8 Similitud

Tablero de tejo *(pág. 443)*

Rueda de la fortuna *(pág. 443)*

Astabandera *(pág. 430)*

Cancha de tenis *(pág. 425)*

Alberca olímpica *(pág. 420)*

Mantener el dominio de las matemáticas

Determinar si las razones forman una proporción

Ejemplo 1 **Indica si $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$ forman una proporción.**

Compara las razones en su mínima expresión.

$$\frac{2}{8} = \frac{2 \div 2}{8 \div 2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{12} = \frac{3 \div 3}{12 \div 3} = \frac{1}{4}$$

Las razones son equivalentes.

▶ Entonces, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$ forman una proporción.

Indica si las razones forman una proporción.

1. $\frac{5}{3}, \frac{35}{21}$

2. $\frac{9}{24}, \frac{24}{64}$

3. $\frac{8}{56}, \frac{6}{28}$

4. $\frac{18}{4}, \frac{27}{9}$

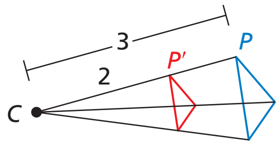
5. $\frac{15}{21}, \frac{55}{77}$

6. $\frac{26}{8}, \frac{39}{12}$

Hallar el factor de escala

Ejemplo 2 **Halla el factor de escala de cada dilatación.**

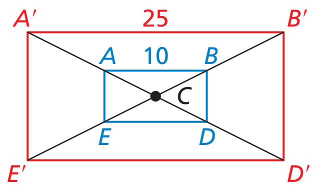
a.



▶ Como $\frac{CP'}{CP} = \frac{2}{3}$,

el factor de escala es $k = \frac{2}{3}$.

b.

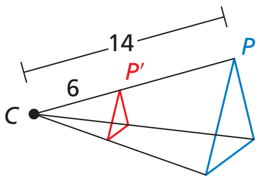


▶ Como $\frac{A'B'}{AB} = \frac{25}{10}$,

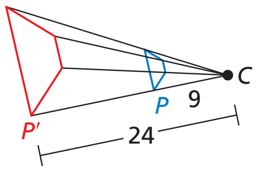
el factor de escala es $k = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$.

Halla el factor de escala de la dilatación.

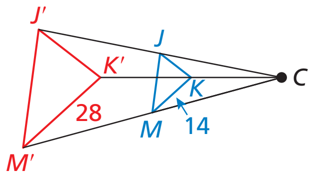
7.



8.



9.



10. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Si la razón X y Y forman una proporción y la razón Y y Z forman una proporción, ¿la razón X y la razón Z forman una proporción? Explica tu razonamiento.

Prácticas matemáticas

Los estudiantes que dominan las matemáticas buscan un patrón o hacen uso de la estructura.

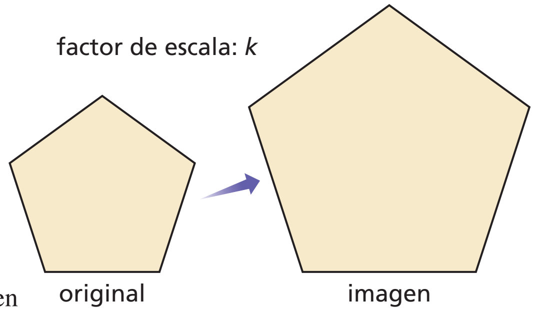
Discernir entre un patrón o una estructura

Concepto Esencial

Dilataciones, perímetro, área y volumen

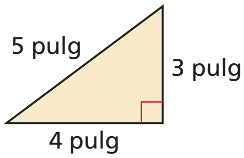
Considera una figura que está dilatada por un factor de escala de k.

1. El perímetro de la imagen es k veces el perímetro de la figura original.
2. El área de la imagen es k^2 veces el área de la figura original.
3. Si la figura original es tridimensional, entonces, el volumen de la imagenes es k^3 veces el volumen de la figura original.



EJEMPLO 1 Hallar el perímetro y área después de una dilatación

El triángulo mostrado tiene longitudes de 3, 4 y 5 pulgadas. Halla el perímetro y el área de la imagen cuando el triángulo esté dilatado por un factor de escala de (a) 2, (b) 3 y (c) 4.



SOLUCIÓN

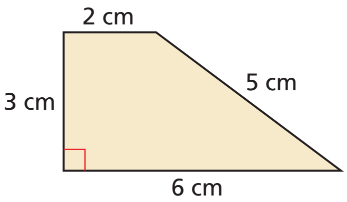
Perímetro: $P = 5 + 3 + 4 = 12$ pulg

Área: $A = \frac{1}{2}(4)(3) = 6$ pulg^2

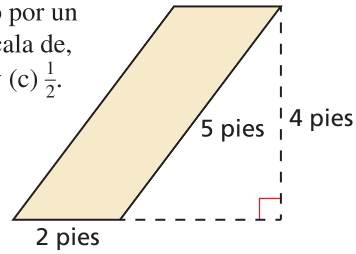
	Factor de escala: k	Perímetro: kP	Área: k^2A
a.	2	$2(12) = 24$ pulg	$(2^2)(6) = 24$ pulg^2
b.	3	$3(12) = 36$ pulg	$(3^2)(6) = 54$ pulg^2
c.	4	$4(12) = 48$ pulg	$(4^2)(6) = 96$ pulg^2

Monitoreo del progreso

1. Halla el perímetro y el área de la imagen cuando el trapecio esté dilatado por un factor de escala de (a) 2, (b) 3 y (c) 4.



2. Halla el perímetro y el área de la imagen cuando el paralelogramo esté dilatado por un factor de escala de, (a) 2, (b) 3 y (c) $\frac{1}{2}$.



3. Un prisma rectangular mide 3 pulgadas de ancho, 4 de largo y 5 de alto. Halla el área superficial y el volumen de la imagen del prisma cuando esté dilatado por un factor de escala de (a) 2, (b) 3 y (c) 4.

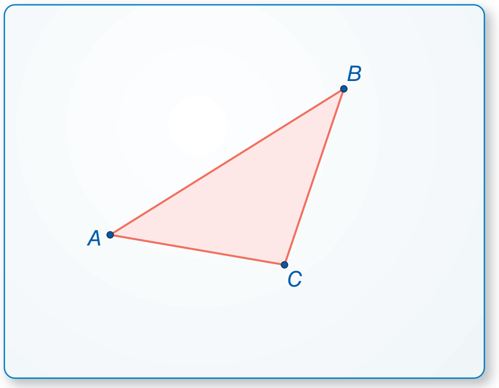
8.1 Polígonos similares

Pregunta esencial

¿Qué relación existe entre los polígonos similares?

EXPLORACIÓN 1 Comparar triángulos después de una dilatación

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica para trazar cualquier $\triangle ABC$. Dilata $\triangle ABC$ para formar un $\triangle A'B'C'$ similar utilizando un factor de escala k y cualquier centro de dilatación.



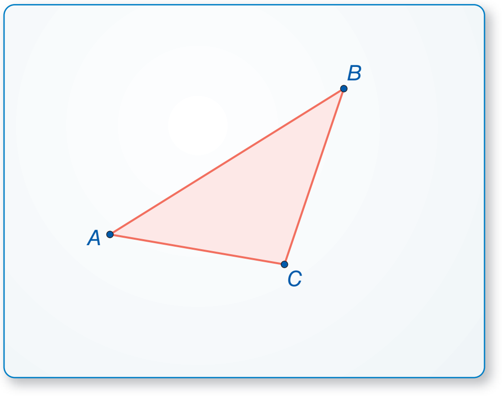
a. Compara los ángulos correspondientes de $\triangle A'B'C'$ y $\triangle ABC$.

b. Halla las razones de las longitudes de los lados de $\triangle A'B'C'$ respecto a las longitudes de los lados correspondientes de $\triangle ABC$. ¿Qué observas?

c. Repite las partes (a) y (b) para otros triángulos, factores de escala y centros de dilatación. ¿Obtienes resultados similares?

EXPLORACIÓN 2 Comparar triángulos después de una dilatación

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica para trazar un $\triangle ABC$ cualquiera. Dilata $\triangle ABC$ para formar un $\triangle A'B'C'$ similar utilizando un factor de escala k cualquiera y cualquier centro de dilatación.



BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas, necesitas observar atentamente para identificar un patrón o una estructura.

a. Compara los perímetros de $\triangle A'B'C'$ y $\triangle ABC$. ¿Qué observas?

b. Compara las áreas de $\triangle A'B'C'$ y $\triangle ABC$. ¿Qué observas?

c. Repite las partes (a) y (b) para otros triángulos, factores de escala y centros de dilatación. ¿Observas resultados similares?

