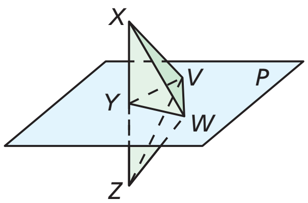
a. I y III **b.** II y IV **c.** I y II

36. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Los postulados y teoremas de este libro representan la geometría Euclidiana. En la geometría esférica, todos los puntos están sobre la superficie de una esfera. Una línea es un círculo en la esfera cuyo diámetro es igual al diámetro de la esfera. En la geometría esférica, ¿es posible que dos líneas sean perpendiculares pero que no se bisequen entre sí? Explica tu razonamiento.

37. PRUEBA Utiliza la información en el diagrama para demostrar que $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ si y sólo si los puntos D, E y B son colineales.



38. PRUEBA Demuestra los enunciados en las partes (a) a (c).



Dado El plano P es una bisectriz perpendicular de $\overline{XZ}$ en el punto Y.

Demostrar **a.** $\overline{XW} \cong \overline{ZW}$

b. $\overline{XV} \cong \overline{ZV}$

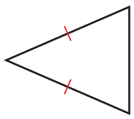
c. $\angle VXW \cong \angle VZW$

Mantener el dominio de las matemáticas

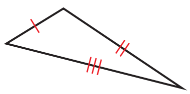
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Clasifica el triángulo por sus lados. *(Sección 5.1)*

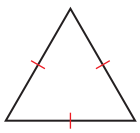
39.



40.

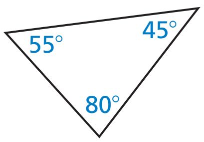


41.

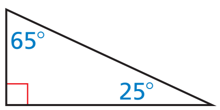


Clasifica el triángulo por sus ángulos. *(Sección 5.1)*

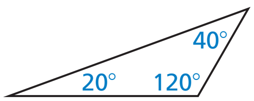
42.



43.



44.



6.2 Bisectrices de triángulos

Pregunta esencial ¿Qué conjeturas puedes hacer sobre las bisectrices perpendiculares y las bisectrices de ángulo de un triángulo?

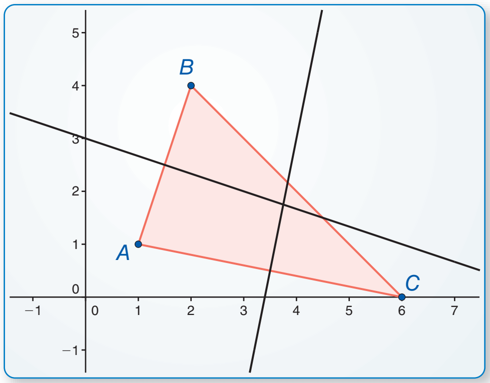
EXPLORACIÓN 1 Propiedades de las bisectrices perpendiculares de un triángulo

Trabaja con un compañero. Utiliza el software geométrico dinámico. Traza cualquier $\triangle ABC$.

a. Construye bisectrices perpendiculares de los tres lados de $\triangle ABC$. Después arrastra los vértices para cambiar $\triangle ABC$. ¿Qué observas acerca de las bisectrices perpendiculares?

b. Rotula un punto D en la intersección de bisectrices perpendiculares.

c. Traza un círculo con un centro D a través del vértice A de $\triangle ABC$. Después arrastra los vértices para cambiar $\triangle ABC$. ¿Qué observas?



Muestra
Puntos
$A(1, 1)$
$B(2, 4)$
$C(6, 0)$
Segmentos
$BC = 5.66$
$AC = 5.10$
$AB = 3.16$
Líneas
$x + 3y = 9$
$-5x + y = -17$

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas, necesitas ver cosas complicadas, como objetos simples o como objetos compuestos por otros.

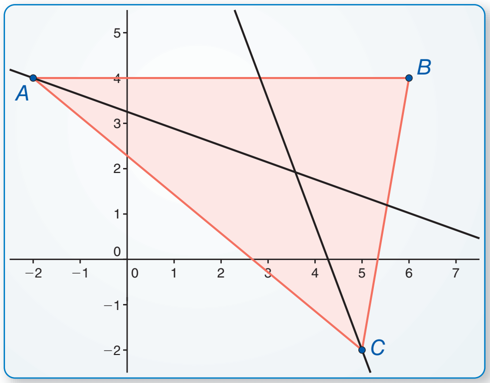
EXPLORACIÓN 2 Propiedades de las bisectrices de ángulo de un triángulo

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica. Traza cualquier $\triangle ABC$.

a. Construye bisectrices de ángulo para los tres ángulos de $\triangle ABC$. Después arrastra los vértices para cambiar $\triangle ABC$. ¿Qué observas acerca de las bisectrices de ángulo?

b. Rotula un punto D en la intersección de las bisectrices de ángulo.

c. Halla la distancia entre D y $\overline{AB}$. Traza el círculo con el centro D y esta distancia como un radio. Después arrastra los vértices para cambiar $\triangle ABC$. ¿Qué observas?



Muestra
Puntos
$A(-2, 4)$
$B(6, 4)$
$C(5, -2)$
Segmentos
$BC = 6.08$
$AC = 9.22$
$AB = 8$
Líneas
$0.35x + 0.94y = 3.06$
$-0.94x - 0.34y = -4.02$

Comunicar tu respuesta

3. ¿Qué conjeturas puedes hacer sobre las bisectrices perpendiculares y las bisectrices de ángulo de un triángulo?

6.2 Lección

Vocabulario Esencial

concurrente, *pág. 310*
punto de concurrencia, *pág. 310*
circuncentro, *pág. 310*
incentro, *pág. 310*

Anterior
bisectriz perpendicular
bisectriz angular

Qué aprenderás

- Utilizar y hallar la circunferencia de un triángulo.
- Utilizar y hallar el incentro de un triángulo.

Usar la circunferencia de un triángulo

Cuando tres o más rectas, rayos o segmentos se intersecan en el mismo punto, se llaman rectas, rayos o segmentos **concurrentes**. El punto de intersección de las rectas, rayos o segmentos se llama **punto de concurrencia**.

En un triángulo, tres bisectrices perpendiculares son concurrentes. El punto de concurrencia es el **circuncentro** del triángulo.

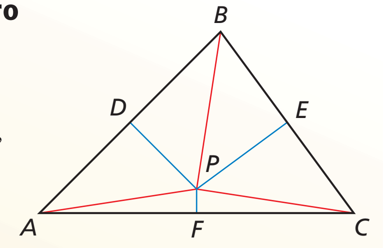
Teoremas

Teorema 6.5 Teorema del circuncentro

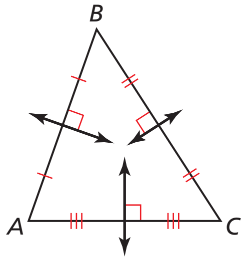
El circuncentro de un triángulo es equidistante de los vértices del triángulo.

Si $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ son bisectrices perpendiculares, entonces $PA = PB = PC$.

Prueba pág. 310



PRUEBA Teorema del circuncentro



Dado $\triangle ABC$; las bisectrices perpendiculares de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Demostrar Las bisectrices perpendiculares se intersecan en un punto, ese punto es equidistante de A, B y C.

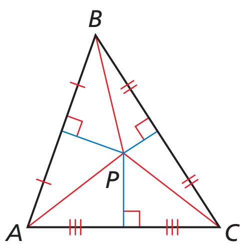
Planea la prueba Demuestra que P, el punto de intersección de las bisectrices perpendiculares de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, también pertenece a la bisectriz perpendicular de $\overline{AC}$. Después demuestra que el punto P es equidistante de los vértices del triángulo.

Plan en acción

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\triangle ABC$; las bisectrices perpendiculares de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$	**1.** Dado
2. Las bisectrices perpendiculares de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ intersecan en algún punto P.	**2.** Debido a que los lados de un triángulo no pueden ser paralelos, estas bisectrices perpendiculares se deben intersecar en algún punto. Sea este punto P.
3. Traza $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$.	**3.** Postulado de dos puntos (Postulado 2.1)
4. $PA = PB$, $PB = PC$	**4.** Teorema de la bisectriz perpendicular (Teorema 6.1)
5. $PA = PC$	**5.** Propiedad transitiva de la igualdad
6. P está en la bisectriz perpendicular de $\overline{AC}$.	**6.** Recíproco del Teorema de la bisectriz perpendicular (Teorema 6.2)
7. $PA = PB = PC$. Entonces, P es equidistante de los vértices del triángulo.	**7.** A partir de los resultados de los pasos 4 y 5 y de la definición de la equidistante.

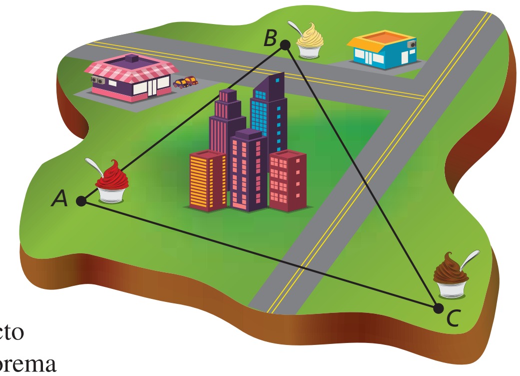
CONSEJO DE ESTUDIO

Utiliza diagramas como el de abajo para ayudarte a visualizar tu prueba.



EJEMPLO 1 Resolver un problema de la vida real

Tres puestos de bocadillos venden yogurt helado, en los puntos A, B y C a las afueras de una ciudad. Cada uno de estos puestos está a la misma distancia del distribuidor de yogurt congelado.

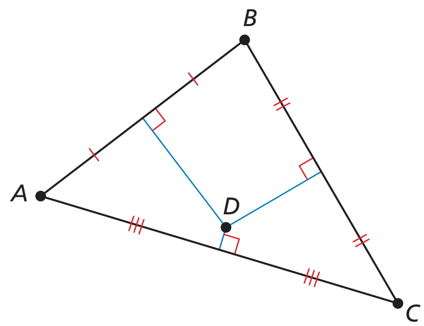


Halla la ubicación del distribuidor.

SOLUCIÓN

El distribuidor está equidistante respecto a los tres puestos de bocadillos. El Teorema del circuncentro demuestra que puedes encontrar un punto equidistante de tres puntos usando las bisectrices perpendiculares del triángulo formado por esos puntos.

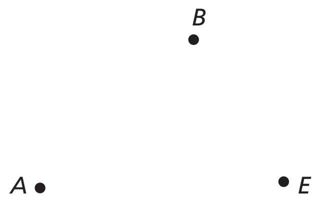
Copia las posiciones de los puntos A, B y C y conecta los puntos para trazar $\triangle ABC$. Después, utiliza una regla y un transportador para trazar las tres bisectrices perpendiculares de $\triangle ABC$. El circuncentro D está en la ubicación del distribuidor.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

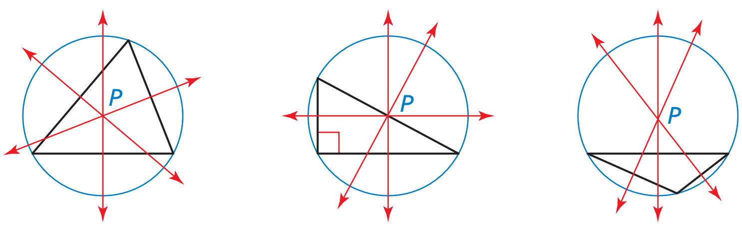
1. Tres puestos de bocadillos venden pretzels calientes en los puntos A, B y E. ¿Cuál es la ubicación del distribuidor de pretzel si éste está equidistante de los tres puestos? Dibuja el triángulo y muestra la ubicación.



LEER

El prefijo *circum-* significa "alrededor" o "cerca de", como en *circunferencia* (distancia alrededor de un círculo).

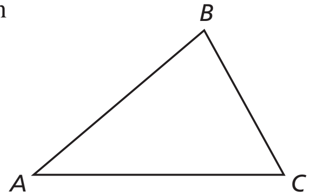
El circuncentro P es equidistante desde los tres vértices, entonces, P es el centro de un círculo que pasa por los tres vértices. Como se muestra abajo, la ubicación de P depende del tipo del triángulo. Se dice que el círculo con el centro P está *circunscrito* en torno al triángulo.



El triángulo acutángulo está dentro del triángulo. | El triángulo rectángulo *P* está en el triángulo. | El triángulo obtusángulo está fuera del triángulo.

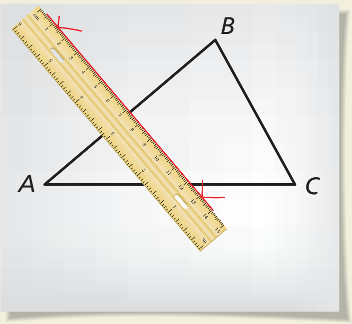
CONSTRUCCIÓN Circunscribir un círculo en torno a un triángulo

Utiliza un compás y una regla para construir un círculo que esté circunscrito en torno a $\triangle ABC$.



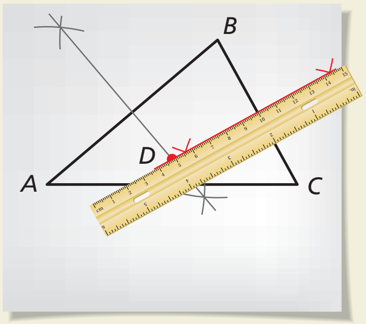
SOLUCIÓN

Paso 1



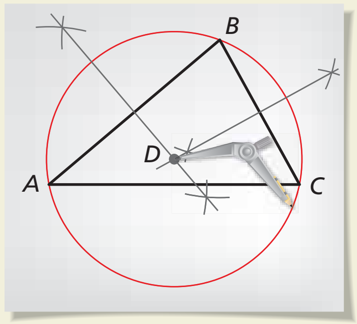
Dibuja una bisectriz Dibuja la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

Paso 2



Dibuja una bisectriz Dibuja la bisectriz perpendicular de $\overline{BC}$. Rotula la intersección de las bisectrices D. Éste es el circuncentro.

Paso 3



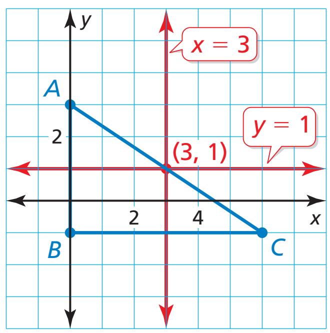
Dibuja un círculo Coloca el compás en D. Establece el ancho usando cualquier vértice del triángulo. Éste es el radio del *circuncírculo*. Dibuja el círculo; debe pasar por los tres vértices A, B y C.

CONSEJO DE ESTUDIO

Observa que sólo necesitas hallar las ecuaciones de *dos* bisectrices perpendiculares. Puedes usar la bisectriz perpendicular del tercer lado para verificar tu resultado.

EJEMPLO 2 Hallar el circuncentro de un triángulo

Halla las coordenadas del circuncentro de $\triangle ABC$ con los vértices $A(0, 3)$, $B(0, -1)$ y $C(6, -1)$.



SOLUCIÓN

Paso 1 Grafica $\triangle ABC$.

Paso 2 Halla las ecuaciones de dos bisectrices perpendiculares. Utiliza el Teorema de las pendientes de las rectas perpendiculares (Teorema 3.14), según el cual las rectas horizontales son perpendiculares a las rectas verticales.

El punto medio de $\overline{AB}$ es $(0, 1)$. La línea que atraviesa $(0, 1)$ que es perpendicular a $\overline{AB}$ es $y = 1$.

El punto medio de $\overline{BC}$ es $(3, -1)$. La línea que atraviesa $(3, -1)$, que es perpendicular a $\overline{BC}$ es $x = 3$.

Paso 3 Halla el punto donde $x = 3$ y $y = 1$ se intersecan. Se intersecan en $(3, 1)$.

▶ Entonces, las coordenadas del circuncentro son $(3, 1)$.

DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS

Como $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, el circuncentro pertenece al triángulo.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo con los vértices dados.

2. $R(-2, 5)$, $S(-6, 5)$, $T(-2, -1)$

3. $W(-1, 4)$, $X(1, 4)$, $Y(1, -6)$

Utilizar el incentro de un triángulo

Así como un triángulo tiene tres bisectrices perpendiculares, también tiene tres bisectrices de ángulo. Las bisectrices de ángulo de un triángulo también son concurrentes. Este punto de concurrencia es el **incentro** del triángulo. En cualquier triángulo, el incentro siempre se encuentra dentro del triángulo.

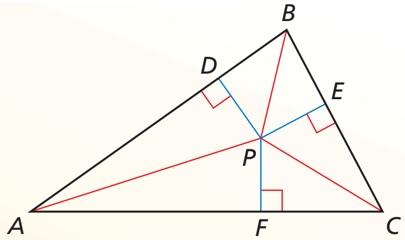
Teorema

Teorema 6.6 Teorema del incentro

El incentro de un triángulo es equidistante de los lados del triángulo.

Si $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CP}$ son bisectrices de $\triangle ABC$, entonces $PD = PE = PF$.

Prueba Ej. 38, pág. 317

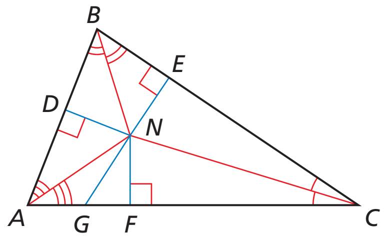


EJEMPLO 3 Utilizar el incentro de un triángulo

En la figura mostrada, $ND = 5x - 1$ y $NE = 2x + 11$.

a. Halla NF.

b. ¿NG puede ser igual a 18? Explica tu razonamiento.



SOLUCIÓN

a. N está en el incentro de $\triangle ABC$ porque es el punto de concurrencia de las tres bisectrices de ángulo. Entonces, según el Teorema del incentro, $ND = NE = NF$.

Paso 1 Resuelve para hallar x.

$$ND = NE \qquad \text{Teorema del incentro}$$

$$5x - 1 = 2x + 11 \qquad \text{Sustituye.}$$

$$x = 4 \qquad \text{Resuelve para hallar } x.$$

Paso 2 Halla ND (o NE).

$$ND = 5x - 1 = 5(4) - 1 = 19$$

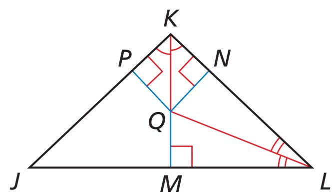
▶ Por tanto, como $ND = NF$, $NF = 19$.

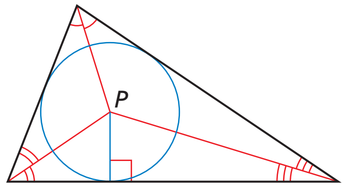
b. Recuerda que la distancia más corta entre un punto y una línea es un segmento perpendicular. En este caso el segmento perpendicular es $\overline{NF}$, el cual tiene una longitud de 19. Como $18 < 19$, NG no puede ser igual a 18.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. En la figura mostrada, $QM = 3x + 8$ y $QN = 7x + 2$. Halla QP.

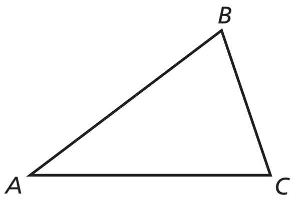




Como el incentro P es equidistante de los tres lados de un triángulo, un círculo trazado que utilice P como centro y la distancia de un lado del triángulo como radio, únicamente tocará los otros dos lados del triángulo. Se dice que el círculo está *inscrito* dentro del triángulo.

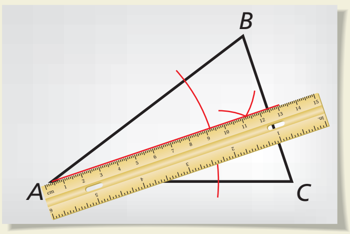
CONSTRUCCIÓN Inscribir un círculo dentro de un triángulo

Utiliza un compás y una regla para construir un círculo inscrito dentro de $\triangle ABC$.



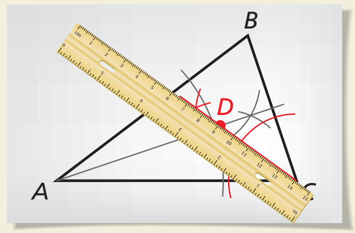
SOLUCIÓN

Paso 1



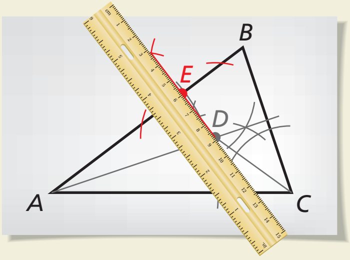
Dibuja una bisectriz Dibuja la bisectriz de ángulo de $\angle A$.