Comunicar tu respuesta

3. ¿Qué relación existe entre polígonos similares?

4. Un $\triangle RST$ está dilatado por un factor de escala de 3 para formar $\triangle R'S'T'$. El área de $\triangle RST$ es de 1 pulgada cuadrada. ¿Cuál es el área de $\triangle R'S'T'$?

8.1 Lección

Qué aprenderás

- Utilizar enunciados de similitud.
- Hallar las longitudes correspondientes en polígonos similares.
- Hallar perímetros y áreas en polígonos similares.
- Determinar si los polígonos son similares.

Vocabulario Esencial

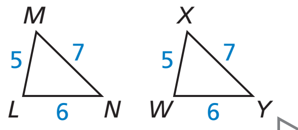
Anterior
figuras similares
transformación de similitud
partes correspondientes

Utilizar enunciados de similitud

Recuerda de la Sección 4.6 que dos figuras geométricas son figuras similares si y sólo si existe una transformación de similitud que mapee una figura respecto a otra.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

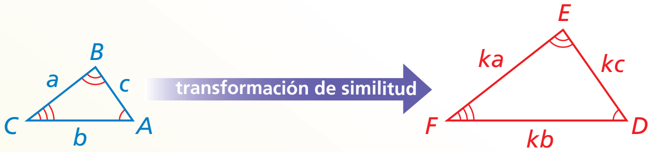
Observa que dos figuras congruentes también son similares. En $\triangle LMN$ y $\triangle WXY$ de abajo, el factor de escala es $\frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = 1$. Por tanto, puedes escribir $\triangle LMN \sim \triangle WXY$ y $\triangle LMN \cong \triangle WXY$.



Concepto Esencial

Partes correspondientes de polígonos similares

En el diagrama de abajo, $\triangle ABC$ es similar a $\triangle DEF$. Puedes escribir "$\triangle ABC$ es similar a $\triangle DEF$" como $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Una transformación de similitud preserva la medida de los ángulos. Por tanto, los ángulos correspondientes son congruentes. Una transformación de similitud también alarga o reduce las longitudes de los lados por un factor de escala de k. Entonces, las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.



Ángulos correspondientes

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

Razones de longitudes de lados correspondientes

$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k$

LEER

En un *enunciado de proporcionalidad*, cualquier par de razones forma una proporción verdadera.

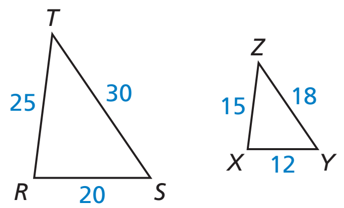
EJEMPLO 1 Usar enunciados similares

En el diagrama, $\triangle RST \sim \triangle XYZ$.

a. Halla el factor de escala de $\triangle RST$ a $\triangle XYZ$.

b. Haz una lista de todos los pares de ángulos congruentes.

c. Escribe las razones de las longitudes de los lados correspondientes en un *enunciado de proporcionalidad*.



SOLUCIÓN

a. $\frac{XY}{RS} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\qquad \frac{YZ}{ST} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ $\qquad \frac{ZX}{TR} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

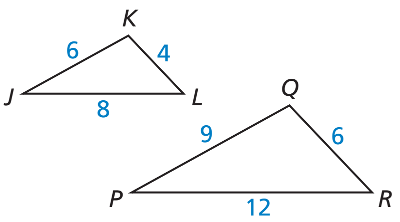
Entonces, el factor de escala es $\frac{3}{5}$.

b. $\angle R \cong \angle X$, $\angle S \cong \angle Y$ y $\angle T \cong \angle Z$.

c. Como las razones en la parte (a) son iguales, $\frac{XY}{RS} = \frac{YZ}{ST} = \frac{ZX}{TR}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*



1. En el diagrama, $\triangle JKL \sim \triangle PQR$. Halla el factor de escala de $\triangle JKL$ a $\triangle PQR$. Después, haz una lista de todos los pares de ángulos congruentes y escribe las razones de las longitudes de los lados correspondientes en un enunciado de proporcionalidad.

Hallar las longitudes correspondientes en polígonos similares

Concepto Esencial

Longitudes correspondientes en polígonos similares

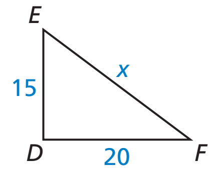
Si dos polígonos son similares, entonces, la razón de dos longitudes correspondientes cualquiera en los polígonos es igual al factor de escala de los polígonos similares.

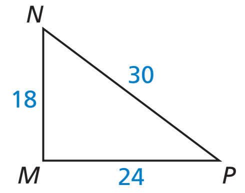
LEER

Las longitudes correspondientes en triángulos similares incluyen las longitudes de los lados, las altitudes, las medianas y los segmentos medios.

EJEMPLO 2 **Hallar una longitud correspondiente**

En el diagrama, $\triangle DEF \sim \triangle MNP$. Halla el valor de x.





SOLUCIÓN

Los triángulos son similares, por tanto, las longitudes de lados correspondientes son proporcionales.

$\dfrac{MN}{DE} = \dfrac{NP}{EF}$ Escribe una proporción.

$\dfrac{18}{15} = \dfrac{30}{x}$ Sustituye.

$18x = 450$ Propiedad de productos cruzados

$x = 25$ Resuelve para hallar x.

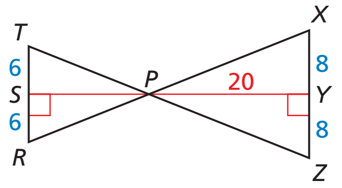
▶ El valor de x es 25.

HALLAR UN PUNTO DE ENTRADA

Existen varias formas de escribir la proporción. Por ejemplo, puedes escribir $\dfrac{DF}{MP} = \dfrac{EF}{NP}$.

EJEMPLO 3 **Hallar una longitud correspondiente**

En el diagrama, $\triangle TPR \sim \triangle XPZ$. Halla la longitud de la altitud de $\overline{PS}$.



SOLUCIÓN

Primero, halla el factor de escala de $\triangle XPZ$ a $\triangle TPR$.

$$\frac{TR}{XZ} = \frac{6 + 6}{8 + 8} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Debido a que la razón de las longitudes de las altitudes en triángulos similares es igual al factor de escala, puedes escribir la siguiente proporción.

$\dfrac{PS}{PY} = \dfrac{3}{4}$ Escribe una proporción.

$\dfrac{PS}{20} = \dfrac{3}{4}$ Sustituye 20 por PY.

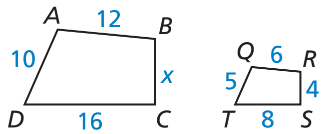
$PS = 15$ Multiplica cada lado por 20 y simplifica.

▶ La longitud de la altitud $\overline{PS}$ es 15.

Monitoreo del progreso

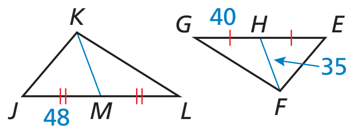
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

2. Halla el valor de x.



$ABCD \sim QRST$

3. Halla KM.



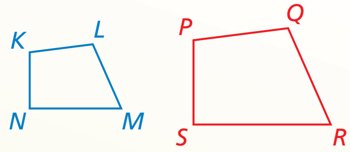
$\triangle JKL \sim \triangle EFG$

Hallar perímetros y áreas de polígonos similares

Teorema

Teorema 8.1 Perímetros de polígonos similares

Si dos polígonos son similares, la razón de sus perímetros es igual a las razones de las longitudes de los lados correspondientes.



Si $KLMN \sim PQRS$, entonces $\dfrac{PQ + QR + RS + SP}{KL + LM + MN + NK} = \dfrac{PQ}{KL} = \dfrac{QR}{LM} = \dfrac{RS}{MN} = \dfrac{SP}{NK}$.

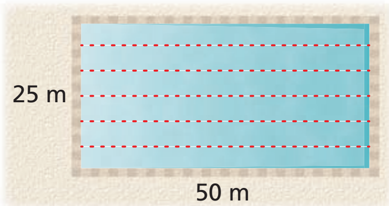
Prueba Ej. 52, pág. 426; *BigIdeasMath.com*

ANALIZAR RELACIONES

Cuando dos polígonos similares tienen un factor de escala de k, la razón de su perímetro es igual a k.

EJEMPLO 4 Representar con matemáticas

En la ciudad se planea construir una nueva alberca. Una alberca olímpica es rectangular con una longitud de 50 metros. La nueva alberca será similar a una alberca olímpica, pero tendrá una longitud de 40 metros. Halla los perímetros de una alberca olímpica y la nueva alberca.



SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Se te ha dado la longitud y ancho de un rectángulo y la longitud de un rectángulo similar. Necesitas hallar los perímetros de ambos rectángulos.

2. **Haz un plan** Halla el factor de escala de los rectángulos similares y el perímetro de una alberca olímpica. Después, utiliza el Teorema de los perímetros de polígonos similares para escribir y resolver una proporción con la cual halles el perímetro de una nueva alberca.

3. **Comprende el problema** Debido a que la nueva alberca será similar a una olímpica, el factor de escala es la razón de las longitudes, $\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$. El perímetro de una alberca olímpica es $2(50) + 2(25) = 150$ metros. Escribe y resuelve una proporción para hallar el perímetro x de una nueva alberca.

$$\frac{x}{150} = \frac{4}{5} \quad \text{Teorema de los perímetros de polígonos similares}$$

$$x = 120 \quad \text{Multiplica cada lado por 150 y simplifica.}$$

▶ Por tanto, el perímetro de una alberca olímpica es 150 metros y el perímetro de la nueva alberca es 120 metros.

4. **Verifícalo** Revisa que la razón de los perímetros sea igual al factor de escala.

$$\frac{120}{150} = \frac{4}{5} \checkmark$$

CONSEJO DE ESTUDIO

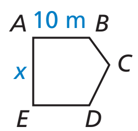
Puedes escribir el factor de escala en forma decimal. En el Ejemplo 4, puedes escribir el factor de escala como 0.8 y multiplicarlo por 150 para obtener $x = 0.8(150) = 120$.

Monitoreo del progreso

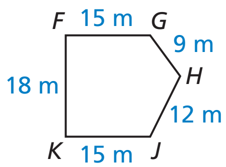
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. Los dos kioscos mostrados son similares. Halla el perímetro del kiosco A.

Mirador A



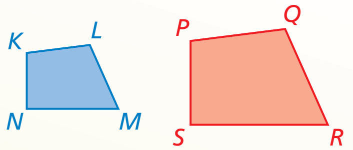
Mirador B



Teorema

Teorema 8.2 **Áreas de polígonos similares**

Si dos polígonos son similares, la razón de sus áreas es igual al caudrado de las razones de las longitudes de sus lados correspondientes.



Si $KLMN \sim PQRS$, entonces $\dfrac{\text{Área de } PQRS}{\text{Área de } KLMN} = \left(\dfrac{PQ}{KL}\right)^2 = \left(\dfrac{QR}{LM}\right)^2 = \left(\dfrac{RS}{MN}\right)^2 = \left(\dfrac{SP}{NK}\right)^2.$

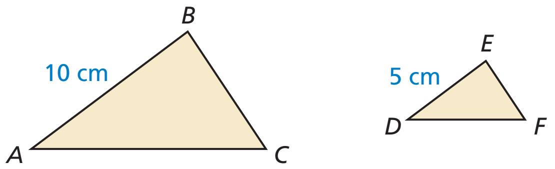
Prueba Ej. 53, pág. 426; *BigIdeasMath.com*

ANALIZAR RELACIONES

Cuando dos polígonos similares tienen un factor de escala de k, la razón de sus áreas es igual a k^2.

EJEMPLO 5 Hallar áreas de polígonos similares

En el diagrama, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Halla el área de $\triangle DEF$.



Área de $\triangle ABC = 36 \text{ cm}^2$

SOLUCIÓN

Debido a que los triángulos son similares, la razón del área de $\triangle ABC$ respecto al área de $\triangle DEF$ es igual al cuadrado de la razón de AB respecto a DE. Escribe y resuelve una proporción para hallar el área de $\triangle DEF$. Sea A el área de $\triangle DEF$.

$$\frac{\text{Área de } \triangle ABC}{\text{Área de } \triangle DEF} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \quad \text{Teorema de las áreas de polígonos similares}$$

$$\frac{36}{A} = \left(\frac{10}{5}\right)^2 \quad \text{Sustituye.}$$

$$\frac{36}{A} = \frac{100}{25} \quad \text{Eleva al cuadrado el lado derecho de la ecuación.}$$

$$36 \cdot 25 = 100 \cdot A \quad \text{Propiedad de productos cruzados}$$

$$900 = 100A \quad \text{Simplifica.}$$

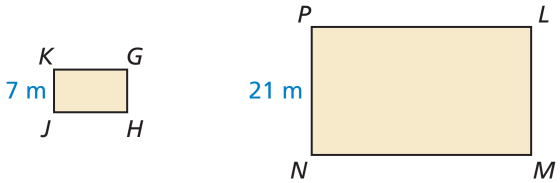
$$9 = A \quad \text{Resuelve para hallar } A.$$

El área de $\triangle DEF$ es de 9 centímetros cuadrados.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

5. En el diagrama, $GHJK \sim LMNP$. Halla el área de $LMNP$.

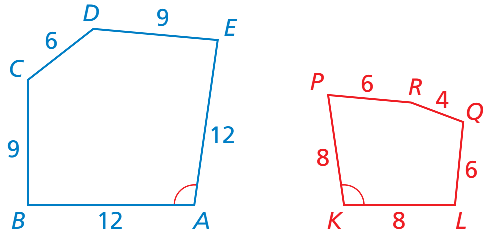


Área de $GHJK = 84 \text{ m}^2$

Determinar si los polígonos son similares

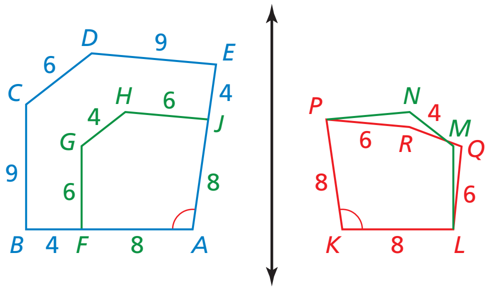
EJEMPLO 6 **Determinar si los polígonos son similares**

Decide si *ABCDE* y *KLQRP* son similares. Explica tu razonamiento.



SOLUCIÓN

Los lados correspondientes de los pentágonos son proporcionales a un factor de escala de $\frac{2}{3}$. Sin embargo, esto no necesariamente implica que los pentágonos sean similares. Una dilación con un centro *A* y factor de escala de $\frac{2}{3}$ se mueve de *ABCDE* a *AFGHJ*. Después una reflexión se mueve de *AFGHJ* a *KLMNP*.



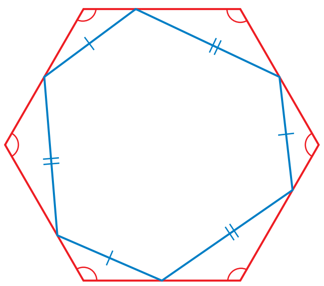
KLMNP no coincide exactamente con *KLQRP*, debido a que no todos los ángulos correspondientes son congruentes. (Sólo $\angle A$ y $\angle K$ son congruentes).

▶ Debido a que la medida del ángulo no se preserva, los dos pentágonos no son similares.

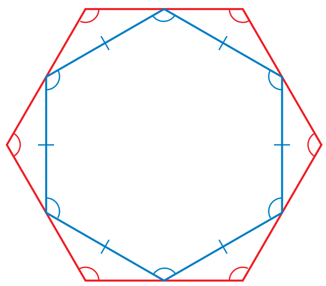
Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Observa el diseño de los mosaicos de abajo. En cada diseño, la forma roja es un hexágono regular.



Diseño de mosaico 1



Diseño de mosaico 2

6. Determina si los hexágonos en el diseño de mosaicos 1 son similares. Explica.

7. Determina si los hexágonos en el diseño de mosaicos 2 son similares. Explica.

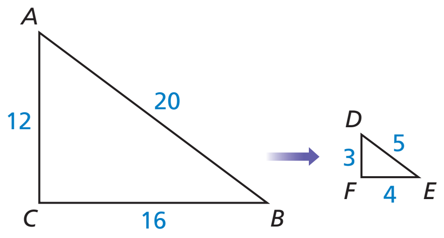
8.1 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Para que dos figuras sean similares, los ángulos correspondientes deben ser ____________, y las longitudes de lados correspondientes deben ser ________________.

2. **DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** ¿Cuál es diferente? Halla "ambas" respuestas.



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

¿Cuál es el factor de escala?