Paso 2



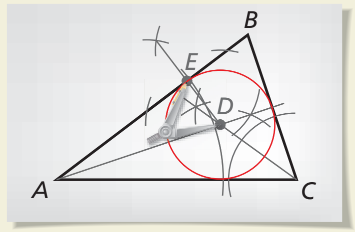
Dibuja una bisectriz Dibuja una bisectriz de ángulo de $\angle C$. Rotula la intersección de las bisectrices D. Éste es el incentro.

Paso 3



Dibuja una línea perpendicular Dibuja una línea perpendicular de D a $\overline{AB}$. Rotula el punto donde $\overline{AB}$ se interseca como E.

Paso 4



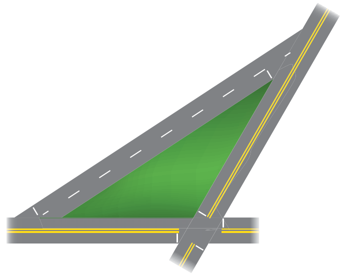
Dibuja un círculo Coloca el compás en D. Ajusta el ancho hasta E. Este es el radio del *incírculo*. Dibuja el círculo; éste debe tocar cada lado del triángulo.

EJEMPLO 4 Resolver un problema de la vida real

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN

Tienes que poner mucha atención a la forma en que se explica el problema. Lo ideal es que el poste de luz esté a la *misma distancia* de las tres calles, no en donde las calles se intersecan.

En una ciudad se desea colocar un poste de luz en el boulevard mostrado, de manera que el poste de luz esté a la misma distancia de las tres calles. ¿La ubicación del poste de luz deberá estar en el *circuncentro* o *incentro* del boulevard triangular? Explica.



SOLUCIÓN

Como la forma del boulevard es un triángulo obtusángulo, el circuncentro está afuera del triángulo. Entonces, la ubicación del puente de luz no puede estar en el circuncentro. Lo ideal es que el poste de luz esté a la misma distancia de las tres calles. Según el Teorema del incentro, el incentro del triángulo es equidistante de los lados del triángulo.

▶ Entonces, la ubicación del poste de luz debe estar en el incentro del boulevard.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

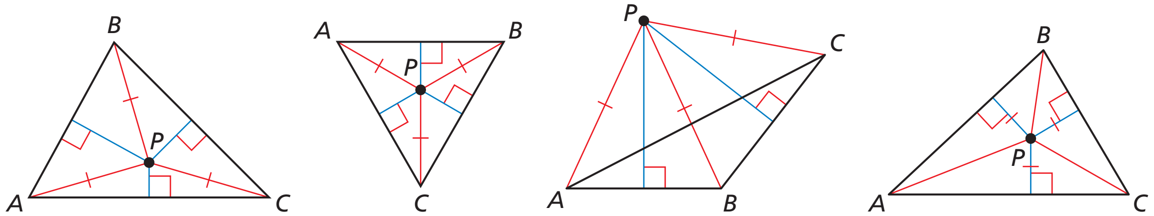
5. Dibuja un boceto para mostrar la ubicación L del poste de luz en el Ejemplo 4.

6.2 Ejercicios

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** Cuando hay tres o más rectas, rayos o segmentos que se intersecan en el mismo punto, se llaman rectas, rayos o segmentos ____________.

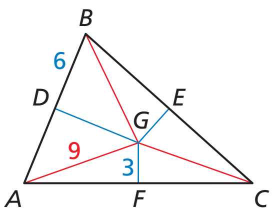
2. **¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Qué triángulo no pertenece a los otros tres? Explica tu razonamiento.



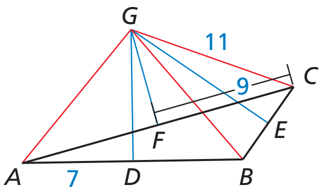
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3 y 4, las bisectrices perpendiculares de △*ABC* se intersecan en el punto *G* y se muestran en azul. Halla la medida indicada.

3. Halla *BG*.

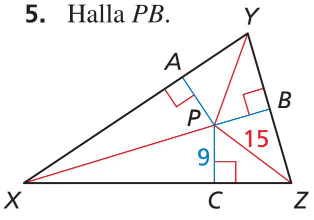


4. Halla *GA*.

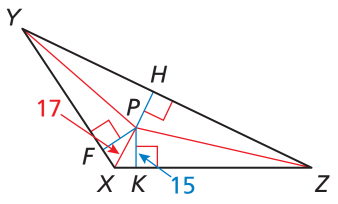


En los Ejercicios 5 y 6, las bisectrices de ángulo de △*XYZ* se intersecan en el punto *P* y se muestran en rojo. Halla la medida indicada.

5. Halla *PB*.



6. Halla *HP*.



En los Ejercicios 7–10, halla las coordenadas del circuncentro del triángulo con los vértices dados. *(Consulta el Ejemplo 2).*

7. $A(2, 6)$, $B(8, 6)$, $C(8, 10)$

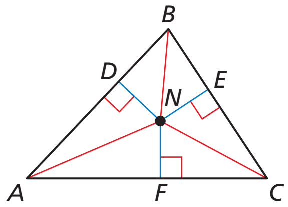
8. $D(-7, -1)$, $E(-1, -1)$, $F(-7, -9)$

9. $H(-10, 7)$, $J(-6, 3)$, $K(-2, 3)$

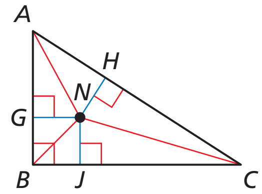
10. $L(3, -6)$, $M(5, -3)$, $N(8, -6)$

En los Ejercicios 11–14, *N* es el incentro de △*ABC*. Utiliza la información dada para hallar la medida indicada. *(Consulta el Ejemplo 3).*

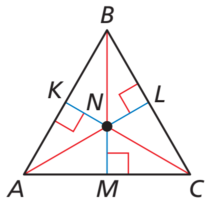
11. $ND = 6x - 2$
    $NE = 3x + 7$
    Halla *NF*.



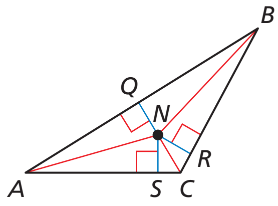
12. $NG = x + 3$
    $NH = 2x - 3$
    Halla *NJ*.



13. $NK = 2x - 2$
    $NL = -x + 10$
    Halla *NM*.



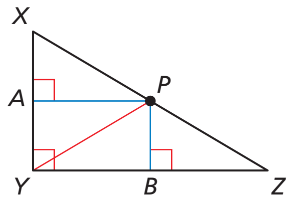
14. $NQ = 2x$
    $NR = 3x - 2$
    Halla *NS*.



15. *P* es el circuncentro de △*XYZ*. Utiliza la información dada para hallar *PZ*.

$PX = 3x + 2$

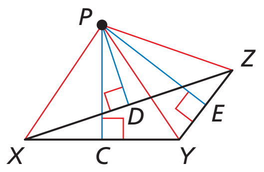
$PY = 4x - 8$



16. P es el circuncentro de $\triangle XYZ$. Utiliza la información dada para hallar PY.

$PX = 4x + 3$

$PZ = 6x - 11$



CONSTRUCCIÓN **En los Ejercicios 17–20, dibuja un triángulo del tipo dado. Halla el circuncentro. Después, construye el círculo circunscrito.**

17. rectángulo

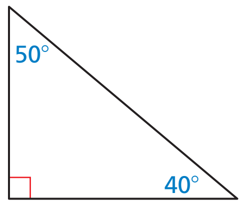
18. obtusángulo

19. isósceles agudo

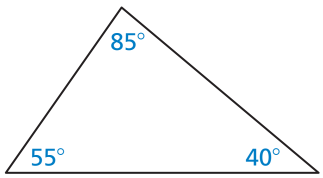
20. equilátero

CONSTRUCCIÓN **En los Ejercicios 21–24, copia el triángulo con las medidas angulares dadas. Halla el incentro. Después construye el círculo inscrito.**

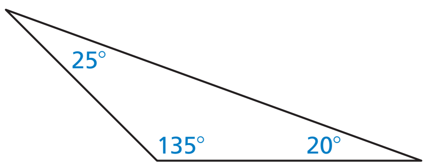
21.



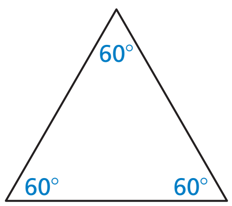
22.



23.

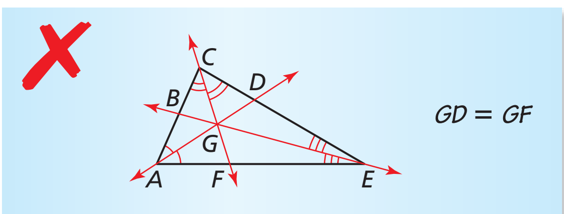


24.

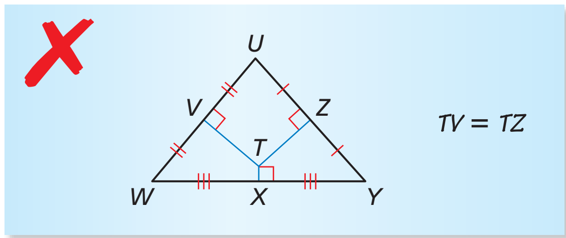


ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 25 y 26, Describe y corrige el error cometido al identificar las distancias iguales dentro del triángulo.**

25.

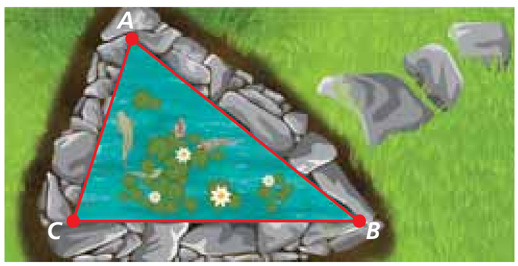


26.



27. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Dos amigos y tú planean sacar a pasear a sus perros. Tú deseas que el punto de reunión esté a la misma distancia de la casa de cada uno. Explica cómo puedes usar el diagrama para hallar el punto de encuentro. *(Consulta el Ejemplo 1).*

28. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Estás colocando una fuente en un estanque triangular para peces Koi. Deseas que la fuente esté a la misma distancia de cada orilla del estanque. ¿Dónde colocarías la fuente? Explica tu razonamiento. Utiliza un dibujo que apoye tu respuesta. *(Consulta el Ejemplo 4).*



PENSAMIENTO CRÍTICO **En los Ejercicios 29–32, completa el enunciado con *siempre, algunas veces* o *nunca*. Explica tu razonamiento.**

29. El circuncentro de un triángulo escaleno está __________ dentro del triángulo.

30. Si la bisectriz perpendicular de un lado de un triángulo interseca al vértice opuesto, entonces el triángulo es __________ isósceles.

31. Las bisectrices perpendiculares de un triángulo se intersecan en un punto que es _________ equidistante de los puntos medios de los lados del triángulo.

32. Las bisectrices de ángulo de un triángulo se intersecan en un punto que es _________ equidistante de los lados del triángulo.

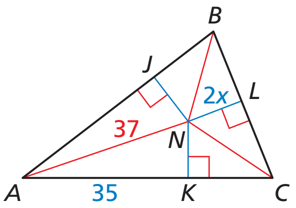
PENSAMIENTO CRÍTICO En los Ejercicios 33 y 34, halla las coordenadas del circuncentro del triángulo con los vértices dados.

33. $A(2, 5)$, $B(6, 6)$, $C(12, 3)$

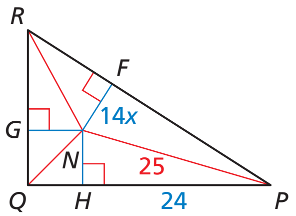
34. $D(-9, -5)$, $E(-5, -9)$, $F(-2, -2)$

CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 35 y 36, halla el valor de *x* que convierte a *N* en el incentro del triángulo.

35.



36.

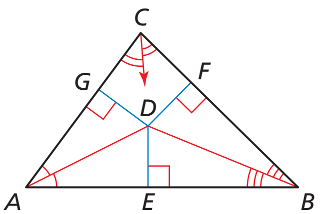


37. PRUEBA ¿En cualquier triángulo rectángulo, dónde está ubicado el circuncentro? Escribe una demostración de coordenadas de este resultado.

38. DEMOSTRAR UN TEOREMA Escribe una demostración del Teorema del incentro (Teorema 6.6).

Dado $\triangle ABC$, $\overline{AD}$ biseca a $\angle CAB$, $\overline{BD}$ biseca a $\angle CBA$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$, $\overline{DF} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DG} \perp \overline{CA}$

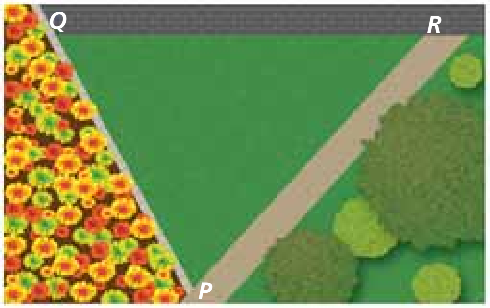
Demostrar Las bisectrices de ángulo se intersecan en D, que es equidistante de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$.



39. ESCRIBIR Explica la diferencia entre el circuncentro y el incentro de un triángulo.

40. RAZONAR ¿El incentro de un triángulo alguna vez podría estar ubicado fuera del triángulo? Explica tu razonamiento.

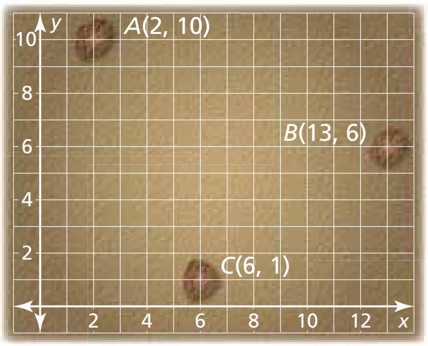
41. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Estás instalando una alberca circular en un jardín triangular, como el mostrado. Deseas que la alberca sea lo más grande posible, pero sin que llegue al pasillo.



a. Copia el triángulo y muestra cómo instalar la alberca de manera que apenas toque cada borde. Después explica cómo puedes estar seguro de que no puedes meter una alberca más grande en ese sitio.

b. Deseas tener la alberca más grande posible, pero dejar al menos un espacio de 1 pie alrededor de la alberca. ¿El centro de la alberca estaría en la misma posición que en la parte (a)? Justifica tu respuesta.

42. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Los arqueólogos encontraron tres rocas. Piensan que alguna vez fueron parte de un círculo de rocas con una chimenea comunitaria en el centro. Marcan la ubicación de las rocas A, B y C sobre una gráfica, donde las distancia se miden en pies.



a. Explica cómo pueden los arqueólogos usar un dibujo para estimar el centro del círculo de rocas.

b. Copia el diagrama para hallar las coordenadas apropiadas del punto al cual los arqueólogos deben buscar la chimenea.

43. RAZONAR El punto P está dentro de $\triangle ABC$ y es equidistante de los puntos A y B. ¿En cuál de los siguientes segmentos debe estar ubicada P?

Ⓐ $\overline{AB}$

Ⓑ la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$

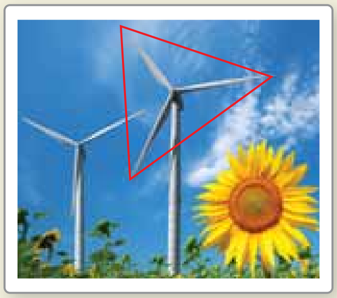
Ⓒ $\overline{AC}$

Ⓓ la bisectriz perpendicular de $\overline{AC}$

44. PENSAMIENTO CRÍTICO Se construye una preparatoria para cuatro poblados, mostrados en el mapa. Cada poblado acuerda que la escuela se ubique a una distancia igual de los cuatro poblados. ¿Hay algún punto en donde puedan acordar construir la escuela? Si es así, hállalo. Si no, explica por qué no. Justifica tu respuesta con un diagrama.

45. ARGUMENTAR Tu amigo dice que el circuncentro de un triángulo equilátero, también, es el incentro del triángulo. ¿Tiene razón tu amigo? Explica tu razonamiento.

46. ¿CÓMO LO VES? Los brazos del molino de viento son las bisectrices de ángulo del triángulo rojo. ¿Qué punto de concurrencia es el punto que conecta a los tres brazos?

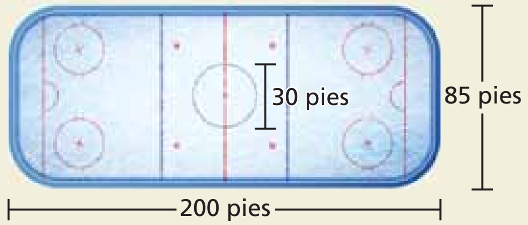


47. RAZONAMIENTO ABSTRACTO Se te ha pedido que dibujes un triángulo y todas sus bisectrices perpendiculares y bisectriz de ángulo.

a. ¿Qué tipo de triángulo necesita la menor cantidad de segmentos? ¿Cuál es el número máximo de segmentos que necesitarías? Explica.

b. ¿Qué tipo de triángulo necesita la mayor cantidad de segmentos? ¿Cuál es el número máximo de segmentos que necesitarías? Explica.

48. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO El diagrama muestra una pista oficial de hockey, que utiliza la Liga de Hockey Nacional. Crea un triángulo usando a los jugadores como vértices y dentro del cual esté inscrito el círculo central. El centro no debe ser el incentro de tu triángulo. Dibuja un boceto de las ubicaciones de los jugadores. Después rotula las longitudes reales de los lados y las medidas de los ángulos en tu triángulo.

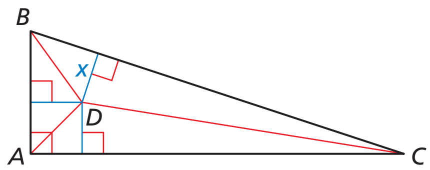


COMPARAR MÉTODOS En los Ejercicios 49 y 50, indica si utilizarías *bisectrices perpendiculares* o *de ángulo*. Después resuelve el problema.

49. Necesitas recortar el círculo más grande posible de un triángulo isósceles, hecho de papel, cuyos lados midan 8, 12 y 12 pulgadas. Halla el radio del círculo.

50. En un mapa de un campo, debes crear un sendero circular que conecte la alberca en (10, 20), el centro natural en (16, 2) y la cancha de tenis en (2, 4). Halla las coordenadas del centro del círculo y el radio del círculo.

51. PENSAMIENTO CRÍTICO El punto D es el incentro de $\triangle ABC$. Escribe una expresión para la longitud x en términos de las tres longitudes de los lados AB, AC y BC.



Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Se dan los extremos de $\overline{AB}$. Halla las coordenadas del punto medio M. Después halla AB. *(Sección 1.3)*

52. $A(-3, 5), B(3, 5)$

53. $A(2, -1), B(10, 7)$

54. $A(-5, 1), B(4, -5)$

55. $A(-7, 5), B(5, 9)$

Escribe una ecuación de la línea que pasa por el punto P, que es perpendicular a la línea dada. Grafica las ecuaciones de la línea para verificar que sean perpendiculares. *(Sección 3.5)*

56. $P(2, 8), y = 2x + 1$

57. $P(6, -3), y = -5$

58. $P(-8, -6), 2x + 3y = 18$

59. $P(-4, 1), y + 3 = -4(x + 3)$

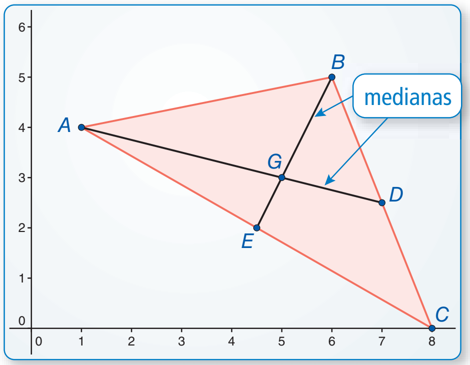
6.3 Medianas y altitudes de triángulos

Pregunta esencial ¿Qué conjeturas puedes hacer acerca de las medianas y altitudes de un triángulo?

EXPLORACIÓN 1 Hallar las propiedades de las medianas de un triángulo

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica. Dibuja cualquier $\triangle ABC$.

a. Traza el punto medio de $\overline{BC}$ y rotúlalo como D. Dibuja $\overline{AD}$, el cual es una mediana de $\triangle ABC$. Construye las medianas de los otros dos lados de $\triangle ABC$.



Muestra
Puntos
$A(1, 4)$
$B(6, 5)$
$C(8, 0)$
$D(7, 2.5)$
$E(4.5, 2)$
$G(5, 3)$

b. ¿Qué observas acerca de las medianas? Arrastra los vértices para cambiar $\triangle ABC$. Utiliza tus observaciones para escribir una conjetura acerca de las medianas de un triángulo.

c. En la figura anterior, el punto G divide cada mediana en un segmento más corto y un segmento más largo. Halla la razón de la longitud de cada segmento más largo respecto a la longitud de la mediana total. ¿El radio siempre es el mismo? Justifica tu respuesta.