¿Cuál es la razón de sus áreas?

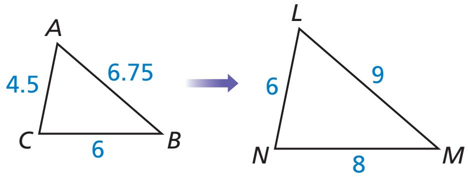
¿Cuál es la razón de las longitudes de sus lados correspondientes?

¿Cuál es la razón de sus perímetros?

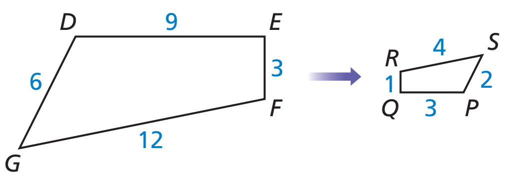
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3 y 4, halla el factor de escala. Después, haz una lista de todos los pares de ángulos congruentes y escribe las razones de las longitudes de lados correspondientes en un enunciado de proporcionalidad. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $\triangle ABC \sim \triangle LMN$

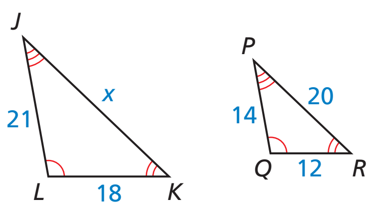


4. $DEFG \sim PQRS$

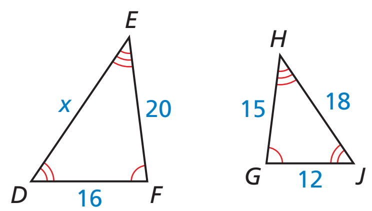


En los Ejercicios 5–8, los polígonos son similares. Halla el valor de x. *(Consulta el Ejemplo 2).*

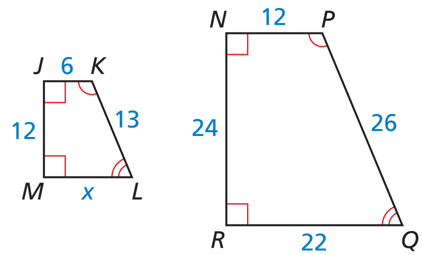
5.



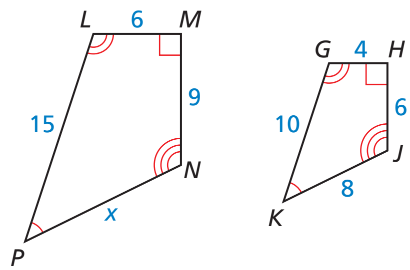
6.



7.

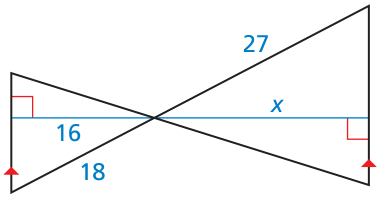


8.

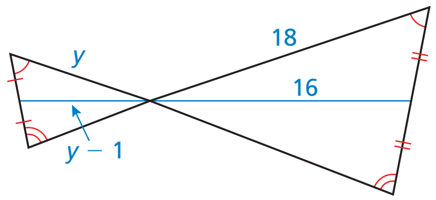


En los Ejercicios 9 y 10, los triángulos negros son similares. Identifica el tipo de segmento mostrado en azul y halla el valor de la variable. *(Consulta el Ejemplo 3).*

9.

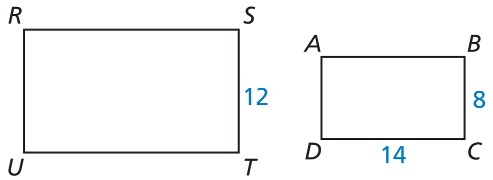


10.

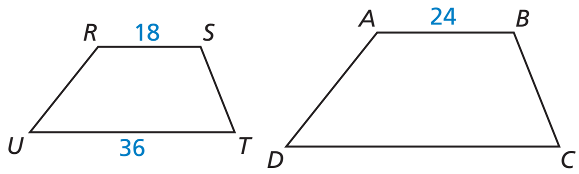


En el Ejercicio 11 y 12, *RSTU* ~ *ABCD*. Halla la razón de sus perímetros.

11.



12.



En los Ejercicios 13–16, dos polígonos son similares. Sabes el perímetro de un polígono y la razón de las longitudes de los lados correspondientes. Halla el perímetro del otro polígono.

13. perímetro del polígono más pequeño: 48 cm; razón: $\frac{2}{3}$

14. perímetro del polígono más pequeño: 66 pies; razón: $\frac{3}{4}$

15. perímetro del polígono más grande: 120 yardas; razón: $\frac{1}{6}$

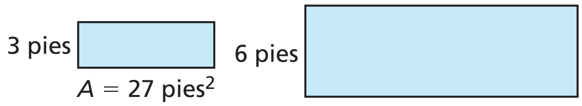
16. perímetro del polígono más grande: 85 metros; razón: $\frac{2}{5}$

17. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Se está remodelando un gimnasio escolar. La cancha de basquetbol será similar a una de la NCAA, la cual tiene una longitud de 94 pies y un ancho de 50 pies. La escuela planea que la nueva cancha tenga un ancho de 45 pies. Halla los perímetros de una cancha de la NCAA y de la nueva cancha en la escuela. *(Consulta el Ejemplo 4).*

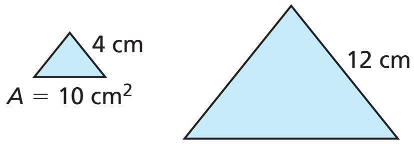
18. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Tu familia ha decidido hacer un patio rectangular en la parte trasera, similar a la forma que ya tiene, el cual tiene una longitud de 45 pies y un ancho de 20 pies. La longitud de tu nuevo patio es 18 pies. Halla los perímetros de tu patio trasero y del patio.

En los Ejercicios 19–22, los polígonos son similares. Sabes el área de uno de los polígonos. Halla el área del otro polígono. *(Consulta el Ejemplo 5).*

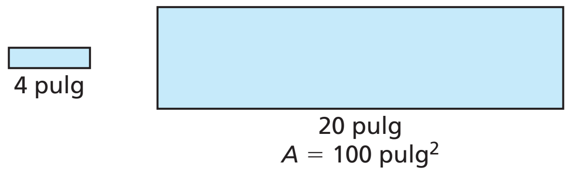
19.



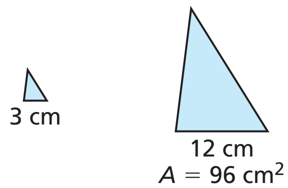
20.



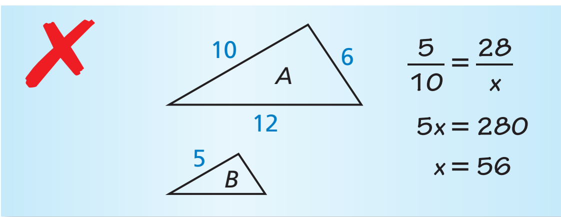
21.



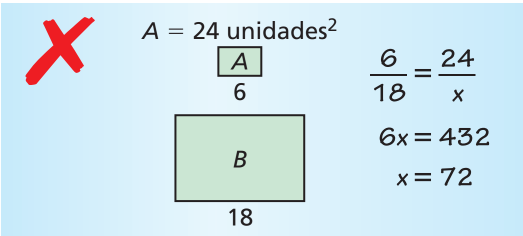
22.



23. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar el perímetro del triángulo B. Los triángulos son similares.

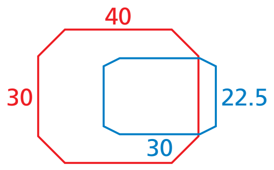


24. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar el área del rectángulo B. Los rectángulos son similares.

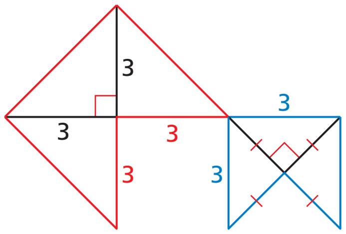


En los Ejercicios 25 y 26, determina si los polígonos rojo y azul son similares. *(Consulta el Ejemplo 6).*

25.



26.

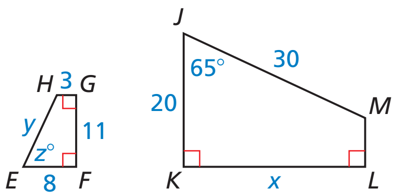


27. **RAZONAR** Los triángulos ABC y DEF son similares. ¿Qué enunciado es correcto? Selecciona todos los aplicables.