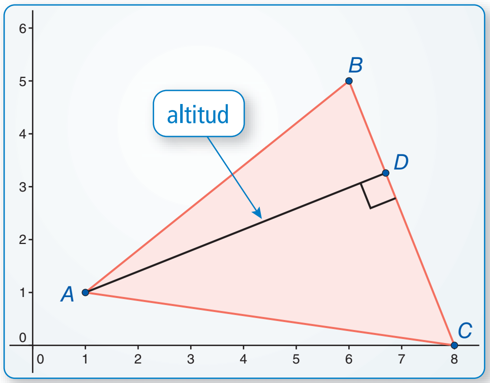
EXPLORACIÓN 2 Hallar las propiedades de las altitudes de un triángulo

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica. Traza cualquier $\triangle ABC$.

a. Construye el segmento perpendicular del vértice A a $\overline{BC}$. Rotula el extremo D. $\overline{AD}$ es una *altitud* de $\triangle ABC$.

b. Construye las altitudes de los otros dos lados de $\triangle ABC$. ¿Qué observas?

c. Escribe una conjetura acerca de las altitudes de un triángulo. Pon a prueba tu conjetura arrastrando los vértices para cambiar $\triangle ABC$.



BUSCAR UNA ESTRUCTURA
Para dominar las matemáticas, necesitas observar atentamente para identificar un patrón o estructura.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Qué conjeturas puedes hacer una conjetura acerca de las medianas y las altitudes de un triángulo?

4. La longitud de la mediana $\overline{RU}$ en $\triangle RST$ es 3 pulgadas. El punto de concurrencia de las tres medianas de $\triangle RST$ divide $\overline{RU}$ en dos segmentos. ¿Cuáles son las longitudes de estos dos segmentos?

6.3 Lección

Qué aprenderás

- Utilizar las medianas y hallar los centroides de los triángulos.
- Utilizar las altitudes para hallar los ortocentros de los triángulos.

Vocabulario Esencial

mediana de un triángulo, *pág. 320*
centroide, *pág. 320*
altitud de un triángulo, *pág. 321*
ortocentro, *pág. 321*

Anterior
punto medio
concurrente
punto de concurrencia

Utilizar la mediana de un triángulo

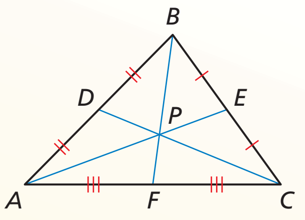
La **mediana de un triángulo** es un segmento que parte de un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia, llamado **centroide**, está dentro del triángulo.

Teorema

Teorema 6.7 Teorema del centroide

El centroide de un triángulo está a dos tercios de distancia de cada vértice al punto medio del lado opuesto.

Las medianas de $\triangle ABC$ se encuentran en el punto P, y $AP = \frac{2}{3}AE$, $BP = \frac{2}{3}BF$ y $CP = \frac{2}{3}CD$.



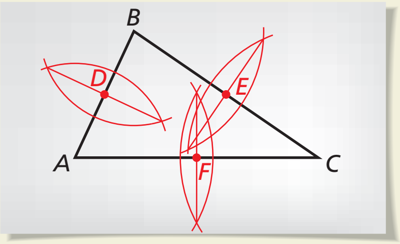
Prueba *BigIdeasMath.com*

CONSTRUCCIÓN Hallar el centroide de un triángulo

Utiliza un compás y una regla para construir las medianas de $\triangle ABC$.

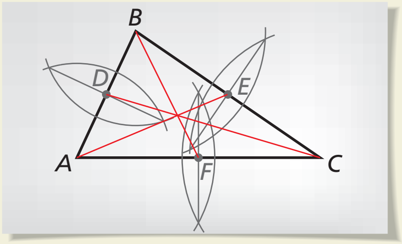
SOLUCIÓN

Paso 1



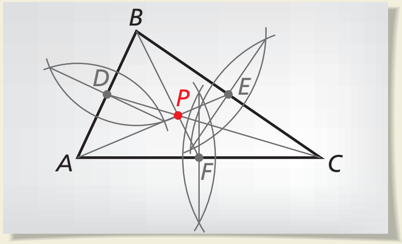
Halla los puntos medios Dibuja $\triangle ABC$. Halla los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Rotula los puntos medios de los lados D, E y F, respectivamente.

Paso 2



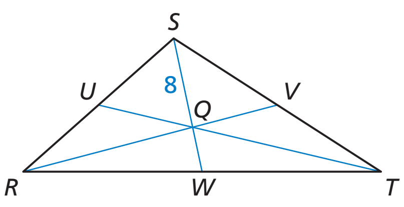
Dibuja medianas Dibuja $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$. Éstas son las tres medianas de $\triangle ABC$.

Paso 3



Rotula un punto Rotula el punto donde $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ se intersecan como P. Éste es el centroide.

EJEMPLO 1 Utilizar el centroide de un triángulo



En $\triangle RST$, el punto Q es el centroide, y $SQ = 8$. Halla QW y SW.

SOLUCIÓN

$SQ = \frac{2}{3}SW$	Teorema del centroide
$8 = \frac{2}{3}SW$	Sustituye 8 por SQ.
$12 = SW$	Multiplica cada lado por el recíproco, $\frac{3}{2}$.

Entonces $QW = SW - SQ = 12 - 8 = 4$.

- Por tanto, $QW = 4$ y $SW = 12$.

HALLAR UN PUNTO DE ENTRADA

Se eligió la mediana $\overline{SV}$ en el Ejemplo 2, porque es más fácil hallar una distancia en un segmento vertical.

EJEMPLO 2 Hallar el centroide de un triángulo

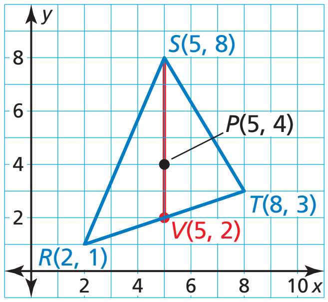
Halla las coordenadas del centroide de $\triangle RST$ con vértices $R(2, 1)$, $S(5, 8)$ y $T(8, 3)$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Grafica $\triangle RST$.

Paso 2 Utiliza la fórmula del punto medio para hallar el punto medio V de $\overline{RT}$ y dibuja la mediana $\overline{SV}$.

$$V\left(\frac{2+8}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (5, 2)$$



Paso 3 Halla el centroide. Está a dos tercios de distancia desde cada vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

La distancia del vértice $S(5, 8)$ a $V(5, 2)$ es $8 - 2 = 6$ unidades.
Por tanto, el centroide está $\frac{2}{3}(6) = 4$ unidades abajo del vértice S en $\overline{SV}$.

JUSTIFICAR CONCLUSIONES

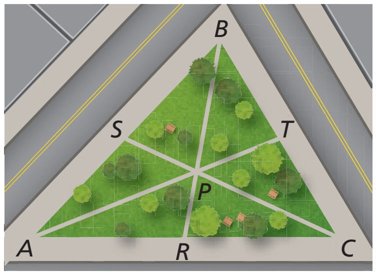
Puedes comprobar tu resultado usando una mediana diferente para hallar el centroide.

▶ Entonces, las coordenadas del centroide P son $(5, 8 - 4)$ o $(5, 4)$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Hay tres rutas a lo largo de un parque triangular. Cada ruta va del punto medio de una orilla a la esquina opuesta. Las rutas se encuentran en el punto *P*.



1. Halla PS y PC cuando $SC = 2100$ pies.

2. Halla TC y BC cuando $BT = 1000$ pies.

3. Halla PA y TA cuando $PT = 800$ pies.

Halla las coordenadas del centroide del triángulo con los vértices dados.

4. $F(2, 5)$, $G(4, 9)$, $H(6, 1)$

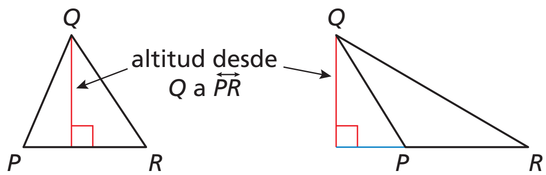
5. $X(-3, 3)$, $Y(1, 5)$, $Z(-1, -2)$

LEER

En la fórmula del área para un triángulo, $A = \frac{1}{2}bh$, puedes utilizar la longitud de cualquier lado por la base b. La altura h es la longitud de la altitud de ese lado al vértice opuesto.

Utilizar la altitud de un triángulo

Una **altitud de un triángulo** es el segmento perpendicular de un vértice al lado opuesto o la línea que contiene el lado opuesto.

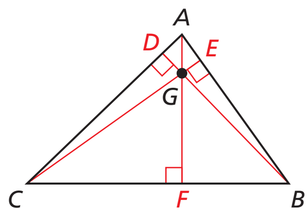


Concepto Esencial

Ortocentro

Las rectas que contienen las altitudes de un triángulo son concurrentes. Este punto de concurrencia es el **ortocentro** del triángulo.

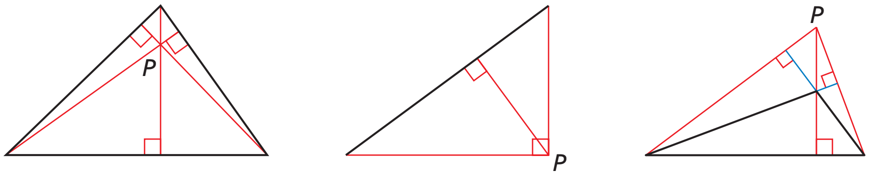
Las rectas que contienen $\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ se encuentran en el ortocentro G de $\triangle ABC$.



LEER

Las altitudes se muestran en rojo. Observa que en el triángulo rojo, los catetos también son altitudes. Las altitudes de un triángulo obtusángulo se extienden para hallar el ortocentro.

Como se muestra a continuación, la ubicación del ortocentro P de un triángulo depende del tipo de triángulo.

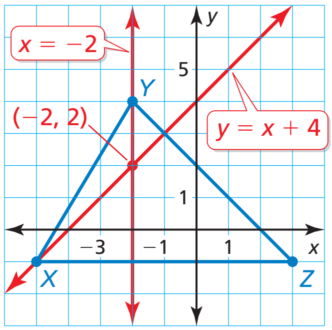


El triángulo acutángulo P está dentro del triángulo. | El triángulo rectángulo P está en el triángulo. | El triángulo obtusángulo P está fuera del triángulo.

EJEMPLO 3 Hallar el ortocentro de un triángulo

Halla las coordenadas del ortocentro de $\triangle XYZ$ con vértices $X(-5, -1)$, $Y(-2, 4)$ y $Z(3, -1)$.

SOLUCIÓN



Paso 1 Grafica $\triangle XYZ$.

Paso 2 Halla una ecuación de la línea que contenga la altitud de Y a $\overline{XZ}$. Como $\overline{XZ}$ es horizontal, la altitud es vertical. La línea que contiene la altitud pasa por $Y(-2, 4)$. Por tanto, la ecuación de la línea es $x = -2$.

Paso 3 Halla la ecuación de la línea que contenga la altitud de X a $\overline{YZ}$.

$$\text{pendiente de } \overleftrightarrow{YZ} = \frac{-1 - 4}{3 - (-2)} = -1$$

Como el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1, la pendiente de la línea perpendicular a $\overleftrightarrow{YZ}$ es 1. La línea pasa por $X(-5, -1)$.

$y = mx + b$ — Usa la forma de pendiente e intersección.

$-1 = 1(-5) + b$ — Sustituye -1 por y, 1 por m y -5 por x.

$4 = b$ — Resuelve para hallar b.

Entonces, la ecuación de la línea es $y = x + 4$.

Paso 4 Halla el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones $x = -2$ y $y = x + 4$.

Sustituye x por -2 en la ecuación $y = x + 4$. Después resuelve para hallar y.

$y = x + 4$ — Escribe la ecuación.

$y = -2 + 4$ — Sustituye -2 por x.

$y = 2$ — Resuelve para hallar y.

▶ Por tanto, las coordenadas del ortocentro son $(-2, 2)$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Indica si el ortocentro del triángulo con los vértices dados está *dentro, en* o *fuera* del triángulo. Después halla las coordenadas del ortocentro.

6. $A(0, 3)$, $B(0, -2)$, $C(6, -3)$

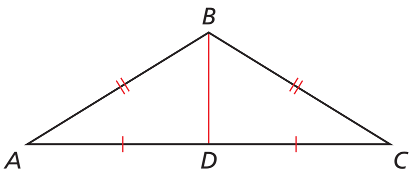
7. $J(-3, -4)$, $K(-3, 4)$, $L(5, 4)$

En un triángulo isósceles, la bisectriz perpendicular, la bisectriz del ángulo, la mediana y la altitud del ángulo del vértice a la base, forman parte del mismo segmento. En un triángulo equilátero, esto sucede con cualquier vértice.

EJEMPLO 4 Demostrar una propiedad de triángulos isósceles

Demuestra que la mediana del ángulo del vértice a la base de un triángulo isósceles es una altitud.

SOLUCIÓN



Dado $\triangle ABC$ es isósceles, con base $\overline{AC}$.
$\overline{BD}$ es la mediana a la base $\overline{AC}$.

Demostrar $\overline{BD}$ es una altitud de $\triangle ABC$.

Prueba de párrafo Los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo isósceles $\triangle ABC$ son congruentes. $\overline{CD} \cong \overline{AD}$ porque $\overline{BD}$ es la mediana respecto a $\overline{AC}$. Por otro lado, $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ según la Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1). Entonces, $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ según Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8). $\angle ADB \cong \angle CDB$ porque las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes. También, $\angle ADB$ y $\angle CDB$ son un par lineal. $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ se intersecan para formar un par lineal de ángulos congruentes, por tanto $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es una altitud de $\triangle ABC$.

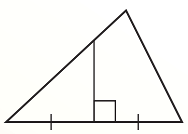
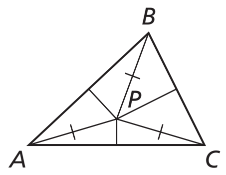
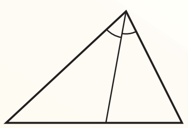
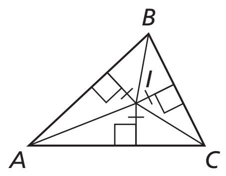
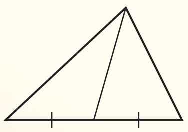
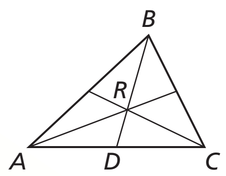
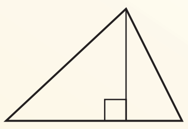
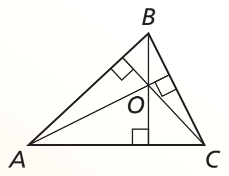
Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

8. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 4, deseas demostrar que la mediana $\overline{BD}$ es también una bisectriz de un ángulo. ¿En qué cambiaría tu demostración?

Resumen de concepto

Segmentos, líneas, rayos y puntos en triángulos

	Ejemplo	Punto de concurrencia	Propiedad	Ejemplo
bisectriz perpendicular		circuncentro	El circuncentro P de un triángulo es equidistante de los vértices del triángulo.	
bisectriz de un ángulo		incentro	El incentro I de un triángulo es equidistante de los lados del triángulo.	
mediana		centroide	El centroide R de un triángulo está a dos tercios de distancia de cada vértice al punto medio del lado opuesto.	
altitud		ortocentro	Las rectas que contienen las altitudes de un triángulo son concurrentes en el ortocentro O.	

Verificación de vocabulario y concepto esencial

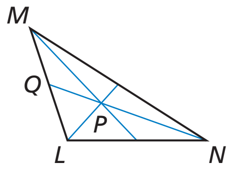
1. **VOCABULARIO** Menciona los cuatro tipos de puntos de concurrencia. ¿Qué rectas se intersecan para formar cada uno de los puntos?

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La longitud de un segmento de un vértice al centroide es ____________ la longitud de la mediana a partir de ese vértice.

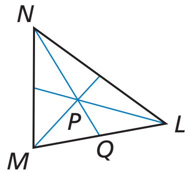
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, el punto P es el centroide de $\triangle LMN$. Halla PN y QP. *(Consulta el Ejemplo 1).*

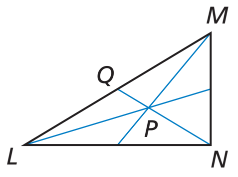
3. $QN = 9$



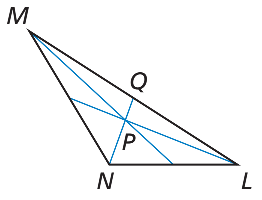
4. $QN = 21$



5. $QN = 30$

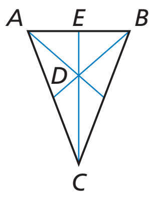


6. $QN = 42$

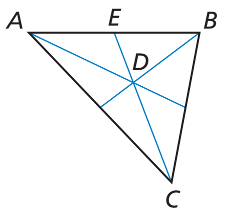


En los Ejercicios 7–10, el punto D es el centroide de $\triangle ABC$. Halla CD y CE.

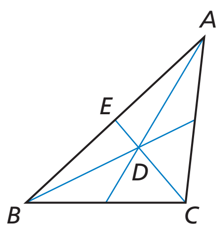
7. $DE = 5$



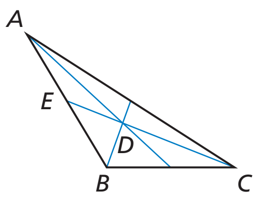
8. $DE = 11$



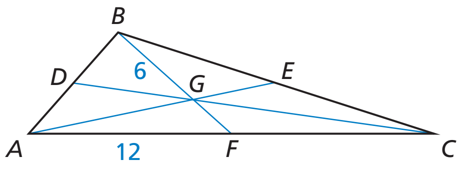
9. $DE = 9$



10. $DE = 15$



En los Ejercicios 11–14, el punto G es el centroide de $\triangle ABC$. $BG = 6$, $AF = 12$ y $AE = 15$. Halla la longitud del segmento.



11. $\overline{FC}$

12. $\overline{BF}$

13. $\overline{AG}$

14. $\overline{GE}$

En los Ejercicios 15–18, halla las coordenadas del centroide del triángulo con los vértices dados. *(Consulta el Ejemplo 2).*

15. $A(2, 3)$, $B(8, 1)$, $C(5, 7)$

16. $F(1, 5)$, $G(-2, 7)$, $H(-6, 3)$

17. $S(5, 5)$, $T(11, -3)$, $U(-1, 1)$

18. $X(1, 4)$, $Y(7, 2)$, $Z(2, 3)$

En los Ejercicios 19–22, indica si el ortocentro está *dentro, en* o *fuera* del triángulo. Después halla las coordenadas del ortocentro. *(Consulta el Ejemplo 3).*

19. $L(0, 5)$, $M(3, 1)$, $N(8, 1)$

20. $X(-3, 2)$, $Y(5, 2)$, $Z(-3, 6)$

21. $A(-4, 0)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 3)$

22. $T(-2, 1)$, $U(2, 1)$, $V(0, 4)$

CONSTRUCCIÓN En los Ejercicios 23–26, dibuja el triángulo indicado y halla su centroide y ortocentro.

23. triángulo isósceles recto

24. triángulo escaleno obtuso

25. triángulo escaleno recto

26. triángulo isósceles agudo

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 27 y 28, describe y corrige el error cometido al hallar *DE*. El punto *D* es el centroide de $\triangle ABC$.**

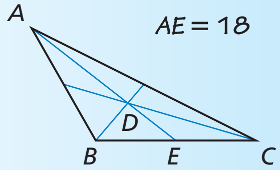
27.

$$DE = \frac{2}{3}AE$$

$$DE = \frac{2}{3}(18)$$

$$DE = 12$$

$AE = 18$



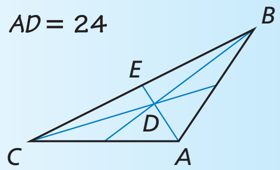
28.

$$DE = \frac{2}{3}AD$$

$$DE = \frac{2}{3}(24)$$

$$DE = 16$$

$AD = 24$



PRUEBA **En los Ejercicios 29 y 30, escribe una demostración del enunciado.** *(Consulta el Ejemplo 4).*

29. La bisectriz del ángulo del vértice a la base de un triángulo isósceles también es una mediana.

30. La altitud del ángulo de un vértice a la base de un triángulo isósceles, también, es una bisectriz perpendicular.

PENSAMIENTO CRÍTICO **En los Ejercicios 31–36, completa el enunciado con *siempre, a veces* o *nunca*. Explica tu razonamiento.**

31. El centroide está __________ en el triángulo.

32. El ortocentro está __________ fuera del triángulo.

33. Una mediana es __________ el mismo segmento de línea que una bisectriz perpendicular.

34. Una altitud es __________ el mismo segmento de línea que una bisectriz de un ángulo.

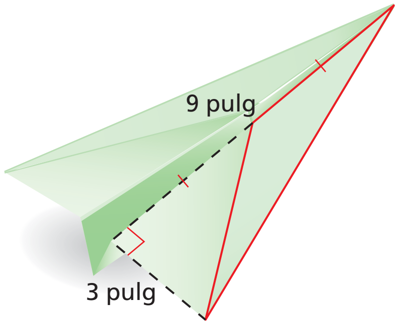
35. El centroide y el ortocentro están __________ el mismo punto.

36. El centroide está __________ formado por la intersección de las tres medianas.

37. **ESCRIBIR** Compara la altitud de un triángulo con una bisectriz perpendicular de un triángulo.

38. **ESCRIBIR** Compara la mediana, la altitud y la bisectriz de un ángulo de un triángulo.

39. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Halla el área de la parte triangular del ala del avión de papel, está remarcada en rojo. ¿Qué segmento especial del triángulo utilizaste?

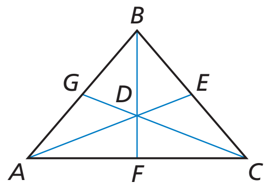


40. **ANALIZAR RELACIONES** Copia y completa el enunciado para $\triangle DEF$ con el centroide K y las medianas $\overline{DH}$, $\overline{EJ}$ y $\overline{FG}$.

a. $EJ =$ _____ KJ **b.** $DK =$ _____ KH

c. $FG =$ _____ KF **d.** $KG =$ _____ FG

CONEXIONES MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 41–44, el punto *D* es el centroide de $\triangle ABC$. Utiliza la información dada para hallar el valor de *x*.**



41. $BD = 4x + 5$ y $BF = 9x$

42. $GD = 2x - 8$ y $GC = 3x + 3$

43. $AD = 5x$ y $DE = 3x - 2$

44. $DF = 4x - 1$ y $BD = 6x + 4$

45. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Grafica las rectas en el mismo plano de coordenadas. Halla el centroide del triángulo formado por sus intersecciones.

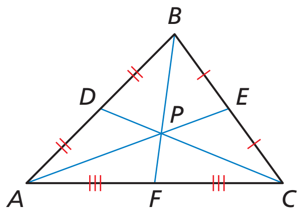
$$y_1 = 3x - 4$$

$$y_2 = \frac{3}{4}x + 5$$

$$y_3 = -\frac{3}{2}x - 4$$

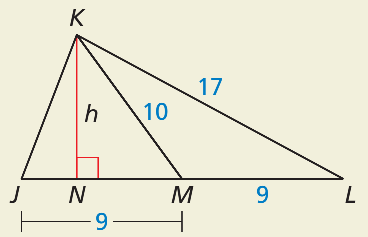
46. **PENSAMIENTO CRÍTICO** ¿En qué tipo(s) de triángulo(s) puede ser un vértice uno de los puntos de concurrencia del triángulo? Explica tu razonamiento.

47. **ESCRIBIR ECUACIONES** Utiliza los números y símbolos para escribir tres ecuaciones diferentes para *PE*.



PE	AE	AP	$+$	$-$
$=$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

48. **¿CÓMO LO VES?** Utiliza la figura.



a. ¿Qué tipo de segmento es $\overline{KM}$? ¿Qué punto de concurrencia pertenece a $\overline{KM}$?

b. ¿Qué tipo de segmento es $\overline{KN}$? ¿Qué punto de concurrencia pertenece a $\overline{KN}$?

c. Compara las áreas de $\triangle JKM$ y $\triangle KLM$. ¿Consideras que las áreas formadas por la mediana de cualquier triángulo siempre sean comparables de esta manera? Explica tu razonamiento.

49. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que es posible que, tanto el circuncentro, como el incentro, elcentroide y el ortocentro estén en el mismo punto. ¿Estás de acuerdo? Explica tu razonamiento.

50. **SACAR CONCLUSIONES** El centro de gravedad de un triángulo, el punto donde un triángulo puede mantener el equilibrio en la punta de un lápiz, es uno de los cuatro puntos de concurrencia. En un pedazo de cartón traza y recorta un gran triángulo escaleno. ¿Cuál de los cuatro puntos de concurrencia es el centro de gravedad? Explica.

51. **PRUEBA** Demuestra que una mediana de un triángulo equilátero también es una bisectriz de un ángulo, una bisectriz perpendicular y una altitud.

52. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Construye un triángulo escaleno agudo. Halla el ortocentro, el centroide y el circuncentro. ¿Qué puedes concluir acerca de los tres puntos de concurrencia?

53. **CONSTRUCCIÓN** Sigue los pasos para construir un círculo de nueve puntos. ¿Por qué se llama así?

Paso 1 Construye un triángulo grande que sea escaleno agudo.

Paso 2 Halla el ortocentro y el circuncentro del triángulo.

Paso 3 Halla el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro.

Paso 4 Halla el punto medio entre cada vértice y el ortocentro.

Paso 5 Construye un círculo. Utiliza el punto medio en el paso 3 como el centro del círculo y la distancia del centro, al punto medio de un lado del triángulo como el radio.

54. **PRUEBA** Demuestra los enunciados en las partes (a) a (c).

Dado $\overline{LP}$ y $\overline{MQ}$ son medianas del escaleno $\triangle LMN$. El punto R está en $\overrightarrow{LP}$ de manera que, $\overline{LP} \cong \overline{PR}$. El punto S está en $\overrightarrow{MQ}$ por lo que, $\overline{MQ} \cong \overline{QS}$.

Demostrar **a.** $\overline{NS} \cong \overline{NR}$

b. $\overline{NS}$ y $\overline{NR}$ son paralelos a $\overline{LM}$.

c. R, N y S son colineales.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Determina si $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$. *(Sección 3.5)*

55. $A(5, 6)$, $B(-1, 3)$, $C(-4, 9)$, $D(-16, 3)$

56. $A(-3, 6)$, $B(5, 4)$, $C(-14, -10)$, $D(-2, -7)$

57. $A(6, -3)$, $B(5, 2)$, $C(-4, -4)$, $D(-5, 2)$

58. $A(-5, 6)$, $B(-7, 2)$, $C(7, 1)$, $D(4, -5)$

Vocabulario esencial

equidistante, *pág. 302*
concurrente, *pág. 310*
punto de concurrencia, *pág. 310*
circuncentro, *pág. 310*
incentro, *pág. 313*
mediana de un triángulo, *pág. 320*
centroide, *pág. 320*
altitud de un triángulo, *pág. 321*
ortocentro, *pág. 321*

Conceptos esenciales

Sección 6.1

Teorema 6.1 Teorema de la bisectriz perpendicular, *pág. 302*
Teorema 6.2 Recíproco del Teorema de la bisectriz perpendicular, *pág. 302*
Teorema 6.3 Teorema de la bisectriz de un ángulo, *pág. 304*
Teorema 6.4 Recíproco del Teorema de la bisectriz de un ángulo, *pág. 304*

Sección 6.2

Teorema 6.5 Teorema del circuncentro, *pág. 310*
Teorema 6.6 Teorema del incentro, *pág. 313*

Sección 6.3

Teorema 6.7 Teorema del centroide, *pág. 320*
Orthocenter, *pág. 321*
Segmentos, líneas, rayos y puntos en los triángulos, *pág. 323*

Prácticas matemáticas

1. ¿Hiciste un plan antes de terminar tu demostración en el Ejercicio 37 de la página 308? Describe tu proceso mental.
2. ¿Qué herramientas utilizaste para completar los Ejercicios 17 a 20 de la página 316? Describe cómo podrías utilizar las herramientas tecnológicas para completar esos ejercicios?
3. ¿Qué conjetura hiciste al responder el Ejercicio 46 de la página 325? ¿Qué progresión lógica te llevó a determinar si tu conjetura era verdadera?

Destrezas de estudio

Reelaborar tus notas

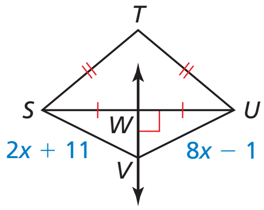
Una buena forma de reforzar los conceptos y ponerlos en tu memoria de largo plazo, es reelaborar tus notas. Cuando tomes notas, deja espacios adicionales en las páginas. Puedes regresar a ellas después de cada clase y llenarlas con

- definiciones y reglas importantes,
- ejemplos adicionales y
- preguntas que tengas acerca del material.

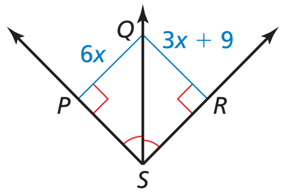
6.1–6.3 Prueba

Halla la medida indicada. Explica tu razonamiento. *(Sección 6.1)*

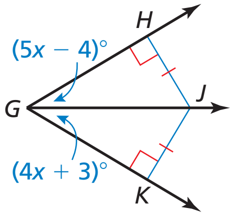
1. UV



2. QP



3. $m\angle GJK$



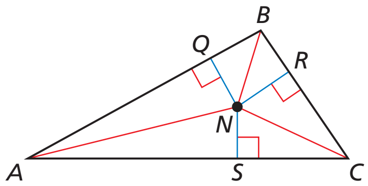
Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo con los vértices dados. *(Sección 6.2)*

4. $A(-4, 2)$, $B(-4, -4)$, $C(0, -4)$

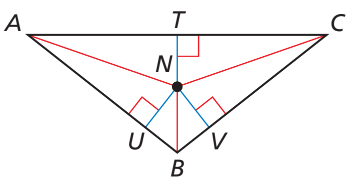
5. $D(3, 5)$, $E(7, 9)$, $F(11, 5)$

El incentro de $\triangle ABC$ es el punto N. Utiliza la información dada para hallar la medida indicada. *(Sección 6.2)*

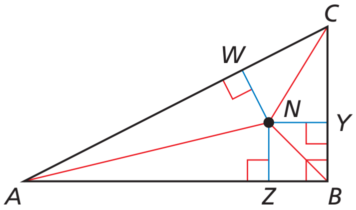
6. $NQ = 2x + 1$, $NR = 4x - 9$
Halla NS.



7. $NU = -3x + 6$, $NV = -5x$
Halla NT.



8. $NZ = 4x - 10$, $NY = 3x - 1$
Halla NW.



Halla las coordenadas del centroide del triángulo con los vértices dados. *(Sección 6.3)*

9. $J(-1, 2)$, $K(5, 6)$, $L(5, -2)$

10. $M(-8, -6)$, $N(-4, -2)$, $P(0, -4)$

Indica si el ortocentro está *dentro, en* o *fuera* del triángulo. Después halla sus coordenadas. *(Sección 6.3)*

11. $T(-2, 5)$, $U(0, 1)$, $V(2, 5)$

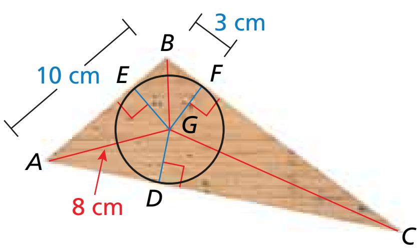
12. $X(-1, -4)$, $Y(7, -4)$, $Z(7, 4)$

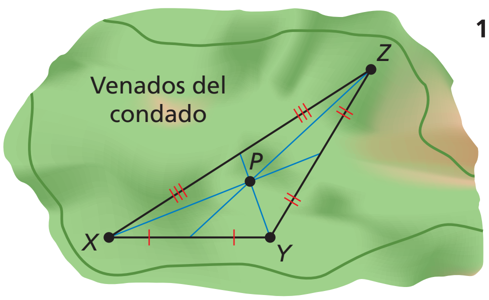
13. Un carpintero está cortando una rueda lo más grande posible de un pedazo triangular de madera. La rueda justo toca cada lado del triángulo, como se muestra. *(Sección 6.2)*

a. ¿Cuál es punto de concurrencia que está en el centro del círculo? ¿Qué tipo de segmentos son $\overline{BG}$, $\overline{CG}$ y $\overline{AG}$?

b. ¿Qué teorema puedes utilizar para demostrar que $\triangle BGF \cong \triangle BGE$?

c. Halla el radio de la rueda redondeado a la décima más cercana de un centímetro. Justifica tu respuesta.





14. El comité de parques de venados del condado planea construir uno en el punto P, equidistante de las tres ciudades más grandes rotuladas como X, Y y Z. El comité creó el mapa mostrado. *(Sección 6.2 y Sección 6.3)*

a. ¿Qué punto de concurrencia utilizó el comité para la ubicación del parque?

b. ¿El comité utilizó el mejor punto de concurrencia para la ubicación del parque? Si no, ¿qué punto sería mejor utilizar? Explica.

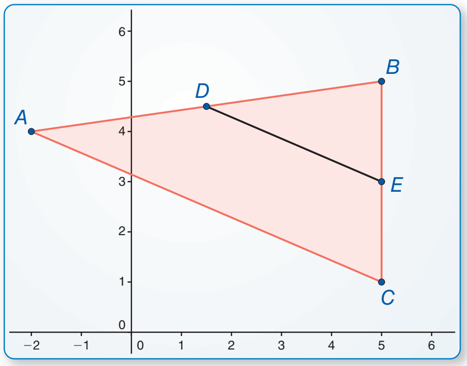
6.4 El teorema del segmento medio del triángulo

Pregunta esencial ¿Cómo se relacionan los segmentos medios de un triángulo con los lados del triángulo?

EXPLORACIÓN 1 Segmentos medios de un triángulo

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica. Dibuja cualquier $\triangle ABC$.

a. Traza el punto medio D de $\overline{AB}$ y el punto medio E de $\overline{BC}$. Traza $\overline{DE}$, el cual es el *segmento medio* de $\triangle ABC$.



Muestra

Puntos
$A(-2, 4)$
$B(5, 5)$
$C(5, 1)$
$D(1.5, 4.5)$
$E(5, 3)$

Segmentos
$BC = 4$
$AC = 7.62$
$AB = 7.07$
$DE = ?$

b. Compara la pendiente y la longitud de $\overline{DE}$ con la pendiente y la longitud de $\overline{AC}$.

c. Escribe una conjetura acerca de las relaciones entre los segmentos medios y los lados de un triángulo. Comprueba tu conjetura dibujando los otros segmentos medios de $\triangle ABC$, arrastrando los vértices para cambiar $\triangle ABC$ y observando si se mantienen las relaciones.

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

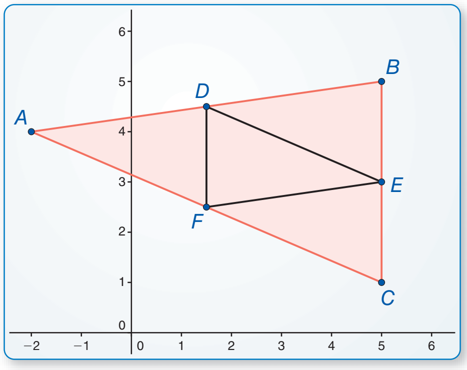
Para dominar las matemáticas, necesitas construir una progresión lógica de los enunciados y hacer conjeturas para explorar la verdad de éstas.

EXPLORACIÓN 2 Segmentos medios de un triángulo

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica. Traza cualquier $\triangle ABC$.

a. Dibuja los tres segmentos medios de $\triangle ABC$.

b. Utiliza el dibujo para escribir una conjetura acerca del triángulo formado por los segmentos medios del triángulo original.



Muestra

Puntos
$A(-2, 4)$
$B(5, 5)$
$C(5, 1)$
$D(1.5, 4.5)$
$E(5, 3)$

Segmentos
$BC = 4$
$AC = 7.62$
$AB = 7.07$
$DE = ?$
$DF = ?$
$EF = ?$

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo se relacionan los segmentos medios del triángulo con los lados del triángulo?

4. En $\triangle RST$, $\overline{UV}$ es el segmento medio que conecta los puntos medios de $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$. Dado que $UV = 12$, halla RT.

6.4 Lección

Vocabulario Esencial

segmento medio de un triángulo, *pág. 330*

Anterior

punto medio

paralela

pendiente

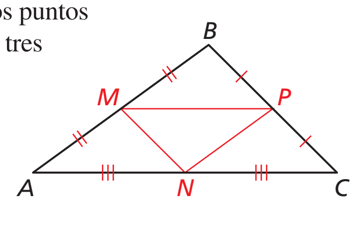
prueba de coordenadas

Qué aprenderás

- Utilizar los segmentos medios de los triángulos en el plano de coordenadas.
- Utilizar el Teorema del segmento medio del triángulo para hallar las distancias.

Utilizar el segmento medio de un triángulo

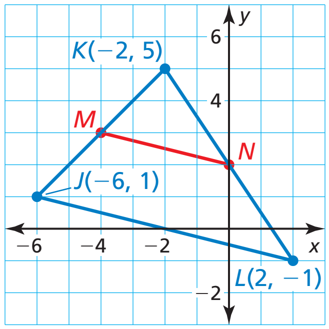
Un **segmento medio del triángulo** es el que conecta los puntos medios de dos lados del triángulo. Cada triángulo tiene tres segmentos medios, los cuales forman el *triángulo del segmento medio*.



Los segmentos medios de $\triangle ABC$ a la derecha son $\overline{MP}$, $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$. El *triángulo de segmento medio* es $\triangle MNP$.

EJEMPLO 1 **Utilizar los segmentos medios en el plano de coordenadas**

En $\triangle JKL$, muestra que el segmento medio $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{JL}$ y que, $MN = \frac{1}{2}JL$.



SOLUCIÓN

Paso 1 Halla las coordenadas de M y N al hallar los puntos medios de $\overline{JK}$ y $\overline{KL}$.

$$M\left(\frac{-6+(-2)}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = M\left(\frac{-8}{2}, \frac{6}{2}\right) = M(-4, 3)$$

$$N\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right) = N\left(\frac{0}{2}, \frac{4}{2}\right) = N(0, 2)$$

Paso 2 Halla y compara las pendientes de $\overline{MN}$ y $\overline{JL}$.

pendiente de $\overline{MN} = \frac{2-3}{0-(-4)} = -\frac{1}{4}$ pendiente de $\overline{JL} = \frac{-1-1}{2-(-6)} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

▶ Como las pendientes son las mismas, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{JL}$.

Paso 3 Halla y compara las longitudes de $\overline{MN}$ y $\overline{JL}$.

$$MN = \sqrt{[0-(-4)]^2 + (2-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[2-(-6)]^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

▶ Como $\sqrt{17} = \frac{1}{2}(2\sqrt{17})$, $MN = \frac{1}{2}JL$.

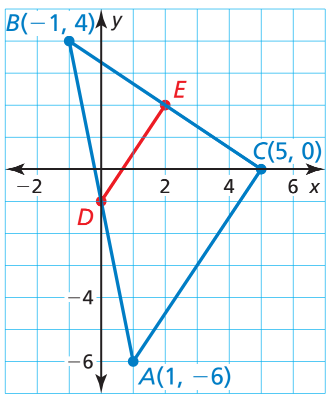
LEER

En la figura del Ejemplo 1, el segmento medio $\overline{MN}$ puede llamarse "el segmento medio opuesto a $\overline{JL}$."

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Utiliza la gráfica de $\triangle ABC$.



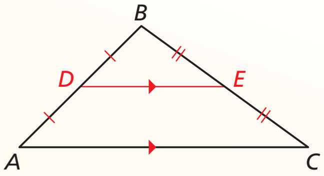
1. En $\triangle ABC$ muestra que el segmento medio $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{AC}$ y que $DE = \frac{1}{2}AC$.
2. Halla las coordenadas de los puntos medios del segmento medio $\overline{EF}$, el cual es opuesto a $\overline{AB}$. Demuestra que $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{AB}$ y que $EF = \frac{1}{2}AB$.

Utilizar el Teorema del segmento medio del triángulo

Teorema

Teorema 6.8 Teorema del segmento medio del triángulo

El segmento que conecta los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y es la mitad del largo de ese lado.



$\overline{DE}$ es un segmento medio de $\triangle ABC$, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, y $DE = \frac{1}{2}AC$.

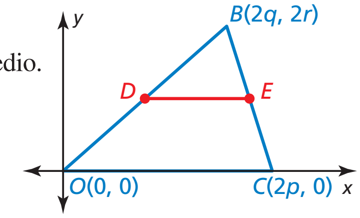
Prueba Ejemplo 2, pág. 331; Monitoreo del progreso Pregunta 3, pág. 331; Ej. 22, pág. 334

CONSEJO DE ESTUDIO

Al asignar coordenadas, trata de elegir coordenadas que faciliten los cálculos. En el Ejemplo 2, puedes evitar fracciones usando 2*p*, 2*q* y 2*r*.