Ⓐ $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ Ⓑ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{FE}$

Ⓒ $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{DE}$ Ⓓ $\dfrac{CA}{FD} = \dfrac{BC}{EF}$

ANALIZAR RELACIONES En los Ejercicios 28–34, $JKLM \sim EFGH$.



28. Halla el factor de escala de $JKLM$ respecto a $EFGH$.

29. Halla el factor de escala de $EFGH$ respecto a $JKLM$.

30. Halla los valores de x, y y z.

31. Halla el perímetro de cada polígono.

32. Halla la razón de los perímetros de $JKLM$ con respecto a $EFGH$.

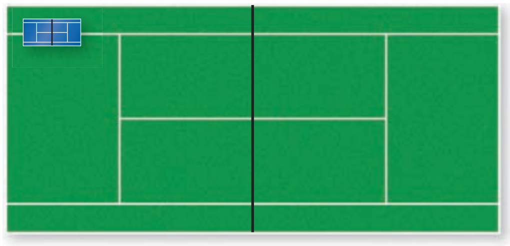
33. Halla el área de cada polígono.

34. Halla la razón de las áreas de $JKLM$ respecto a $EFGH$.

35. **USAR LA ESTRUCTURA** El rectángulo A es similar al rectángulo B. El rectángulo A tiene lados con una longitud de 6 y 12. La longitud de un lado del rectángulo B es 18. ¿Cuáles son los posibles valores de la longitud del otro lado del rectángulo B? Selecciona todos los aplicables.

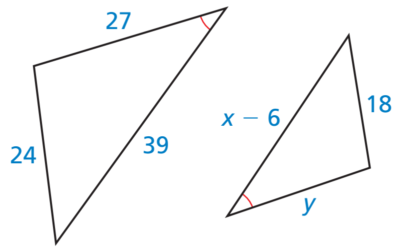
Ⓐ 6 Ⓑ 9 Ⓒ 24 Ⓓ 36

36. **SACAR CONCLUSIONES** En el tenis de mesa, la mesa mide 9 pies de largo y 5 pies de ancho. Una cancha de tenis es un rectángulo de 78 pies de largo y 36 pies de ancho. ¿Ambas superficies son similares? Si es así, halla el factor de escala de la cancha de tenis respecto a la mesa.

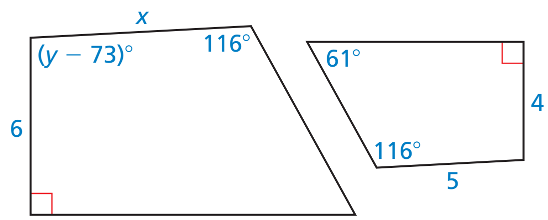


CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 37 y 38, los dos polígonos son similares. Halla los valores de x y y.

37.



38.



PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN En los Ejercicios 39–42, las figuras son similares. Halla la longitud del lado correspondiente faltante.

39. La figura A tiene un perímetro de 72 metros y una de las longitudes de los lados es de 18 metros. La figura B tiene un perímetro de 120 metros.

40. La figura A tiene un perímetro de 24 pulgadas. La figura B tiene un perímetro de 36 pulgadas y la longitud de uno de los lados es 12 pulgadas.

41. La figura A tiene un área de 48 pies cuadrados y la longitud de uno de sus lados es 6 pies. La figura B tiene un área de 75 pies cuadrados.

42. La figura A tiene un área de 18 pies cuadrados. La figura B tiene un área de 98 pies cuadrados y la longitud de uno de sus lados es 14 pies.

PENSAMIENTO CRÍTICO **En los Ejercicios 43–48, indica si los polígonos son similares *siempre*, *algunas veces* o *nunca*.**

43. dos triángulos isósceles

44. dos trapezoides isósceles

45. dos rombos

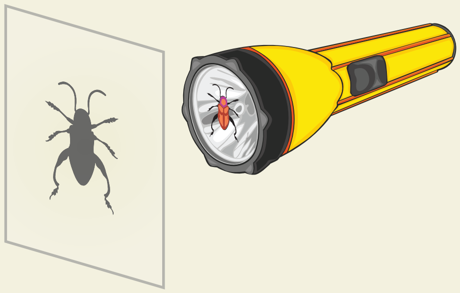
46. dos cuadrados

47. dos polígonos regulares

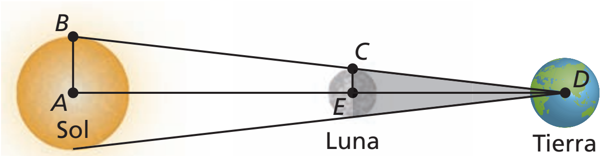
48. un triángulo rectángulo y un triángulo equilátero

49. ARGUMENTAR Tu hermana afirma que cuando las longitudes de los lados de dos rectángulos son proporcionales, los dos rectángulos deben ser similares. ¿Tiene razón? Explica tu razonamiento.

50. ¿CÓMO LO VES? Enciendes una linterna directamente sobre un objeto para proyectar su imagen sobre una pantalla paralela. ¿El objeto y la imagen serán similares? Explica tu razonamiento.



51. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Durante un eclipse total de sol, la luna está directamente en línea con el sol y bloquea sus rayos. La distancia DA entre la tierra y el sol es 93,000,000 millas, la distancia DE entre la tierra y la luna es 240,000 millas, y el radio AB del sol es 432,500 millas. Utiliza el diagrama y las medidas dadas para estimar el radio EC de la luna.



$\triangle DEC \sim \triangle DAB$

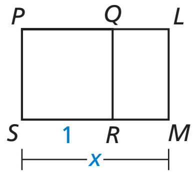
Dibujo no hecho a escala

52. DEMOSTRAR UN TEOREMA Demuestra el Teorema de los perímetros de polígonos similares (Teorema 8.1) para rectángulos similares. Incluye un diagrama en tu prueba.

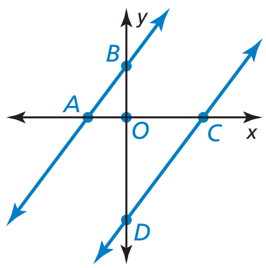
53. DEMOSTRAR UN TEOREMA Demuestra el Teorema de las áreas de polígonos similares (Teorema 8.2) para rectángulos similares. Incluye un diagrama en tu prueba.

54. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Los postulados y teoremas en este libro representan la geometría Euclidiana. En la geometría esférica, todos los puntos son puntos en la superficie de una esfera. Una línea es un círculo en la esfera cuyo diámetro es igual al diámetro de la esfera. Un plano es la superficie de la esfera. En geometría esférica, ¿es posible que dos triángulos sean similares pero no congruentes? Explica tu razonamiento.

55. PENSAMIENTO CRÍTICO En el diagrama, $PQRS$ es un cuadrado y $PLMS \sim LMRQ$. Halla el valor exacto de x. Este valor recibe el nombre de *proporción áurea*. La razón de los rectángulos áureos contiene su longitud y ancho. Demuestra que los rectángulos similares en el diagrama son rectángulos áureos.



56. CONEXIONES MATEMÁTICAS Las ecuaciones de las líneas mostradas son $y = \frac{4}{3}x + 4$ y $y = \frac{4}{3}x - 8$. Demuestra que $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

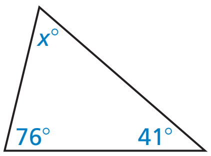


Mantener el dominio de las matemáticas

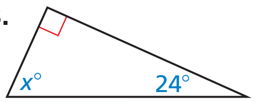
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla el valor de x. *(Sección 5.1)*

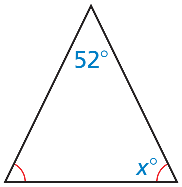
57.



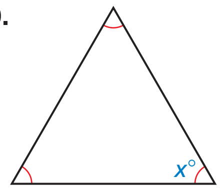
58.



59.



60.



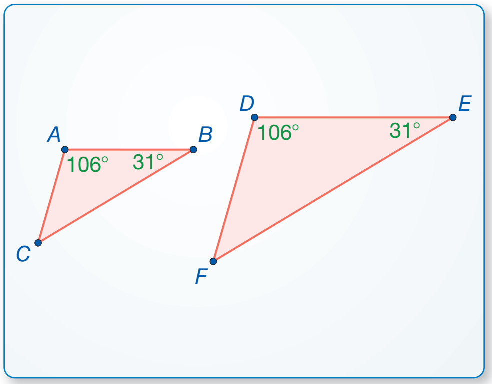
8.2 Demostrar similitud de triángulos con AA

Pregunta esencial ¿Qué puedes concluir acerca de dos triángulos cuando sabes que, dos pares de ángulos correspondientes son congruentes?