EJEMPLO 2 Demostrar el Teorema del segmento medio del triángulo

Escribe una demostración en coordenadas del Teorema del segmento medio del triángulo para un segmento medio.



Dado $\overline{DE}$ es un segmento medio de $\triangle OBC$.

Demostrar $\overline{DE} \parallel \overline{OC}$ y $DE = \frac{1}{2}OC$

SOLUCIÓN

Paso 1 Coloca $\triangle OBC$ en un plano de coordenadas y asigna las coordenadas. Como estás hallando los puntos medios, utiliza $2p$, $2q$ y $2r$. Después halla las coordenadas de D y E.

$$D\left(\frac{2q+0}{2}, \frac{2r+0}{2}\right) = D(q, r) \qquad E\left(\frac{2q+2p}{2}, \frac{2r+0}{2}\right) = E(q+p, r)$$

Paso 2 Demuestra que $\overline{DE} \parallel \overline{OC}$. Las coordenadas del eje y de D y E son las mismas, por tanto, $\overline{DE}$ tiene una pendiente de 0. $\overline{OC}$ está en el eje x, por tanto su pendiente es 0.

▶ Puesto que sus pendientes son las mismas, $\overline{DE} \parallel \overline{OC}$.

Paso 3 Demuestra que $DE = \frac{1}{2}OC$. Utiliza el Postulado de la regla (Postulado 1.1) para hallar DE y OC.

$$DE = |(q+p) - q| = p \qquad OC = |2p - 0| = 2p$$

▶ Debido a que $p = \frac{1}{2}(2p)$, $DE = \frac{1}{2}OC$.

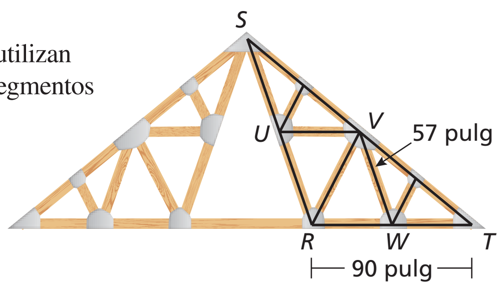
Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

3. En el Ejemplo 2, halla las coordenadas de F, el punto medio de $\overline{OC}$. Demuestra que $\overline{FE} \parallel \overline{OB}$ y $FE = \frac{1}{2}OB$.

EJEMPLO 3 Utilizar el Teorema del segmento medio del triángulo

Para fortalecer la estructura de un techo se utilizan triángulos. En el diagrama, $\overline{UV}$ y $\overline{VW}$ son segmentos medios de $\triangle RST$. Halla UV y RS.

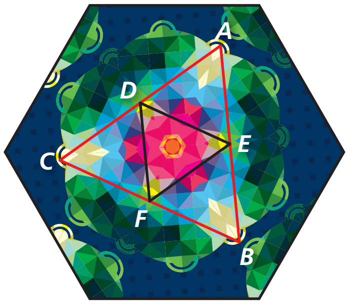


SOLUCIÓN

$UV = \frac{1}{2} \cdot RT = \frac{1}{2}(90 \text{ pulg}) = 45 \text{ pulg}$

$RS = 2 \cdot VW = 2(57 \text{ pulg}) = 114 \text{ pulg}$

EJEMPLO 4 **Utilizar el Teorema del segmento medio del triángulo**

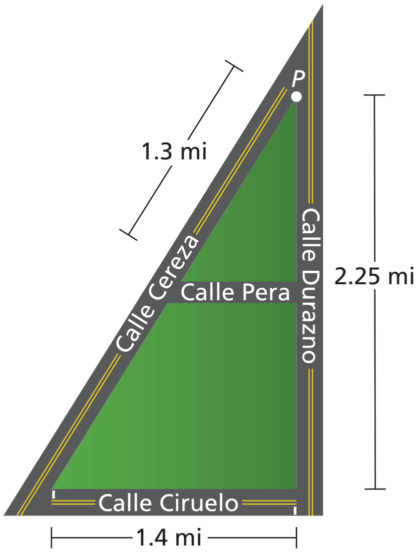


En la imagen de un caleidoscopio, $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. Demuestra que $\overline{CB} \parallel \overline{DE}$.

SOLUCIÓN

Debido a que $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, E es, por definición, el punto medio de $\overline{AB}$ y D es el punto medio de $\overline{AC}$. Entonces $\overline{DE}$ es un segmento medio de $\triangle ABC$ por definición de $\overline{CB} \parallel \overline{DE}$ según el Teorema del segmento medio del triángulo.

EJEMPLO 5 **Representar con matemáticas**



La calle Pera interseca la calle Cereza y la Durazno en sus puntos medios. Tu casa está en el punto P. Sales de tu casa y vas a correr por la calle Cereza a la calle Ciruelo, sobre la calle Ciruelo para ir a la calle Durazno, subes de la calle Durazno a la calle Pera, pasas por la calle Pera a la calle Cereza, y después regresas a casa por la calle Cereza. ¿Aproximadamente cuántas millas corriste?

SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Sabes las distancias de tu casa a la calle Ciruelo a lo largo de la calle Durazno, de la calle Durazno a la calle Cereza a lo largo de la calle Ciruelo, y de la calle Pera a tu casa a lo largo de la calle Cereza. Necesitas hallar las otras distancias de tu ruta y después hallar el número total de millas que corriste.
2. **Haz un plan** Por definición, sabes que la calle Pera es un segmento medio del triángulo formado por las otras dos calles. Utiliza el Teorema del segmento medio del triángulo para hallar la longitud de la calle Pera y la definición del segmento medio para hallar la longitud de la calle Cereza. Después añade las distancias a lo largo de tu ruta.
3. **Resuelve el problema**

   longitud de la calle Pera $= \frac{1}{2} \cdot$ (longitud de la calle Ciruelo) $= \frac{1}{2}(1.4 \text{ mi}) = 0.7$ mi

   longitud de la calle Cereza $= 2 \cdot$ (longitud de P a la calle Pera) $= 2(1.3 \text{ mi}) = 2.6$ mi

   distancia a lo largo de tu ruta: $2.6 + 1.4 + \frac{1}{2}(2.25) + 0.7 + 1.3 = 7.125$

   ▶ Entonces, corres aproximadamente 7 millas.

4. **Verifícalo** Utiliza números compatibles para verificar que tu respuesta sea razonable. Distancia total:

   $$2.6 + 1.4 + \frac{1}{2}(2.25) + 0.7 + 1.3 \approx 2.5 + 1.5 + 1 + 0.5 + 1.5 = 7 \checkmark$$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. Copia el diagrama del Ejemplo 3. Dibuja y nombra el tercer segmento medio. Después halla la longitud de $\overline{VS}$ cuando la longitud del tercer segmento medio es de 81 pulgadas.
5. En el Ejemplo 4, si F es el punto medio de $\overline{CB}$, ¿qué sabes acerca de $\overline{DF}$?
6. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 5, corres por la calle Durazno a la calle Ciruelo, pasas por la calle Ciruelo a la calle Cereza, subes por la calle Cereza a la calle Pera, pasas por la Calle Pera a la calle Durazno, y después regresas a casa subiendo por la calle Pera. ¿Corres más millas en el Ejemplo 5? Explica.

 Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

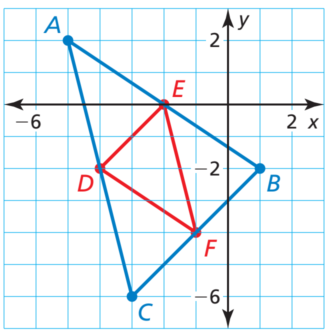
Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** El ___________ de un triángulo es un segmento que conecta los puntos medios de dos lados del triángulo.

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Si $\overline{DE}$ es el segmento medio opuesto de $\overline{AC}$ en $\triangle ABC$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $DE =$ ___AC según el Teorema del segmento medio del triángulo (Teorema 6.8).

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, utiliza la gráfica de $\triangle ABC$ con los segmentos medios $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DF}$. *(Consulta el Ejemplo 1).*



3. Halla las coordenadas de los puntos D, E y F.

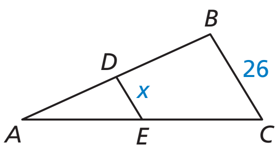
4. Demuestra que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{CB}$ y que $DE = \frac{1}{2}CB$.

5. Demuestra que $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{AC}$ y que $EF = \frac{1}{2}AC$.

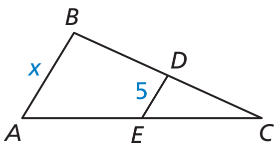
6. Demuestra que $\overline{DF}$ es paralelo a $\overline{AB}$ y que $DF = \frac{1}{2}AB$.

En los Ejercicios 7–10, $\overline{DE}$ es un segmento medio de $\triangle ABC$. Halla el valor de x. *(Consulta el Ejemplo 3).*

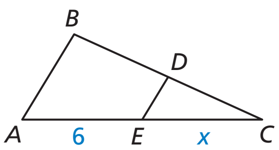
7.



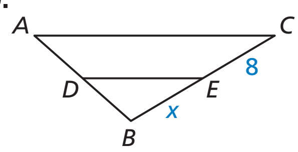
8.



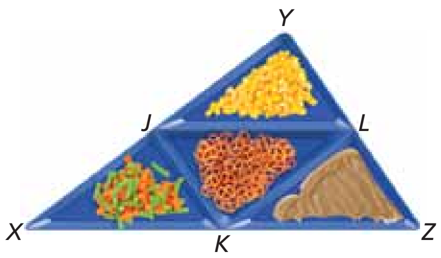
9.



10.



En los Ejercicios 11–16, $\overline{XJ} \cong \overline{JY}$, $\overline{YL} \cong \overline{LZ}$ y $\overline{XK} \cong \overline{KZ}$. Copia y completa el enunciado. *(Consulta el Ejemplo 4).*



11. $\overline{JK} \parallel$ ___

12. $\overline{JL} \parallel$ ___

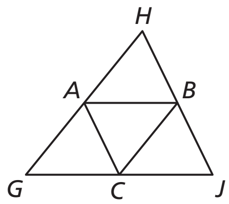
13. $\overline{XY} \parallel$ ___

14. $\overline{JY} \cong$ ___ $\cong$ ___

15. $\overline{JL} \cong$ ___ $\cong$ ___

16. $\overline{JK} \cong$ ___ $\cong$ ___

CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 17–19, utiliza $\triangle GHJ$, donde A, B y C son puntos medios de los lados.

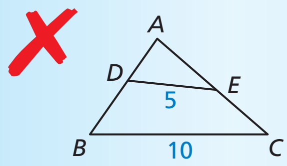


17. Cuando $AB = 3x + 8$ y $GJ = 2x + 24$, ¿cuál es AB?

18. Cuando $AC = 3y - 5$ y $HJ = 4y + 2$, ¿cuál es HB?

19. Cuando $GH = 7z - 1$ y $CB = 4z - 3$, ¿cuál es GA?

20. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido.

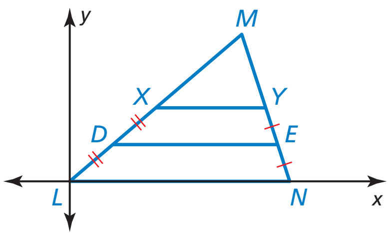


$DE = \frac{1}{2}BC$, por tanto, según el Teorema del segmento medio del triángulo (Teorema 6.8), $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ y $\overline{AE} \cong \overline{EC}$.

21. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La distancia entre bases consecutivas en una cancha de béisbol es 90 pies. Una segunda base está colocada a la mitad entre la primera y la segunda base, un parador en corto está colocado a la mitad entre la segunda y la tercera base, y un lanzador se encuentra a la mitad entre la primera y la tercera base. Halla la distancia entre el parador en corto y el lanzador. *(Consulta el Ejemplo 5).*

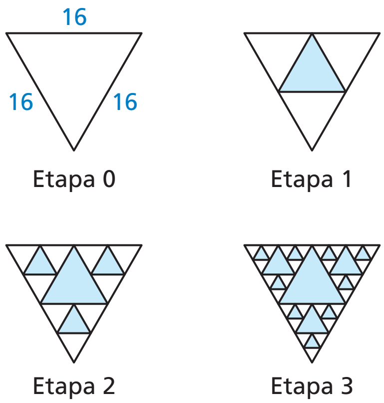
22. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Utiliza la figura del Ejemplo 2 para demostrar que el Teorema del segmento medio del triángulo (Teorema 6.8) para el segmento medio $\overline{DF}$, donde F es el punto medio de $\overline{OC}$. *(Consulta el Ejemplo 2).*

23. **PENSAMIENTO CRÍTICO** $\overline{XY}$ es un segmento medio de $\triangle LMN$. Supón que $\overline{DE}$ se llama el "segmento cuarto" de $\triangle LMN$. ¿Cómo piensas que sería un "segmento octavo"? Haz conjeturas acerca de las propiedades de un segmento cuarto y un segmento octavo. Utiliza coordenadas variables para verificar tus conjeturas.



24. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Halla un objeto de la vida real que use segmentos medios como parte de su estructura. Imprime una fotografía del objeto e identifica los segmentos medios de uno de los triángulos en la estructura.

25. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Para crear el diseño mostrado, sombrea el triángulo formado por los segmentos medios del triángulo. Después repite el proceso para cada triángulo no sombreado.

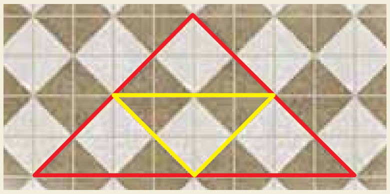


a. ¿Cuál es el perímetro del triángulo sombreado en la etapa 1?

b. ¿Cuál es el perímetro total de todos los triángulos sombreados en la etapa 2?

c. ¿Cuál es el perímetro total de todos los triángulos sombreados en la etapa 3?

26. **¿CÓMO LO VES?** Explica cómo sabes que el triángulo amarillo es el triángulo de segmento medio del triángulo rojo en el patrón de mosaicos mostrado.



27. **PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN** Los puntos $P(2, 1)$, $Q(4, 5)$ y $R(7, 4)$ son los puntos medios de los lados del triángulo. Grafica los tres segmentos medios. Después muestra cómo usar tu gráfica y las propiedades de los segmentos medios para trazar el triángulo original. Da las coordenadas de cada vértice.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla un contraejemplo que demuestre que la conjetura es falsa. *(Sección 2.2)*

28. La diferencia de dos números siempre es menor que el número mayor.

29. Un triángulo isósceles siempre es equilátero.

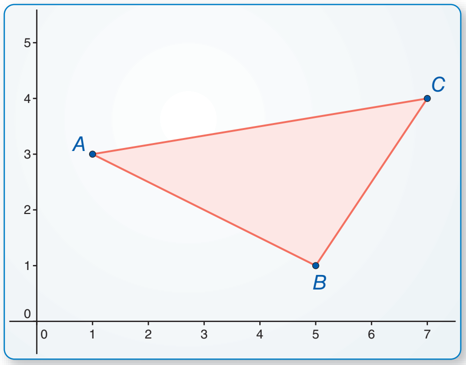
6.5 Prueba indirecta y desigualdades en un triángulo

Pregunta esencial ¿Cómo están relacionados los ángulos de un triángulo? ¿Cómo se relacionan dos lados cualquiera de un triángulo con el tercer lado?

EXPLORACIÓN 1 Comparar medidas de los ángulos y longitudes de los lados

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica. Traza cualquier escaleno $\triangle ABC$.

a. Halla las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos del triángulo.



Muestra

Puntos	Ángulos
$A(1, 3)$	$m\angle A = ?$
$B(5, 1)$	$m\angle B = ?$
$C(7, 4)$	$m\angle C = ?$

Segmentos
$BC = ?$
$AC = ?$
$AB = ?$

b. Ordena las longitudes de los lados. Ordena las medidas de los ángulos. ¿Qué observas?

c. Arrastra los vértices de $\triangle ABC$ para formar nuevos triángulos. Anota las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos en una tabla. Escribe una conjetura sobre tus hallazgos.

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN

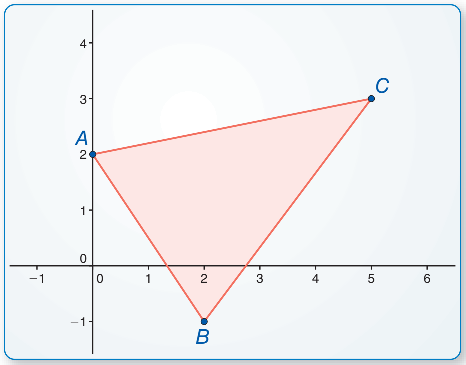
Para dominar las matemáticas, necesitas expresar respuestas numéricas con un grado de precisión adecuado para el contenido.

EXPLORACIÓN 2 Una relación de las longitudes de los lados de un triángulo

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica. Traza un $\triangle ABC$ cualquiera.

a. Halla las longitudes de los lados de un triángulo.

b. Compara la longitud de cada lado con la suma de las longitudes de los otros dos lados.



Muestra

Puntos
$A(0, 2)$
$B(2, -1)$
$C(5, 3)$

Segmentos
$BC = ?$
$AC = ?$
$AB = ?$

c. Arrastra los vértices de $\triangle ABC$ para formar nuevos triángulos y repite las partes (a) y (b). Organiza tus resultados en una tabla. Escribe una conjetura acerca de tus hallazgos.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo se relacionan los lados de los ángulos de un triángulo? ¿Cómo se relacionan dos lados cualquiera de un triángulo con el tercer lado?

4. ¿Es posible que un triángulo tenga lados con longitudes 3, 4 y 10? Explica.

6.5 Lección

Qué aprenderás

- Escribir pruebas indirectas.
- Hacer una lista de los lados y los ángulos de un triángulo ordenados por tamaño.
- Utilizar el Teorema de desigualdad de triángulos para hallar las posibles longitudes laterales de los triángulos.

Vocabulario Esencial

prueba indirecta, *pág. 336*

Anterior

prueba

desigualdad

Escribir una prueba indirecta

Supón que un estudiante observa alrededor de la cafetería y concluye que no se están sirviendo hamburguesas, y explica lo que sigue.

Al principio, presupuse que iba a haber hamburguesas hoy, porque es martes, y los martes suelen ser días de hamburguesas.

Siempre hay salsa de tomate en la mesa cuando hay hamburguesas, así que la busqué pero no vi ninguna.

Así que, mi presuposición de que hoy iba a haber hamburguesas debe ser falsa.

El estudiante utiliza el razonamiento *indirecto*. En una **prueba indirecta**, empiezas haciendo la suposición temporal de que la conclusión deseada es falsa. Pero después, al demostrar que este presupuesto lleva a una imposibilidad lógica, demuestras que el enunciado original es verdadero *por contradicción*.

Concepto Esencial

Cómo escribir una prueba indirecta (Prueba por contradicción)

Paso 1 Identifica el enunciado que deseas demostrar. Presupón temporalmente que este enunciado es falso mientras presupones que su opuesto es verdadero.

Paso 2 Razona lógicamente hasta que llegues a una contradicción.

Paso 3 Señala que la conclusión deseada debe ser verdadera porque la contradicción demuestra que la presuposición temporal es falsa.

EJEMPLO 1 Escribir una prueba indirecta

Escribe una prueba indirecta en un triángulo determinado, el cual, puede tener como máximo un ángulo recto.

Dado $\triangle ABC$

Demostrar $\triangle ABC$ puede tener como máximo un ángulo recto.

LEER

Has llegado a una *contradicción* cuando tienes dos enunciados que no pueden ser verdaderos al mismo tiempo.

SOLUCIÓN

Paso 1 Asume temporalmente que $\triangle ABC$ tiene dos ángulos rectos. Después, asume que $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos.

Paso 2 Por definición del ángulo recto, $m\angle A = m\angle B = 90°$. Según el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1), $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$. Utilizando la Propiedad de igualdad de la sustitución, $90° + 90° + m\angle C = 180°$. Así que, $m\angle C = 0°$ según la Propiedad de igualdad de la resta. Un triángulo no puede tener un ángulo que mida $0°$. Por tanto, esto contradice la información dada.

Paso 3 Entonces, el supuesto de que $\triangle ABC$ tiene dos ángulos rectos debe ser falso, lo cual demuestra que $\triangle ABC$ puede tener como máximo un solo ángulo recto.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

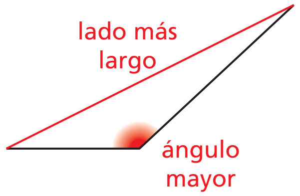
1. Escribe una prueba indirecta de que un triángulo escaleno no puede tener dos ángulos congruentes.