EXPLORACIÓN 1 Comparar triángulos

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica.

a. Construye $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ de manera que $m\angle A = m\angle D = 106°$, $m\angle B = m\angle E = 31°$ y $\triangle DEF$ no sea congruente con $\triangle ABC$.



b. Halla la medida del tercer ángulo y las longitudes de los lados de cada triángulo. Copia la siguiente tabla y anota tus resultados en la columna 1.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$m\angle A$, $m\angle D$	106°	88°	40°			
$m\angle B$, $m\angle E$	31°	42°	65°			
$m\angle C$						
$m\angle F$						
AB						
DE						
BC						
EF						
AC						
DF						

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, es necesario que comprendas y utilices las suposiciones expresadas, las definiciones y los resultados previamente establecidos al construir argumentos.

c. ¿Son similares los dos triángulos? Explica.

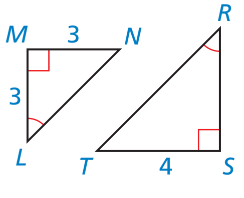
d. Repite las partes (a) a (c) para completar las columnas 2 y 3 de la tabla para las medidas dadas de los ángulos.

e. Completa cada columna restante de la tabla utilizando tu propia elección de dos pares de medidas de ángulos iguales y correspondientes. ¿Puedes construir dos triángulos de esta forma que *no* sean similares?

f. Haz una conjetura acerca de dos triángulos cualesquiera con dos pares de ángulos congruentes correspondientes.

Comunicar tu respuesta

2. ¿Qué puedes concluir acerca de dos triángulos cuando sabes que dos pares de ángulos correspondientes son congruentes?



3. Halla RS en la figura de la izquierda.

8.2 Lección

Qué aprenderás

- Utilizar el Teorema de la similitud ángulo-ángulo.
- Resolver problemas de la vida real.

Vocabulario Esencial

Anterior
figuras similares
transformación de similitud

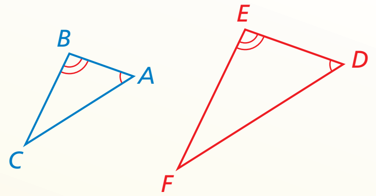
Utilizar el Teorema de la similitud ángulo-ángulo

Teorema

Teorema 8.3 Teorema de la similitud ángulo-ángulo (AA)

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces, los dos triángulos son similares.

Si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

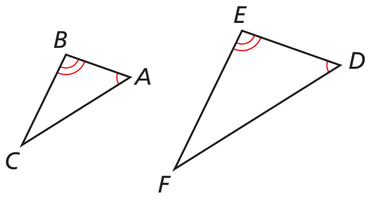


Prueba pág. 428

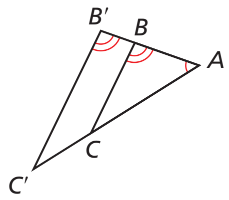
PRUEBA Teorema de la similitud ángulo-ángulo (AA)

Dado $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$

Demostrar $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



Dilata $\triangle ABC$ utilizando un factor de escala de $k = \frac{DE}{AB}$ y centro A. La imagen de $\triangle ABC$ es $\triangle AB'C'$



Debido a que la dilatación es una transformación de similitud, $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$. Porque la razón de longitudes correspondientes de polígonos similares es igual al factor de escala, $\frac{AB'}{AB} = \frac{DE}{AB}$. Al multiplicar cada lado por AB se produce $AB' = DE$. Según la definición de segmentos congruentes, $\overline{AB'} \cong \overline{DE}$.

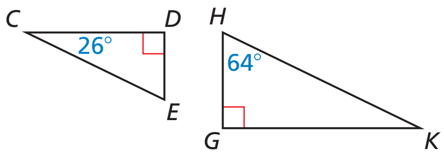
Según la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.2), $\angle A \cong \angle A$. Debido a que los ángulos correspondientes de polígonos similares son congruentes, $\angle B' \cong \angle B$. Porque $\angle B' \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle E$, $\angle B' \cong \angle E$ según la propiedad transitiva de la congruencia (Teorema 2.2).

Debido a que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B' \cong \angle E$, y $\overline{AB'} \cong \overline{DE}$, $\triangle AB'C' \cong \triangle DEF$ según el teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10). Por tanto, una composición de movimientos rígidos mapea $\triangle AB'C'$ respecto a $\triangle DEF$.

Debido a la dilatación seguida por una composición de movimientos rígidos mapea $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

EJEMPLO 1 Usar el Teorema de la similitud (AA)

Determina si los triángulos son similares. Si lo son, escribe un enunciado de similitud. Explica tu razonamiento.



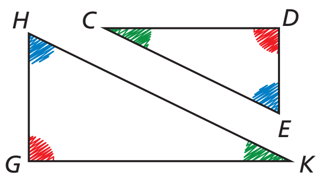
SOLUCIÓN

Como ambos son ángulos rectos, $\angle D$ y $\angle G$ son congruentes.

Según el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1), $26° + 90° + m\angle E = 180°$, por tanto, $m\angle E = 64°$. Así que, $\angle E$ y $\angle H$ son congruentes.

▶ Por tanto, $\triangle CDE \sim \triangle KGH$ según el Teorema de la similitud AA.

RAZONAMIENTO VISUAL

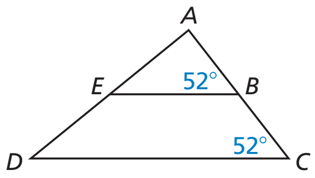


Utiliza lápices de colores para mostrar los ángulos congruentes. Esto te ayudará a escribir un enunciado de similitud.

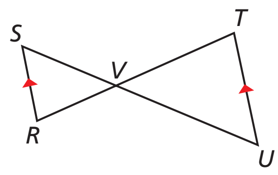
EJEMPLO 2 Usar el Teorema de la similitud (AA)

Demuestra que dos triángulos son similares.

a. $\triangle ABE \sim \triangle ACD$



b. $\triangle SVR \sim \triangle UVT$

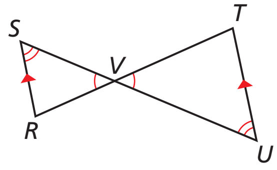


SOLUCIÓN

a. Debido a que $m\angle ABE$ y $m\angle C$ son iguales a 52°, $\angle ABE \cong \angle C$. Por la propiedad reflexiva de la congruencia (Teorema 2.2), $\angle A \cong \angle A$.

▶ Por tanto, $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ según el Teorema de similitud AA.

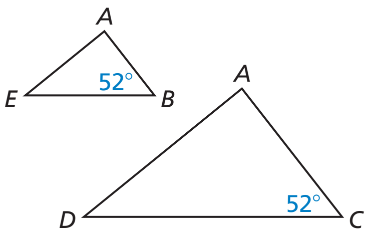
b. Sabes que $\angle SVR \cong \angle UVT$ según el Teorema de la congruencia de ángulos verticales (Teorema 2.6). El diagrama muestra que $\overline{RS} \parallel \overline{UT}$, por tanto $\angle S \cong \angle U$ según el Teorema de los ángulos alternos internos (Teorema 3.2).



▶ Por tanto, $\triangle SVR \sim \triangle UVT$ según el Teorema de la similitud AA.

RAZONAMIENTO VISUAL

Quizá te resulte útil redibujar los triángulos por separado.

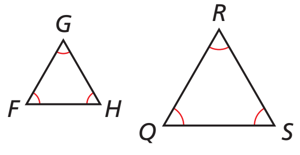


Monitoreo del progreso

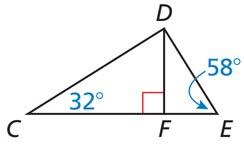
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Demuestra que los triángulos son similares. Escribe un enunciado de similitud.

1. $\triangle FGH$ y $\triangle RQS$



2. $\triangle CDF$ y $\triangle DEF$



3. ¿QUÉ PASA SI? Supón que $\overline{SR} \nparallel \overline{TU}$ en el Ejemplo 2 de la parte (b). ¿Los triángulos podrían seguir siendo similares? Explica.

Resolver problemas de la vida real

Anteriormente aprendiste una forma de utilizar triángulos congruentes para hallar medidas indirectamente. Otra forma útil de medirlas es utilizando triángulos similares.