Relacionar los lados y los ángulos de un triángulo

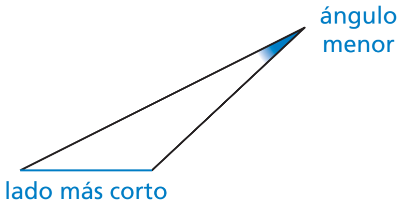
EJEMPLO 2 **Relacionar la longitud de los lados y la medida de los ángulos**

Dibuja un triángulo escaleno obtuso. Halla el ángulo mayor y el lado más largo y márcalos con rojo. Halla el ángulo menor y el lado más corto y márcalos con azul. ¿Qué observas?

SOLUCIÓN



El lado más largo y el ángulo mayor son opuestos entre sí.



El lado más corto y el ángulo menor son opuestos entre sí.

ERROR COMÚN

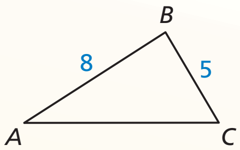
Ten cuidado de no confundir el símbolo $\angle$ que significa *ángulo* con el símbolo $<$ que significa *menor que*. Observa que la línea inferior del símbolo de ángulo es horizontal.

Las relaciones en el Ejemplo 2 son verdaderas para todos los triángulos, como se establece en los dos teoremas siguientes. Estas relaciones pueden ayudarte a decidir si es posible una distribución determinada de longitudes de lados y medidas de ángulos.

Teoremas

Teorema 6.9 **Teorema del lado más largo del triángulo**

Si un lado de un triángulo es más largo que otro lado, entonces, el ángulo opuesto al más largo, será mayor que el ángulo opuesto al lado más corto.

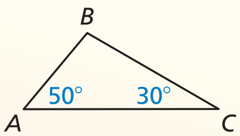


Prueba Ej. 43, pág. 342

$AB > BC$, por tanto $m\angle C > m\angle A$.

Teorema 6.10 **Teorema del ángulo mayor del triángulo**

Si un ángulo de un triángulo es mayor que otro ángulo, entonces el lado opuesto al ángulo mayor será más largo que el lado opuesto del ángulo menor.



Prueba pág. 337

$m\angle A > m\angle C$, por tanto $BC > AB$.

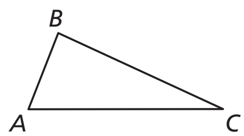
ERROR COMÚN

Al presuponer que lo opuesto es verdadero, asegúrate de considerar todos los casos.

PRUEBA **Teorema del ángulo mayor del triángulo**

Dado $m\angle A < m\angle C$

Demostrar $BC < AB$



Prueba indirecta

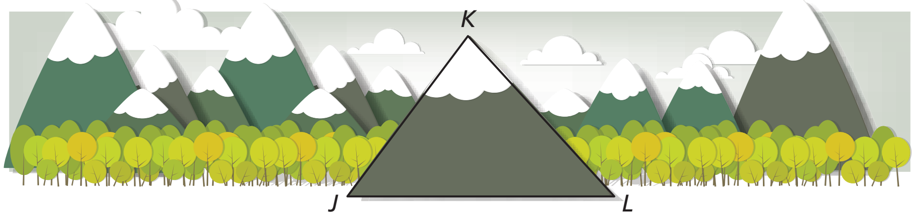
Paso 1 Asume temporalmente que $BC \not> AB$. Por tanto, se desprende que $BC < AB$ o $BC = AB$.

Paso 2 Si $BC < AB$, entonces, $m\angle A < m\angle C$ según el Teorema del lado más largo del triángulo. Si $BC = AB$, entonces, $m\angle A = m\angle C$ según el Teorema de los ángulos base (Teorema 5.6).

Paso 3 Ambas conclusiones contradicen el enunciado dado de que $m\angle A > m\angle C$. Por tanto, el supuesto temporal de que $BC \not> AB$ no puede ser verdadero. Esto demuestra que $BC > AB$.

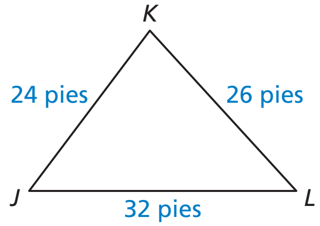
EJEMPLO 3 Ordenar las medidas de los ángulos de un triángulo

Estás construyendo un escenario que muestra una montaña triangular grande. La orilla inferior de la montaña mide aproximadamente 32 pies de largo, la pendiente izquierda mide alrededor de 24 pies de largo y la pendiente derecha es de aproximadamente 26 pies de largo. Haz una lista de los ángulos de $\triangle JKL$ ordenados de menor a mayor.



SOLUCIÓN

Dibuja el triángulo que representa la montaña. Rotula las longitudes de los lados.



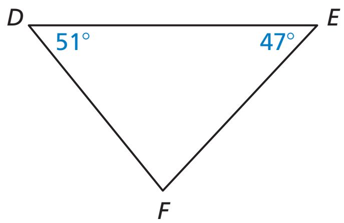
Los lados del más corto al más largo son $\overline{JK}$, $\overline{KL}$ y $\overline{JL}$. Los ángulos opuestos a estos lados son $\angle L$, $\angle J$ y $\angle K$, respectivamente.

▶ Por tanto, por el Teorema del lado más largo del triángulo, los ángulos de menor a mayor son $\angle L$, $\angle J$ y $\angle K$.

EJEMPLO 4 Ordenar las longitudes de los lados de un triángulo

Haz una lista de los lados de $\triangle DEF$ ordenados de menor a mayor.

SOLUCIÓN



Primero, halla $m\angle F$ utilizando el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1).

$$m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180°$$

$$51° + 47° + m\angle F = 180°$$

$$m\angle F = 82°$$

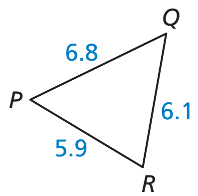
Los ángulos de menor a mayor son $\angle E$, $\angle D$ y $\angle F$. Los lados opuestos a estos ángulos son $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DE}$, respectivamente.

▶ Así que, por el Teorema del ángulo mayor del triángulo los lados ordenados de menor a mayor son $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DE}$.

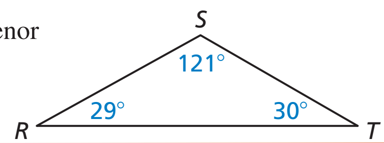
Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

2. Haz una lista de los ángulos de $\triangle PQR$ ordenados de menor a mayor.

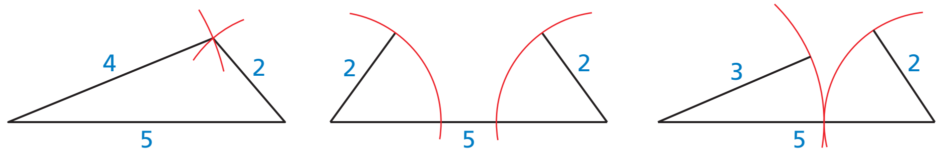


3. Haz una lista de los lados de $\triangle RST$ ordenados de menor a mayor.



Utilizar el Teorema de la desigualdad de triángulos

No cualquier grupo de tres segmentos puede formar un triángulo. Las longitudes de los segmentos deben ajustarse a cierta relación. Por ejemplo, abajo se muestran tres intentos de construcciones que utilizan segmentos con las longitudes dadas. Sólo el primer grupo de segmentos forma un triángulo.

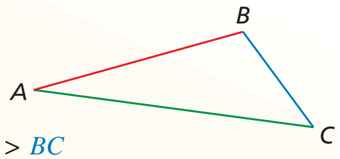


Cuando empiezas con el lado más largo y le unes los otros dos lados en sus extremos, puedes ver que los otros dos lados no son lo suficientemente largos para formar un triángulo en la segunda y tercera figuras. Esto lleva al *Teorema de la desigualdad del triángulo*.

Teorema

Teorema 6.11 Teorema de la desigualdad de triángulos

La suma de las longitudes de dos lados cualquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.



$AB + BC > AC$ $\quad$ $AC + BC > AB$ $\quad$ $AB + AC > BC$

Prueba Ej. 47, pág. 342

EJEMPLO 5 Hallar las posibles longitudes de los lados

Un triángulo tiene un lado con una longitud de 14 y otro con una de 9. Describe las posibles longitudes del tercer lado.

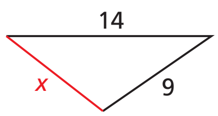
SOLUCIÓN

Sea x la longitud del tercer lado. Traza diagramas para ayudarte a visualizar los valores pequeños y grandes de x. Después utiliza el Teorema de la desigualdad de triángulos para escribir y resolver las desigualdades.

LEER

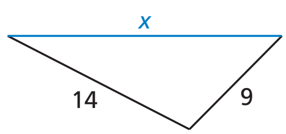
Puedes combinar las dos desigualdades, $x > 5$ y $x < 23$, para escribir la desigualdad compuesta $5 < x < 23$. Esto se puede leer como *x está entre 5 y 23*.

Valores pequeños de x



$$x + 9 > 14$$
$$x > 5$$

Valores grandes de x



$$9 + 14 > x$$
$$23 > x, \text{ or } x < 23$$

▶ La longitud del tercer lado debe ser mayor que 5 y menor que 23.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. Un triángulo tiene un lado de 12 pulgadas de longitud y otro de 20. Describe las posibles longitudes del tercer lado.

Determina si es posible construir un triángulo con las longitudes dadas de los lados. Explica tu razonamiento.

5. 4 pies, 9 pies, 10 pies $\quad$ **6.** 8 m, 9 m, 18 m $\quad$ **7.** 5 cm, 7 cm, 12 cm

6.5 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** ¿Por qué una prueba indirecta también se denomina *demostración por contradicción*?

2. **ESCRIBIR** ¿Cómo puedes decir qué lado del triángulo es el más largo a partir de las medidas de los ángulos del triángulo? ¿Cómo puedes decir cuál lado es el más corto?

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, escribe el primer paso en una prueba indirecta del enunciado. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. Si $WV + VU \neq 12$ pulgadas y $VU = 5$ pulgadas, entonces $WV \neq 7$ pulgadas.

4. Si x y y son enteros impares, entonces, xy es impar.

5. En $\triangle ABC$, si $m\angle A = 100°$, entonces $\angle B$ no es un ángulo recto.

6. En $\triangle JKL$, si M es el punto medio de $\overline{KL}$, entonces $\overline{JM}$ es la mediana.

En los Ejercicios 7 y 8, determina cuál de los dos enunciados se contradice con el otro. Explica tu razonamiento.

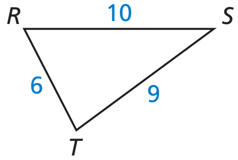
7. Ⓐ $\triangle LMN$ es un triángulo rectángulo.
   Ⓑ $\angle L \cong \angle N$
   Ⓒ $\triangle LMN$ es equilátero.

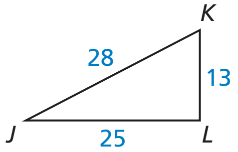
8. Ⓐ Tanto $\angle X$ como $\angle Y$ tienen medidas mayores que 20°.
   Ⓑ Tanto $\angle X$ como $\angle Y$ tienen medidas menores que 30°.
   Ⓒ $m\angle X + m\angle Y = 62°$

En los Ejercicios 9 y 10, utiliza una regla y un transportador para dibujar el tipo de triángulo dado. Rotula el ángulo mayor y el lado más largo en rojo y el ángulo menor y el lado más corto en azul. ¿Qué observas? *(Consulta el Ejemplo 2).*

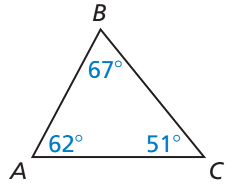
9. escaleno agudo
10. escaleno recto

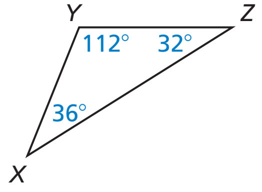
En los Ejercicios 11 y 12, haz una lista de los ángulos del triángulo dado de menor a mayor. *(Consulta el Ejemplo 3).*

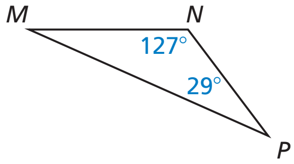
11. 

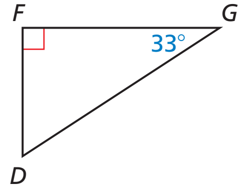
12. 

En los Ejercicios 13–16, haz una lista de los lados del triángulo dado del más corto al más largo. *(Consulta el Ejemplo 4).*

13. 

14. 

15. 

16. 

En los Ejercicios 17–20, describe las posibles longitudes del tercer lado del triángulo dadas las longitudes de los otros dos lados. *(Consulta el Ejemplo 5).*

17. 5 pulgadas, 12 pulgadas
18. 12 pies, 18 pies
19. 2 pies, 40 pulgadas
20. 25 metros, 25 metros

En los Ejercicios 21–24, ¿es posible construir un triángulo con las longitudes dadas de los lados? Si no, explica porqué.

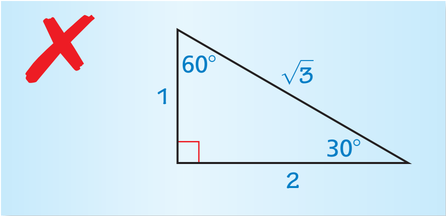
21. 6, 7, 11
22. 3, 6, 9
23. 28, 17, 46
24. 35, 120, 125

25. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al escribir el primer paso de una prueba indirecta.

Demuestra que $\angle A$ es obtuso.

Paso 1 Asume temporalmente que $\angle A$ es agudo.

26. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al rotularlas longitudes de los lados 1, 2 y $\sqrt{3}$ en el triángulo.



27. RAZONAR Eres un abogado que representa a un cliente acusado de un delito. Éste tuvo lugar en Los Ángeles, California. Las cámaras de seguridad muestran que tu cliente estaba en Nueva York cuando ocurrió el delito. Explica cómo puedes utilizar el razonamiento indirecto para demostrar la inocencia de tu cliente.

28. RAZONAR Tu clase tiene menos de 30 estudiantes. El maestro divide tu clase en dos grupos. El primero tiene 15 estudiantes. Utiliza el razonamiento indirecto para demostrar que el segundo debe tener menos de 15 estudiantes.

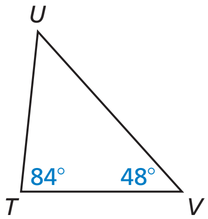
29. RESOLVER PROBLEMAS ¿Qué enunciado acerca de $\triangle TUV$ es falso?

Ⓐ $UV > TU$

Ⓑ $UV + TV > TU$

Ⓒ $UV < TV$

Ⓓ $\triangle TUV$ es un isósceles.



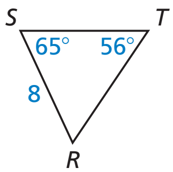
30. RESOLVER PROBLEMAS En $\triangle RST$, ¿cuál sería una posible longitud de $\overline{ST}$? Selecciona todas las aplicables.

Ⓐ 7

Ⓑ 8

Ⓒ 9

Ⓓ 10



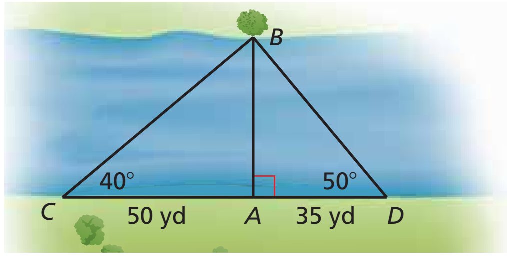
31. PRUEBA Escribe una prueba indirecta de que un número impar no es divisible entre 4.

32. PRUEBA Escribe una prueba indirecta del enunciado "En $\triangle QRS$, si $m\angle Q + m\angle R = 90°$, entonces, $m\angle S = 90°$."

33. ESCRIBIR Explica porqué la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre debe ser más larga que cualquiera de sus catetos.

34. PENSAMIENTO CRÍTICO ¿Sería posible decidir si tres longitudes de lados forman un triángulo sin revisar las tres desigualdades mostradas en el Teorema de desigualdad de los triángulos (Teorema 6.11)? Explica tu razonamiento.

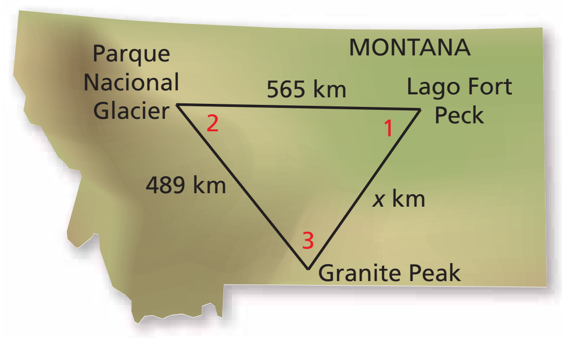
35. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Puedes estimar el ancho del río del punto A al árbol en el punto B al medir el ángulo que hace con el árbol en varios lugares a lo largo de la ribera. El diagrama muestra los resultados para las ubicaciones C y D.



a. Mediante $\triangle BCA$ y $\triangle BDA$, determina los posibles anchos del río. Explica tu razonamiento.

b. ¿Qué podrías hacer si desearas obtener una estimación más exacta?

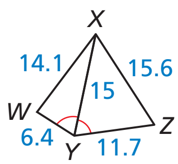
36. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Viajas del Lago Fort Peck al Parque Nacional Glacier y de éste al Granite Peak.



a. Escribe dos desigualdades que representen las posibles distancias de Granite Peak al Lago Fort Peck.

b. ¿Qué repercusiones tendrá en tu respuesta a la parte (a) saber que $m\angle 2 < m\angle 1$ y $m\angle 2 < m\angle 3$?

37. RAZONAR En la figura, $\overline{XY}$ biseca a $\angle WYZ$. Haz una lista de los seis ángulos de $\triangle XYZ$ y $\triangle WXY$ ordenados de menor a mayor. Explica tu razonamiento.

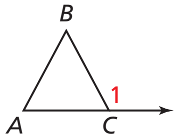


38. CONEXIONES MATEMÁTICAS En $\triangle DEF$, $m\angle D = (x + 25)°$, $m\angle E = (2x - 4)°$ y $m\angle F = 63°$. Haz una lista de las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo, ordenadas de menor a mayor.

39. **ANALIZAR RELACIONES** Otra relación de desigualdad de los triángulos está dada por el Teorema de la desigualdad del ángulo exterior, según la cual:

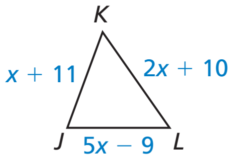
La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes.

Explica cómo sabes que $m\angle 1 > m\angle A$ y $m\angle 1 > m\angle B$ en $\triangle ABC$ con un ángulo exterior de $\angle 1$.

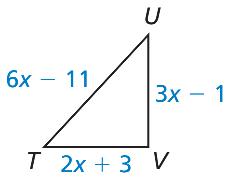


CONEXIONES MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 40 y 41, describe los valores posibles de *x*.**

40.

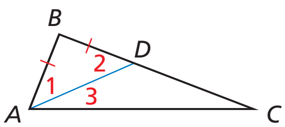


41.



42. **¿CÓMO LO VES?** Tu casa está en la esquina de Hill Street y Eighth Street. La biblioteca está en la esquina de View Street y Seventh Street. ¿Cuál es la ruta más corta para llegar a tu casa desde la biblioteca? Explica tu razonamiento.

43. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Utiliza el diagrama para demostrar el Teorema del lado más largo del triángulo (Teorema 6.9).



Dado $BC > AB$, $BD = BA$

Demostrar $m\angle BAC > m\angle C$

44. **USAR LA ESTRUCTURA** La longitud de la base de un triángulo isósceles es ℓ. Describe las posibles longitudes de cada cateto. Explica tu razonamiento.

45. **ARGUMENTAR** Tu compañero de clases afirma que ha dibujado un triángulo con un lado con una longitud de 13 pulgadas y un perímetro de 2 pies. ¿Es posible? Explica tu razonamiento.

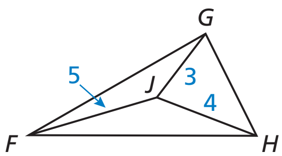
46. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Recorta dos pedazos de cuerda de 24 centímetros de largo. Construye un triángulo isósceles con una cuerda y un triángulo escaleno con la otra. Mide y anota las longitudes de los lados. Después clasifica cada triángulo con base en sus ángulos.

47. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Demuestra el Teorema de la desigualdad de triángulos (Teorema 6.11).

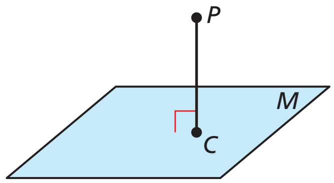
Dado $\triangle ABC$

Demostrar $AB + BC > AC$, $AC + BC > AB$ y $AB + AC > BC$

48. **PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN** ¿El perímetro $\triangle HGF$, debe estar entre dos enteros, cuáles son? Explica tu razonamiento.



49. **PRUEBA** Escribe una prueba indirecta de que un segmento perpendicular es el segmento más corto de un punto a un plano.



Dado $\overline{PC} \perp$ al plano M

Demostrar $\overline{PC}$ es el segmento más corto de P al plano M.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

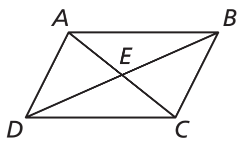
Nombra el ángulo incluido entre el par de lados dados. *(Sección 5.3)*

50. $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$

51. $\overline{AC}$ y $\overline{DC}$

52. $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$

53. $\overline{CE}$ y $\overline{BE}$



6.6 Desigualdades en dos triángulos

Pregunta esencial Si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de otro triángulo, ¿qué puedes decir acerca del tercer lado de los triángulos?

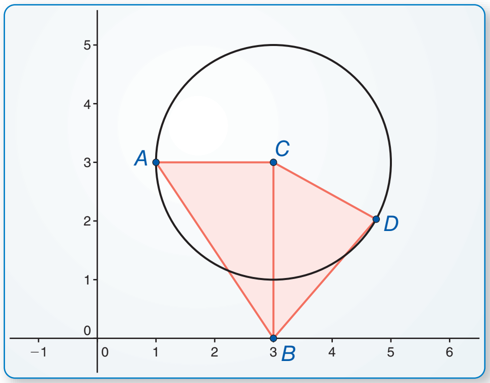
EXPLORACIÓN 1 Comparar medidas en triángulos

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica.

a. Dibuja $\triangle ABC$, como se muestra abajo.

b. Dibuja el círculo con el centro $C(3, 3)$ que pasa a través del punto $A(1, 3)$.

c. Dibuja $\triangle DBC$ de manera que D sea un punto en el círculo.



Muestra
Puntos
$A(1, 3)$
$B(3, 0)$
$C(3, 3)$
$D(4.75, 2.03)$
Segmentos
$BC = 3$
$AC = 2$
$DC = 2$
$AB = 3.61$
$DB = 2.68$

d. ¿Cuál de los dos lados de $\triangle ABC$ son congruentes con los dos lados de $\triangle DBC$? Justifica tu respuesta.

e. Compara las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{DB}$. Después compara las medidas de $\angle ACB$ y $\angle DCB$. ¿Los resultados son los que esperabas? Explica.

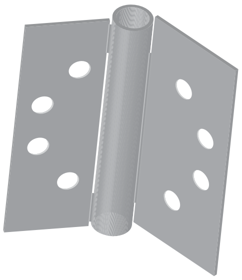
f. Arrastra el punto D a varios lugares del círculo. En cada lugar, repite la parte (e). Copia y anota tus resultados en la siguiente tabla.

	D	*AC*	*BC*	*AB*	*BD*	$m\angle ACB$	$m\angle BCD$
1.	(4.75, 2.03)	2	3				
2.		2	3				
3.		2	3				
4.		2	3				
5.		2	3				

g. Busca un patrón en las medidas de tu tabla. Después escribe una conjetura que resuma tus observaciones.

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas desarrollar una progresión lógica de enunciados y hacer conjeturas para explorar la veracidad de éstas.



Comunicar tu respuesta

2. Si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de otro triángulo, ¿qué puedes decir acerca del tercer lado de los triángulos?

3. Explica cómo puedes utilizar la bisagra mostrada a la izquierda para representar el concepto descrito en la pregunta 2.

6.6 Lección

Vocabulario Esencial

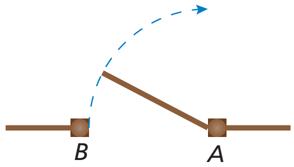
Anterior
prueba indirecta
desigualdad

Qué aprenderás

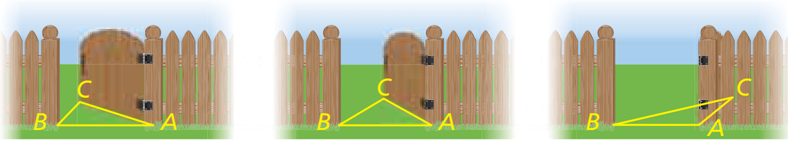
- Comparar las medidas en los triángulos.
- Resolver problemas de la vida real utilizando el Teorema de la bisagra.

Comparar las medidas en triángulos

Imagina una puerta entre los postes A y B de una reja que tiene bisagras en A y abre hacia B.



Al abrir la puerta, puedes pensar en $\triangle ABC$ con el lado $\overline{AC}$ formado por la puerta misma, el lado $\overline{AB}$ que representa la distancia entre los postes de la reja, y el lado $\overline{BC}$ que representa la apertura entre el poste B y el borde externo de la puerta.



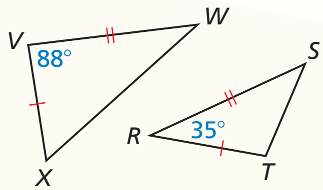
Observa que a medida que la puerta abre más, tanto la medida de $\angle A$ como la distancia BC aumentan. Esto sugiere el *Teorema de la bisagra*.

Teoremas

Teorema 6.12 Teorema de la bisagra

Si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de otro triángulo, y el ángulo incluido del primero es mayor que el del segundo, entonces el tercer lado del primero es más largo que el tercer lado del segundo.

Prueba BigIdeasMath.com

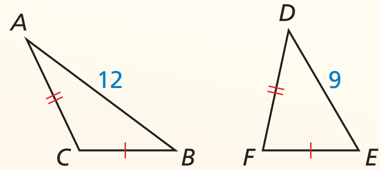


$WX > ST$

Teorema 6.13 Recíproco del Teorema de la bisagra

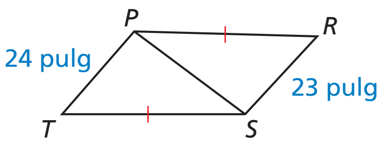
Si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de otro triángulo, y el tercer lado del primero es más largo que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo incluido del primero es mayor que el ángulo incluido del segundo.

Prueba Ej. 3, pág. 345



$m\angle C > m\angle F$

EJEMPLO 1 Utilizar el recíproco del Teorema de la bisagra



Dado que $\overline{ST} \cong \overline{PR}$, ¿cómo se compara $m\angle PST$ con $m\angle SPR$?

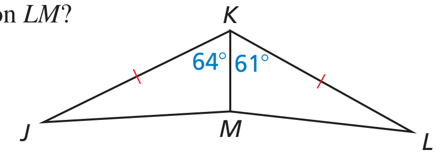
SOLUCIÓN

Sabes que $\overline{ST} \cong \overline{PR}$ y que $\overline{PS} \cong \overline{PS}$ según la Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1). Debido a que 24 pulgadas > 23 pulgadas, $PT > SR$. Por tanto, dos lados de $\triangle STP$ son congruentes con dos lados de $\triangle PRS$ y el tercer lado de $\triangle STP$ es más largo.

- Según el Recíproco del Teorema de la bisagra, $m\angle PST > m\angle SPR$.

EJEMPLO 2 Utilizar el Teorema de la bisagra

Dado que $\overline{JK} \cong \overline{LK}$, ¿cómo se compara JM con LM?



SOLUCIÓN

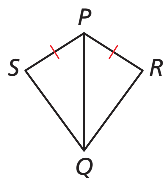
Sabes que $\overline{JK} \cong \overline{LK}$ y que $\overline{KM} \cong \overline{KM}$ según la Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1). Debido a que $64° > 61°$, $m\angle JKM > m\angle LKM$. Por tanto, dos lados de $\triangle JKM$ son congruentes con dos lados de $\triangle LKM$ y el ángulo incluido en $\triangle JKM$ es mayor.

▶ Según el Teorema de la bisagra, $JM > LM$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Utiliza el diagrama.



1. Si $PR = PS$ y $m\angle QPR > m\angle QPS$, ¿cuál es más largo, $\overline{SQ}$ o $\overline{RQ}$?

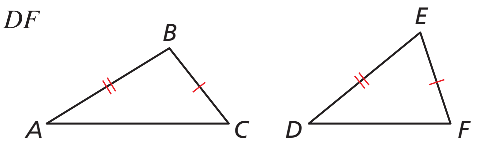
2. Si $PR = PS$ y $RQ < SQ$, ¿cuál es más largo, $\angle RPQ$ o $\angle SPQ$?

EJEMPLO 3 Demostrar el Recíproco del Teorema de la bisagra

Escribe una prueba indirecta del Recíproco del Teorema de la bisagra.

Dado $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $AC > DF$

Demostrar $m\angle B > m\angle E$



Prueba indirecta

Paso 1 Asume temporalmente que $m\angle B \not> m\angle E$. Entonces, se desprende que $m\angle B < m\angle E$ o $m\angle B = m\angle E$.

Paso 2 Si $m\angle B < m\angle E$, entonces, $AC < DF$ según el Teorema de la bisagra.

Si $m\angle B = m\angle E$, entonces, $\angle B \cong \angle E$. Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ según el Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5) y $AC = DF$.

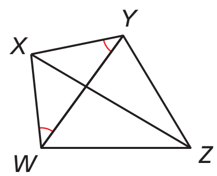
Paso 3 Ambas conclusiones contradicen el enunciado dado de que $AC > DF$. Por tanto, la suposición temporal de que $m\angle B \not> m\angle E$ no puede ser verdadera. Esto demuestra que $m\angle B > m\angle E$.

EJEMPLO 4 Demostrar relaciones de triángulos

Escribe una prueba de párrafo.

Dado $\angle XWY \cong \angle XYW$, $WZ > YZ$

Demostrar $m\angle WXZ > m\angle YXZ$



Prueba de párrafo Debido a que $\angle XWY \cong \angle XYW$, $\overline{XY} \cong \overline{XW}$ según el recíproco del Teorema de los ángulos base (Teorema 5.7). Por la Propiedad reflexiva de congruencia (Teorema 2.1), $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$. Como $WZ > YZ$, $m\angle WXZ > m\angle YXZ$ según el recíproco del Teorema de la bisagra.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

3. Escribe una suposición temporal con la que puedas demostrar indirectamente el Teorema de la bisagra. ¿A qué dos casos lleva esta suposición?

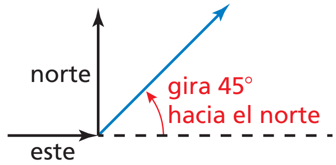
Resolver problemas de la vida real

EJEMPLO 5 **Resolver un problema de la vida real**

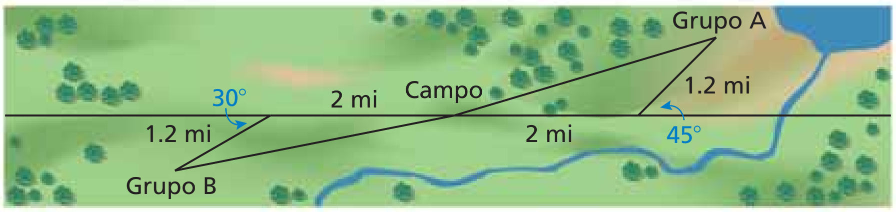
Dos grupos de ciclistas parten del mismo campo en direcciones opuestas. Cada grupo viaja 2 millas, después cambia de dirección y viaja 1.2 millas. El grupo A parte hacia el este y después gira 45º hacia el norte. El grupo B parte hacia el oeste y después gira 30º hacia el sur. ¿Qué grupo está más alejado del campo? Explica tu razonamiento.

SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Conoces las direcciones y las distancias que recorren los grupos de ciclistas. Debes determinar cuál grupo está más lejos del campo. Puedes interpretar un giro de 45º hacia el norte, como el que se muestra.



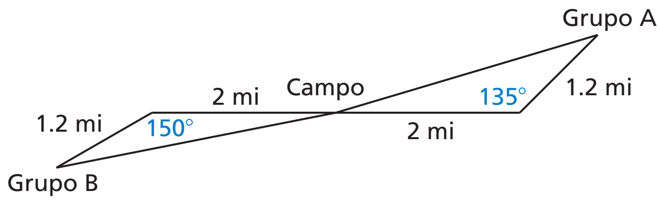
2. **Haz un plan** Dibuja un diagrama que represente la situación y marca las medidas que se te han dado. Las distancias que los grupos recorren y las distancias de regreso al campo forman dos triángulos. Los triángulos tienen dos lados congruentes de 2 millas y 1.2 millas. Incluye un tercer lado de cada triángulo en el diagrama.



3. **Resuelve el problema** Utiliza pares lineales para hallar los ángulos incluidos para las rutas que cada grupo toma.

   Grupo A: $180° - 45° = 135°$ **Grupo B:** $180° - 30° = 150°$

   Los ángulos incluidos son 135° y 150°.



   Como $150° > 135°$, la distancia a la que el grupo B está del campo es mayor que la distancia a la que el grupo A está del campo, según el Teorema de la bisagra.

   ▶ Entonces, el grupo B está más alejado del campo.

4. **Verifícalo** Como el ángulo incluido para el grupo A es 15º menor que el ángulo incluido para el grupo B, puedes razonar que el grupo A estaría más cerca del campo que el grupo B. Entonces, el grupo B está más lejos del campo.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 5, el grupo C deja el campo y viaja 2 millas hacia el norte, entonces gira 40º hacia el este y viaja 1.2 millas. Compara las distancias del campo para los tres grupos.

6.6 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

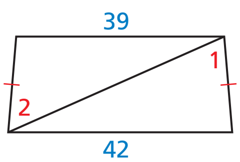
1. **ESCRIBIR** Explica porqué el Teorema 6.12 es conocido como el “Teorema de la bisagra”.

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** En $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, y $AC < DF$. So $m\angle$_____ $>$ $m\angle$_____ según el recíproco del Teorema de la bisagra (Teorema 6.13).

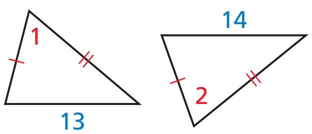
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, copia y completa el enunciado con <, > o =. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 1).*

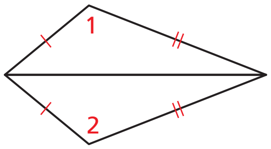
3. $m\angle 1$ _____ $m\angle 2$



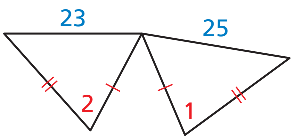
4. $m\angle 1$ _____ $m\angle 2$



5. $m\angle 1$ _____ $m\angle 2$

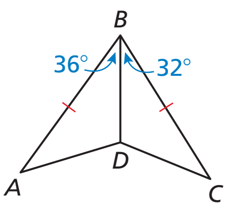


6. $m\angle 1$ _____ $m\angle 2$

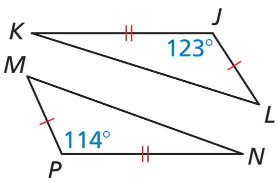


En los Ejercicios 7–10, copia y completa el enunciado con <, > o =. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 2).*

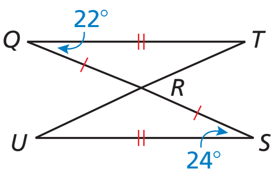
7. AD _____ CD



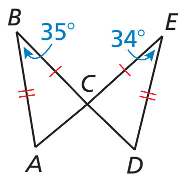
8. MN _____ LK



9. TR _____ UR



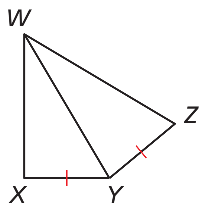
10. AC _____ DC



PRUEBA En los Ejercicios 11 y 12, escribe una demostración. *(Consulta el Ejemplo 4).*

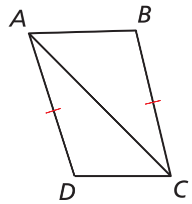
11. **Dado** $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$, $m\angle WYZ > m\angle WYX$

Demostrar $WZ > WX$



12. **Dado** $\overline{BC} \cong \overline{DA}$, $DC < AB$

Demostrar $m\angle BCA > m\angle DAC$



En los Ejercicios 13 y 14, tú y tu amigo parten en diferentes vuelos desde el mismo punto. Determina qué vuelo está más lejos del aeropuerto. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 5).*

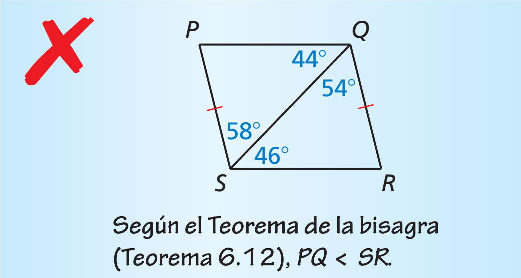
13. **Tu vuelo:** Vuela 100 millas hacia el oeste, después gira 20º hacia el norte y vuela 50 millas.

Vuelo de tu amigo: Vuela 100 millas hacia el norte, después gira 30º hacia el este y vuela 50 millas.

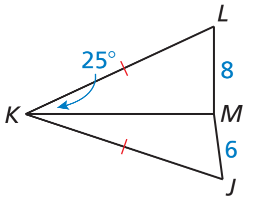
14. **Tu vuelo:** Vuela 210 millas hacia el sur, después gira 70º hacia el oeste y vuela 80 millas.

Vuelo de tu amigo: Vuela 80 millas hacia el norte, después gira 50º hacia el este y vuela 210 millas.

15. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al usar el Teorema de la bisagra (Teorema 6.12).

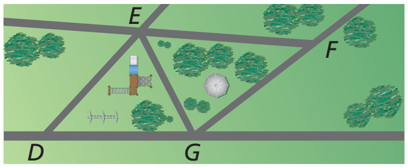


16. RAZONAMIENTO REPETIDO ¿Cuál es una medida posible de $\angle JKM$? Selecciona todas las que apliquen.



Ⓐ 15° Ⓑ 22° Ⓒ 25° Ⓓ 35°

17. SACAR CONCLUSIONES La ruta de E a F es más larga que la ruta de E a D. La ruta de G a D tiene la misma longitud que la ruta de G a F. ¿Qué puedes concluir acerca de los ángulos de las rutas? Explica tu razonamiento.

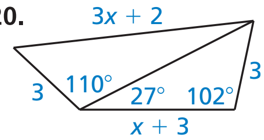


18. RAZONAMIENTO ABSTRACTO En $\triangle EFG$, la bisectriz de $\angle F$ se interseca con la bisectriz de $\angle G$ en el punto H. Explica porqué $\overline{FG}$ debe ser mayor que $\overline{FH}$ o $\overline{HG}$.

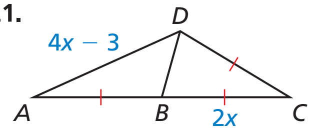
19. RAZONAMIENTO ABSTRACTO $\overline{NR}$ es una mediana de $\triangle NPQ$ y $NQ > NP$. Explica porqué $\angle NRQ$ es obtuso.

CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 20 y 21, escribe y resuelve una desigualdad para los posibles valores de *x*.

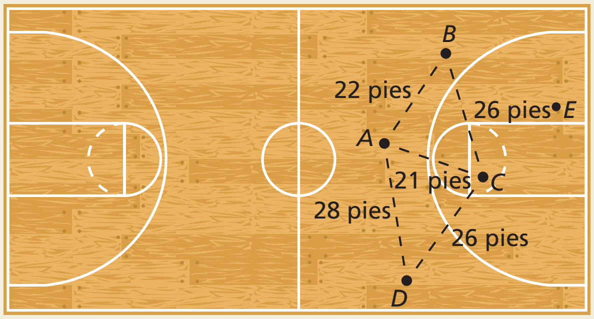
20.



21.



22. ¿CÓMO LO VES? En el diagrama, los triángulos están formados por la ubicación de los jugadores en la cancha de basquetbol. Las líneas punteadas representan las posibles rutas de la pelota de básquet conforme los jugadores la van pasando. ¿Cómo se compara $m\angle ABC$ con $m\angle ACD$?



23. PENSAMIENTO CRÍTICO En $\triangle ABC$, las altitudes de B y C se encuentran en el punto D, y $m\angle BAC > m\angle BDC$. ¿Qué es verdad en cuanto a $\triangle ABC$? Justifica tu respuesta.

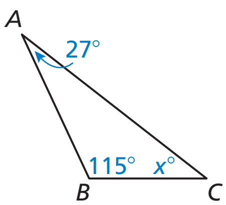
24. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Los postulados y teoremas de este libro representan la geometría Euclidiana. En la geometría esférica, todos los puntos están en la superficie de una esfera. Una línea es un círculo en la esfera cuyo diámetro es igual al diámetro de la esfera. En la geometría esférica, menciona una desigualdad que implique la suma de los ángulos de un triángulo. Halla una fórmula para el área de un triángulo en la geometría esférica.