EJEMPLO 3 Representar con matemáticas

Una bandera proyecta una sombra de 50 pies de largo. Al mismo tiempo, una mujer que mide 5 pies 4 pulgadas está parada cerca y proyecta una sombra de 40 pulgadas de largo. ¿Cuál es la altura del astabandera redondeada al pie más cercano?

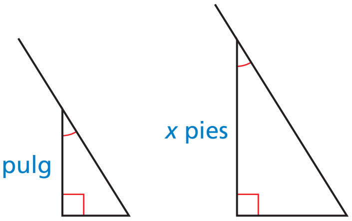
Dibujo no hecho a escala

SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Sabes la longitud de la sombra del astabandera, la altura de la mujer y la longitud de la sombra de la mujer. Necesitas hallar la altura del astabandera.

2. **Haz un plan** Utiliza triángulos similares para escribir una proporción y resuelve para hallar la altura del astabandera.

3. **Resuelve el problema** El astabandera y la mujer forman los lados de dos triángulos con el suelo. Los rayos del sol llegan al astabandera y a la mujer en el mismo ángulo. Tienes dos pares de ángulos congruentes, por tanto, los triángulos son similares según el Teorema de la similitud AA.



Puedes utilizar una proporción para hallar la altura x. Escribe 5 pies 4 pulgadas como 64 pulgadas, de manera que puedas formar dos razones de pies a pulgadas.

$$\frac{x \text{ pies}}{64 \text{ pulg}} = \frac{50 \text{ pies}}{64 \text{ pulg}}$$ Escribe la proporción de las longitudes de lado.

$$40x = 3200$$ Propiedad de productos cruzados

$$x = 80$$ Resuelve para hallar x.

▶ El astabandera mide 80 pies de alto.

4. **Verifícalo** Cuida la precisión verificando que tu respuesta tenga las unidades correctas. El problema te pide la altura del astabandera redondeada al *pie* más cercano. Como tu respuesta es 80 pies, las unidades coinciden.

   También, verifica que tu respuesta sea razonable en el contexto del problema. Una altura de 80 pies tiene sentido para un astabandera. Puedes estimar que un edificio de ocho pisos mediría aproximadamente 8(10 pies) = 80 pies, entonces, es razonable que un astabandera mida eso.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. **¿QUÉ PASA SI?** Un niño con una altura de 58 pulgadas está parado junto a la mujer del Ejemplo 3. ¿Cuánto mide la sombra del niño?

5. Estás parado afuera, y mides las longitudes de las sombras proyectadas por ti y un árbol. Escribe una proporción que muestre cómo podrías hallar la altura del árbol.

8.2 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

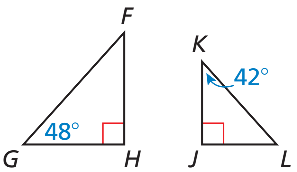
1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos de otro triángulo, entonces, los triángulos son ________.

2. **ESCRIBIR** ¿Puedes asumir que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes de dos triángulos similares cualquiera son congruentes? Explica.

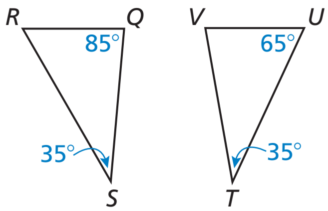
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, determina si los triángulos son similares. Si lo son, escribe un enunciado de similitud. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 1).*

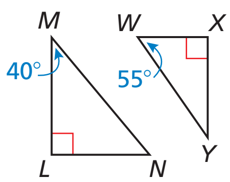
3.



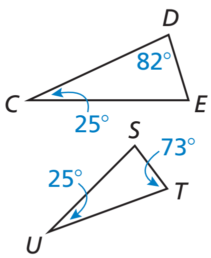
4.



5.

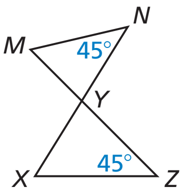


6.

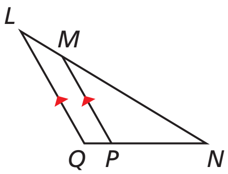


En los Ejercicios 7–10, demuestra que los dos triángulos son similares. *(Consulta el Ejemplo 2).*

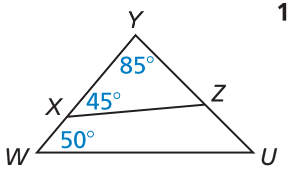
7.



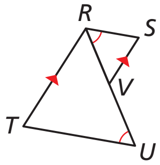
8.



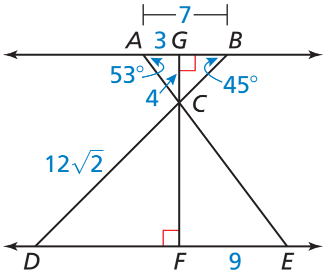
9.



10.



En los Ejercicios 11–18, utiliza el diagrama para copiar y completar el enunciado.



11. $\triangle CAG \sim$ ____

12. $\triangle DCF \sim$ ____

13. $\triangle ACB \sim$ ____

14. $m\angle ECF =$ ____

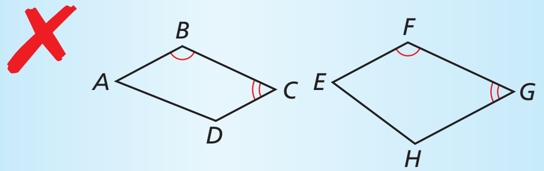
15. $m\angle ECD =$ ____

16. $CF =$ ____

17. $BC =$ ____

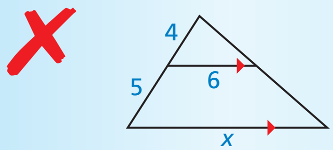
18. $DE =$ ____

19. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al usar el Teorema de similitud AA (Teorema 8.3).



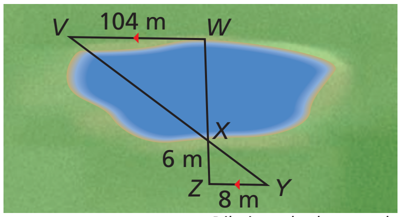
El cuadrilátero *ABCD* ~ cuadrilátero *EFGH* según el Teorema de similitud AA.

20. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al hallar el valor de *x*.



$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$$
$$4x = 30$$
$$x = 7.5$$

21. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Puedes medir el ancho del lago usando una técnica de topografía, como la que muestra el diagrama. Halla el ancho del lago, WX. Justifica tu respuesta.



Dibujo no hecho a escala

22. **ARGUMENTAR** Tú y tu prima están tratando de determinar la altura de un poste de teléfono. Tu prima te dice que te pares en la sombra del poste de manera que la punta de tu sombra coincida con la punta de la sombra del poste. Tu prima afirma poder usar la distancia entre las puntas de las sombras y tú, la distancia entre tú y el poste, y tu altura para estimar la altura del poste telefónico. ¿Es posible esto? Explica. Incluye un diagrama en tu respuesta.

RAZONAR En los Ejercicios 23–26, ¿es posible que $\triangle JKL$ y $\triangle XYZ$ sean similares? Explica tu razonamiento.

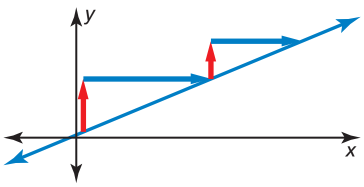
23. $m\angle J = 71°$, $m\angle K = 52°$, $m\angle X = 71°$ y $m\angle Z = 57°$

24. $\triangle JKL$ es un triángulo rectángulo y $m\angle X + m\angle Y = 150°$.

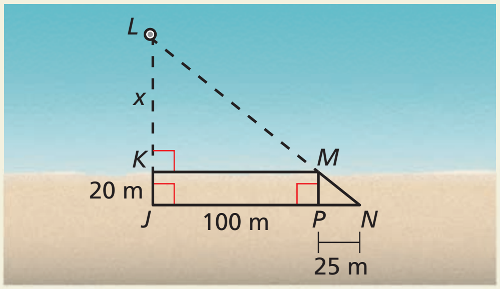
25. $m\angle L = 87°$ y $m\angle Y = 94°$

26. $m\angle J + m\angle K = 85°$ y $m\angle Y + m\angle Z = 80°$

27. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Explica cómo puedes utilizar triángulos similares para demostrar que dos puntos cualquiera en una línea pueden utilizarse para hallar su pendiente.



28. **¿CÓMO LO VES?** En el diagrama, ¿qué triángulos usarías para hallar la distancia x entre la orilla y la boya? Explica tu razonamiento.