Mantener el dominio de las matemáticas

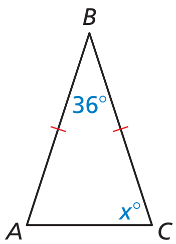
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla el valor de *x*. *(Sección 5.1 y Sección 5.4)*

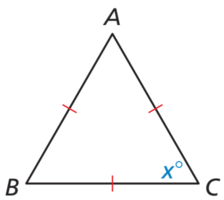
25.



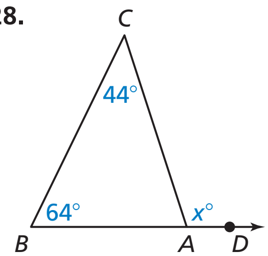
26.



27.



28.



6.4–6.6 ¿Qué aprendiste

Vocabulario esencial

segmento medio de un triángulo, *pág. 330*
prueba indirecta, *pág. 336*

Conceptos esenciales

Sección 6.4

Utilizar el segmento medio de un triángulo, *pág. 330*
Teorema 6.8 Teorema del segmento medio del triángulo, *pág. 331*

Sección 6.5

Cómo escribir una prueba indirecta (Prueba por contradicción), *pág. 336*
Teorema 6.9 Teorema del lado más largo del triángulo, *pág. 337*
Teorema 6.10 Teorema del ángulo mayor del triángulo, *pág. 337*
Teorema 6.11 Teorema de la desigualdad de triángulos, *pág. 339*

Sección 6.6

Teorema 6.12 Teorema de la bisagra, *pág. 344*
Teorema 6.13 Recíproco del Teorema de la bisagra, *pág. 344*

Prácticas matemáticas

1. ¿En el Ejercicio 25 de la página 334, analiza la relación entre la etapa y el perímetro total de todos los triángulos sombreados en esa etapa. Después predice el perímetro total de todos los triángulos sombreados en la Etapa 4.
2. En el Ejercicio 17 de la página 340, escribe las tres desigualdades utilizando el Teorema de la desigualdad de triángulos (Teorema 6.11). Determina la racionalidad de cada uno. ¿Por qué sólo necesitas usar dos de las tres desigualdades?
3. En el Ejercicio 23 de la página 348, prueba los tres casos de triángulos (agudo, recto y obtuso) para comprender mejor la solución.

Tarea de desempeño

Estaciones de renta de bicicletas

Los planificadores de una gran ciudad desean agregar estaciones de renta de bicicletas en todo el centro. ¿Cómo decidirías las mejores ubicaciones para ello? ¿Dónde colocarías las estaciones de renta con base en las ideas de los planificadores de la ciudad?

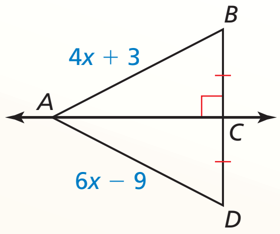
Para explorar las respuestas a estas preguntas y más, visita ***BigIdeasMath.com***.

 Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

6.1 Bisectrices perpendiculares y de ángulos *(págs. 301–308)*

Halla AD.

En la figura, $\overleftrightarrow{AC}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{BD}$.

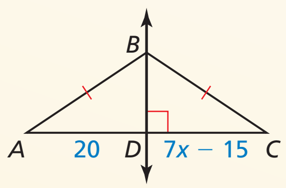


$AB = AD$	Teorema de la bisectriz perpendicular (Teorema 6.1)
$4x + 3 = 6x - 9$	Sustituye.
$x = 6$	Resuelve para hallar x.

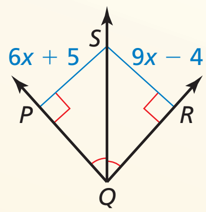
▶ Por tanto, $AD = 6(6) - 9 = 27$.

Halla la medida indicada. Explica tu razonamiento.

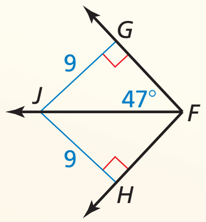
1. DC



2. RS



3. $m\angle JFH$



6.2 Bisectrices de triángulos *(págs. 309–318)*

Halla las coordenadas del circuncentro de $\triangle QRS$ con vértices $Q(3, 3)$, $R(5, 7)$ y $S(9, 3)$.

Paso 1 Grafica $\triangle QRS$.

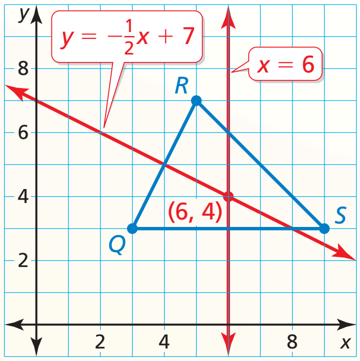
Paso 2 Halla las ecuaciones de dos bisectrices perpendiculares.

El punto medio de $\overline{QS}$ es $(6, 3)$. La línea que pasa por $(6, 3)$ que es perpendicular a $\overline{QS}$ es $x = 6$.

El punto medio de $\overline{QR}$ es $(4, 5)$. La línea que pasa por $(4, 5)$ que es perpendicular a $\overline{QR}$ es $y = -\frac{1}{2}x + 7$.

Paso 3 Halla el punto donde $x = 6$ y $y = -\frac{1}{2}x + 7$ se intersecan. Se intersecan en $(6, 4)$.

▶ Por tanto, las coordenadas del circuncentro son $(6, 4)$.

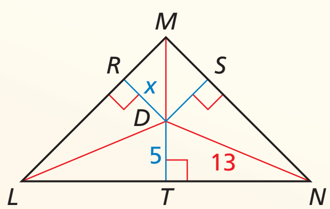


Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo con los vértices dados.

4. $T(-6, -5)$, $U(0, -1)$, $V(0, -5)$

5. $X(-2, 1)$, $Y(2, -3)$, $Z(6, -3)$

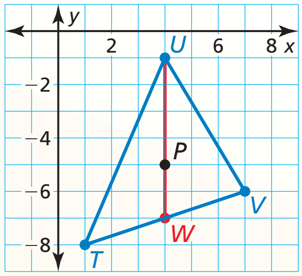
6. El punto D es el incentro de $\triangle LMN$. Halla el valor de x.



6.3 Medianas y altitudes de triángulos (págs. 319–326)

Halla las coordenadas del centroide $\triangle TUV$ con vértices $T(1, -8)$, $U(4, -1)$ y $V(7, -6)$

Paso 1 Grafica $\triangle TUV$.



Paso 2 Utiliza la fórmula del punto medio para hallar el punto medio W de $\overline{TV}$. Dibuja la mediana $\overline{UW}$.

$$W\left(\frac{1+7}{2}, \frac{-8+(-6)}{2}\right) = (4, -7)$$

Paso 3 Halla el centroide. Está a dos tercios de distancia de cada vértice a cada punto medio del lado opuesto.

La distancia del vértice $U(4, -1)$ a $W(4, -7)$ es $-1 - (-7) = 6$ unidades.

Por tanto, el centroide está $\frac{2}{3}(6) = 4$ unidades abajo del vértice U en $\overline{UW}$.

▶ Por tanto, las coordenadas del centroide P son $(4, -1 - 4)$ o $(4, -5)$.

Halla las coordenadas del centroide del triángulo con los vértices dados.

7. $A(-10, 3)$, $B(-4, 5)$, $C(-4, 1)$

8. $D(2, -8)$, $E(2, -2)$, $F(8, -2)$

Indica si el ortocentro del triángulo con los vértices dados está *dentro, en* o *fuera* del triángulo. Después halla las coordenadas del ortocentro.

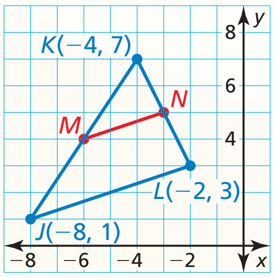
9. $G(1, 6)$, $H(5, 6)$, $J(3, 1)$

10. $K(-8, 5)$, $L(-6, 3)$, $M(0, 5)$

6.4 El teorema del segmento medio del triángulo (págs. 329–334)

En $\triangle JKL$, demuestra que segmento medio $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{JL}$ y que $MN = \frac{1}{2}JL$.

Paso 1 Halla las coordenadas de M y N hallando los puntos medios de $\overline{JK}$ y $\overline{KL}$.



$$M\left(\frac{-8+(-4)}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = M\left(\frac{-12}{2}, \frac{8}{2}\right) = M(-6, 4)$$

$$N\left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = N\left(\frac{-6}{2}, \frac{10}{2}\right) = N(-3, 5)$$

Paso 2 Halla y compara las pendientes de $\overline{MN}$ y $\overline{JL}$.

$$\text{pendiente de } \overline{MN} = \frac{5-4}{-3-(-6)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{pendiente de } \overline{JL} = \frac{3-1}{-2-(-8)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

▶ Debido a que las pendientes son las mismas, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{JL}$.

Paso 3 Halla y compara las longitudes de $\overline{MN}$ y $\overline{JL}$.

$$MN = \sqrt{[-3-(-6)]^2 + (5-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$JL = \sqrt{[-2-(-8)]^2 + (3-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

▶ Como $\sqrt{10} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{10}\right)$, $MN = \frac{1}{2}JL$.

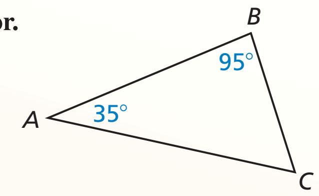
Halla las coordenadas de los vértices del triángulo del segmento medio para el triángulo con los vértices dados.

11. $A(-6, 8)$, $B(-6, 4)$, $C(0, 4)$

12. $D(-3, 1)$, $E(3, 5)$, $F(1, -5)$

6.5 Prueba indirecta y desigualdades en un triángulo *(págs. 335–342)*

a. Haz una lista de los lados $\triangle ABC$ en orden de menor a mayor.

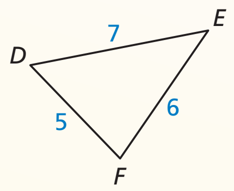


Primero, halla $m\angle C$ utilizando el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1).

$$\begin{aligned} m\angle A + m\angle B + m\angle C &= 180^\circ \\ 35^\circ + 95^\circ + m\angle C &= 180^\circ \\ m\angle C &= 50^\circ \end{aligned}$$

Los ángulos de menor a mayor son $\angle A$, $\angle C$ y $\angle B$. Los lados opuestos a estos ángulos son $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

▶ Entonces, según el Teorema del ángulo mayor del triángulo (Teorema 6.10), los lados de menor a mayor son $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



b. Haz una lista de los ángulos de $\triangle DEF$ ordenados de menor a mayor.

Los lados de menor a mayor son $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DE}$. Los ángulos opuestos a estos lados son $\angle E$, $\angle D$ y $\angle F$, respectivamente.

▶ Entonces, por el Teorema del lado más largo del triángulo (Teorema 6.9), los ángulos de menor a mayor son $\angle E$, $\angle D$ y $\angle F$.

Describe las longitudes posibles del tercer lado del triángulo dadas las longitudes de los otros dos lados.

13. 4 pulgadas, 8 pulgadas

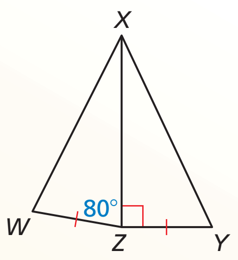
14. 6 metros, 9 metros

15. 11 pies, 18 pies

16. Escribe una prueba indirecta del enunciado "En $\triangle XYZ$, si $XY = 4$ y $XZ = 8$, entonces $YZ > 4$".

6.6 Desigualdades en dos triángulos *(págs. 343–348)*

Dado que $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$, ¿cómo se compara XY con XW?

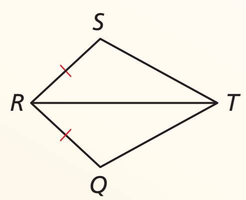


Sabes que $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$ y que $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$ según la Propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.1).

Debido a que 90º > 80º, $m\angle XZY > m\angle XZW$. Entonces, dos lados de $\triangle XZY$ son congruentes con dos lados de $\triangle XZW$ y el ángulo incluido en $\triangle XZY$ es mayor.

▶ Según el Teorema de la bisagra (Teorema 6.12), $XY > XW$.

Utiliza el diagrama.



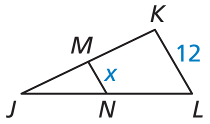
17. Si $RQ = RS$ y $m\angle QRT > m\angle SRT$, entonces, ¿cómo se compara $\overline{QT}$ con $\overline{ST}$?

18. Si $RQ = RS$ y $QT > ST$, entonces, ¿cómo se compara $\angle QRT$ con $\angle SRT$?

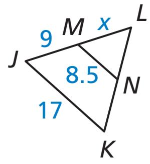
6 Prueba del capítulo

En los Ejercicios 1 y 2, $\overline{MN}$ es un segmento medio de $\triangle JKL$. Halla el valor de x.

1.

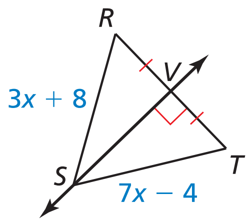


2.

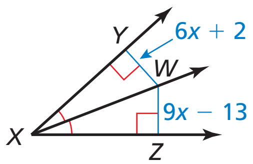


Halla la medida indicada. Identifica el teorema que utilizas.

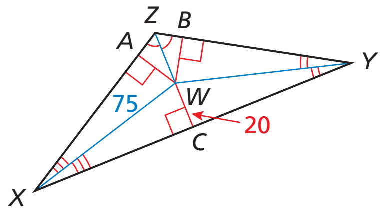
3. *ST*



4. *WY*

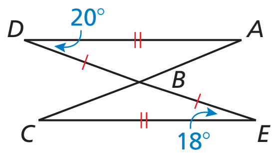


5. *BW*

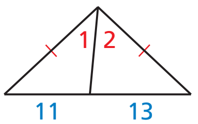


Copia y completa el enunciado con <, > o =.

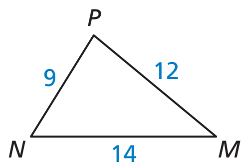
6. AB __ CB



7. $m\angle 1$ ___ $m\angle 2$



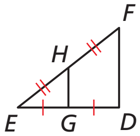
8. $m\angle MNP$ ___ $m\angle NPM$



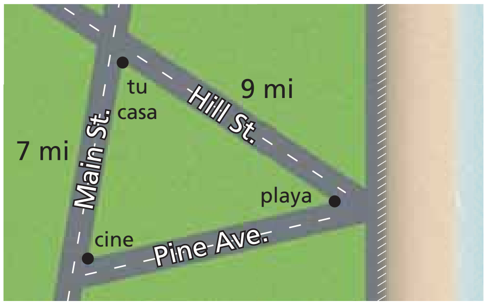
9. Halla las coordenadas del circuncentro, ortocentro y centroide del triángulo con vértices $A(0, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(0, 6)$.

10. Escribe una prueba indirecta del Corolario al Teorema de los ángulos base (Corolario 5.2): Si $\triangle PQR$ es equilátero, entonces es equiángulo.

11. $\triangle DEF$ es un triángulo rectángulo con un área A. Utiliza el área de $\triangle DEF$ para escribir una expresión para el área de $\triangle GEH$. Justifica tu respuesta.



12. Dos excursionistas parten de un centro de visitantes. El primero camina 4 millas hacia el oeste, después gira 40º hacia el sur y camina 1.8 millas. El segundo camina 4 millas al este, después gira 52º hacia el norte y camina 1.8 millas. ¿Cuál excursionista está más lejos del centro de visitantes? Explica cómo lo sabes.



En los Ejercicios 13–15, utiliza el mapa.

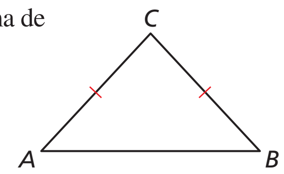
13. Describe las longitudes posibles de Pine Avenue.

14. Recorres en bicicleta un camino que representa la distancia más corta de la playa a Main Street. Terminas exactamente a la mitad del camino entre tu casa y el cine. ¿Cuál es la longitud de Pine Avenue? Explica.

15. Un mercado está a la misma distancia de tu casa, el cine y la playa. Copia el mapa y ubica el mercado.

6 Evaluación acumulativa

1. ¿Qué definición(es) y teorema(s) debes utilizar para demostrar el recíproco del Teorema de la bisectriz perpendicular (Teorema 6.2)? Selecciona todos los aplicables.



Dado $CA = CB$

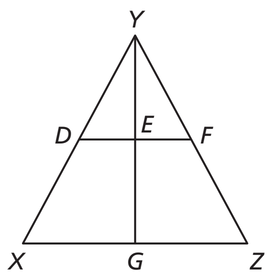
Demostrar El punto C pertenece a la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

definición de la bisectriz perpendicular	definición de la bisectriz de un ángulo
definición de la congruencia de segmentos	definición de la congruencia de ángulos
Teorema de los ángulos base (Teorema 5.6)	recíproco del Teorema de los ángulos base (Teorema 5.7)
Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10)	Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11)

2. Utiliza la información dada para escribir una prueba de dos columnas.

Dado $\overline{YG}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{DF}$.

Demostrar $\triangle DEY \cong \triangle FEY$



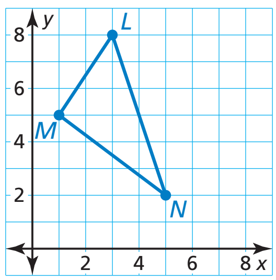
3. ¿Cuáles son las coordenadas del centroide de $\triangle LMN$?

Ⓐ (2, 5)

Ⓑ (3, 5)

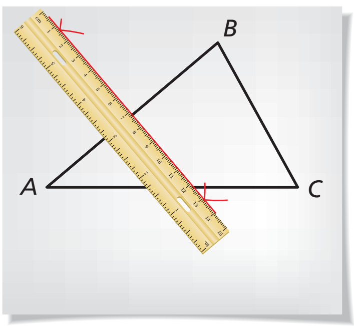
Ⓒ (4, 5)

Ⓓ (5, 5)

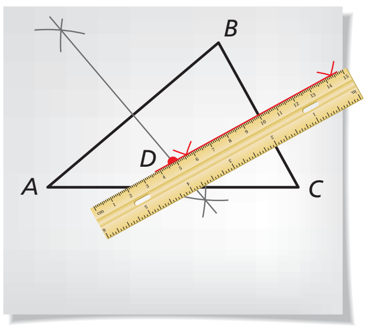


4. Utiliza los pasos para la construcción a fin de explicar cómo sabes que el círculo está circunscrito alrededor de $\triangle ABC$.

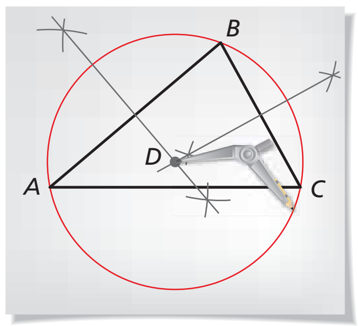
Paso 1



Paso 2



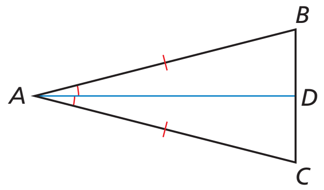
Paso 3



5. Escribe las razones faltantes en la prueba del Teorema de los ángulos base (Teorema 5.6).

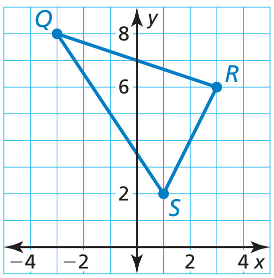
Dado $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Demostrar $\angle B \cong \angle C$



ENUNCIADOS	**RAZONES**
1. Traza $\overline{AD}$ a bisectriz de un ángulo de $\angle CAB$.	**1.** Construcción de la bisectriz de un ángulo
2. $\angle CAD \cong \angle BAD$	**2.** ______________________
3. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	**3.** ______________________
4. $\overline{DA} \cong \overline{DA}$	**4.** ______________________
5. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$	**5.** ______________________
6. $\angle B \cong \angle C$	**6.** ______________________

6. Utiliza la gráfica de $\triangle QRS$.



a. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo del segmento medio. Rotula los vértices como T, U y V.

b. Demuestra que cada segmento medio que se une a los puntos medios de los dos lados es paralelo al tercer lado y es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

7. Un triángulo tiene vértices $X(-2, 2)$, $Y(1, 4)$ y $Z(2, -2)$. Tu amigo afirma que una translación de $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 3)$ y una dilatación por un factor de escala de 3 producirá una transformación similar. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de tu amigo? Explica tu razonamiento.

8. La gráfica muestra una dilatación del cuadrilátero $ABCD$ por un factor de escala de 2. Demuestra que la línea que contiene los puntos B y D es paralela a la línea que contiene los puntos B' y D'.