29. **ESCRIBIR** Explica porqué todos los triángulos equiláteros son similares.

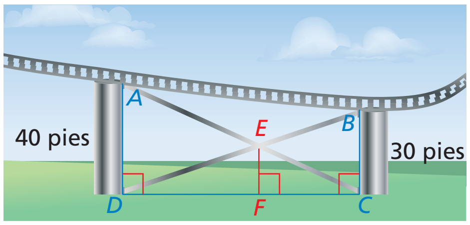
30. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Determina si cada uno es un método válido para demostrar que dos cuadriláteros son similares. Justifica tu respuesta.

a. AAA **b.** AAAA

31. **PRUEBA** Sin utilizar las longitudes correspondientes en polígonos similares, demuestra que la razón de dos bisectrices de ángulos correspondientes en triángulos similares es igual al factor de escala.

32. **PRUEBA** Demuestra que si las longitudes de dos lados de un triángulo son a y b, respectivamente, entonces, las longitudes de las altitudes correspondientes a esos lados están en la razón $\frac{b}{a}$.

33. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Se muestra la porción de un juego de un parque de diversiones. Halla EF. Justifica tu respuesta.

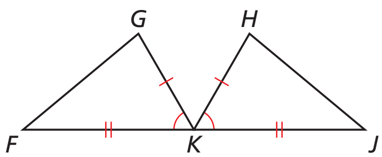


Mantener el dominio de las matemáticas

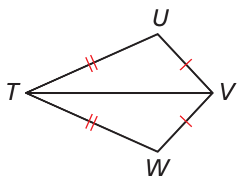
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Determina si hay suficiente información para demostrar que los triángulos son congruentes. Explica tu razonamiento. *(Sección 5.3, Sección 5.5 y Sección 5.6)*

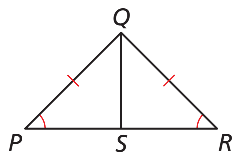
34.



35.



36.



8.1–8.2 ¿Qué aprendiste?

Conceptos Esenciales

Sección 8.1

Partes correspondientes de polígonos similares, *pág. 418*
Longitudes correspondientes en polígonos similares, *pág. 419*
Teorema 8.1 Teorema de los perímetros de polígonos similares, *pág. 420*
Teorema 8.2 Teorema de las áreas de polígonos similares, *pág. 421*

Sección 8.2

Teorema 8.3 Teorema de la similitud ángulo-ángulo (AA), *pág. 428*

Prácticas matemáticas

1. En el Ejercicio 35 de la página 425, ¿por qué hay más de una respuesta correcta para la longitud del otro lado?

2. En el Ejercicio 50 de la página 426, ¿cómo podrías hallar el factor de escala de las figuras similares? Describe cualquier herramienta que pudiera ser útil.

3. En el Ejercicio 21 de la página 432, explica por qué el topógrafo necesita que V, X, y Y, y que Z, X, y W sean colineales.

Destrezas de estudio

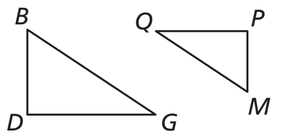
Asumir el control de tu tiempo en clase

- Siéntate donde puedas ver y escuchar fácilmente al maestro, y el maestro pueda verte. El maestro puede determinar si estás confundido tan sólo con mirar tu cara y, por tanto, adaptar la lección. Además, sentarse en este lugar estratégico impedirá que tu mente divague.
- Pon atención a lo que el maestro dice sobre las matemáticas, no sólo sobre lo que está escrito en el pizarrón. Escribe los problemas en la parte izquierda de tus notas y lo que el maestro dice sobre ellos, en la parte derecha.
- Si el maestro avanza demasiado rápido, haz preguntas. Las preguntas ayudarán a detener el ritmo algunos minutos y también a aclararte tus dudas.
- Trata de memorizar nueva información mientras la aprendes. Repite en tu cabeza lo que estás escribiendo en tus notas. De esa forma estarás repasando dos veces la información.

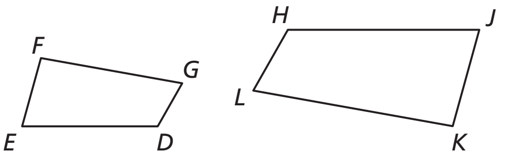
8.1–8.2 Prueba

Haz una lista de todos los pares de ángulos congruentes. Después, escribe las razones de las longitudes de los lados correspondientes en un enunciado de proporcionalidad. *(Sección 8.1)*

1. $\triangle BDG \sim \triangle MPQ$

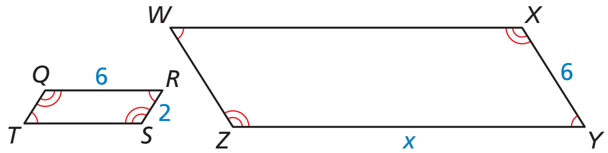


2. $DEFG \sim HJKL$

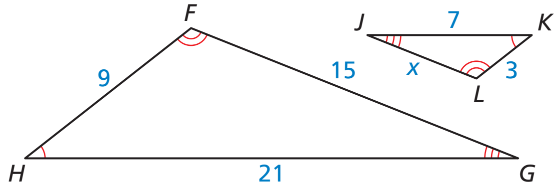


Los polígonos son similares. Halla el valor de *x*. *(Sección 8.1)*

3.

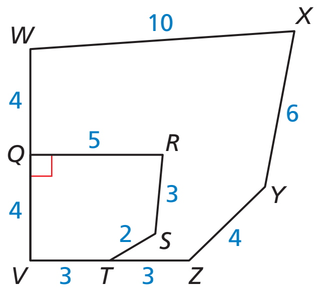


4.

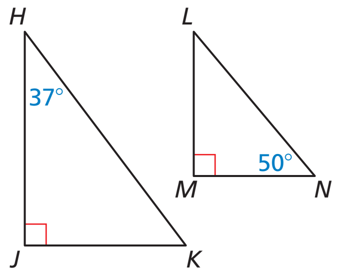


Determina si los polígonos son similares. Si lo son, escribe un enunciado de similitud. Explica tu razonamiento. *(Sección 8.1 y Sección 8.2)*

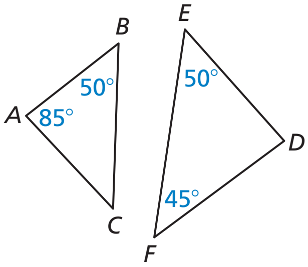
5.



6.

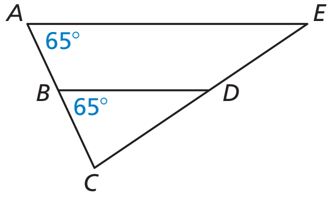


7.

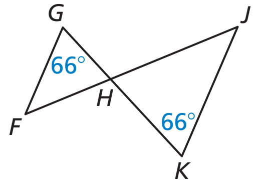


Demuestra que los dos triángulos son similares. *(Sección 8.2)*

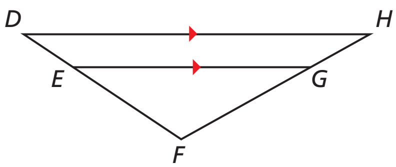
8.



9.



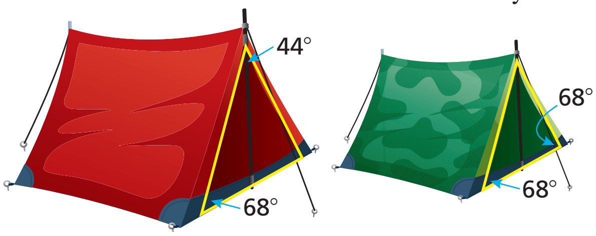
10.



11. Las dimensiones de una pista oficial de hockey que utiliza la Liga Nacional de Hockey (NHL) son 200 pies por 85 pies. Las dimensiones de una mesa de hockey aéreo son 96 pulgadas por 40.8 pulgadas. Supón que los ángulos correspondientes son congruentes. *(Sección 8.1)*

a. Determina si las dos superficies son similares.

b. Si las superficies son similares, halla la razón de sus perímetros y la razón de sus áreas. Si no, halla las dimensiones de una mesa de hockey aéreo que sean similares a una pista de hockey de la NHL.



12. Tú y tu amigo compran tiendas de campaña hechas por la misma compañía pero en diferentes tamaños y colores. Utiliza la información dada en el diagrama para decidir si las caras triangulares de las tiendas son similares. Explica tu razonamiento. *(Sección 8.2)*

8.3 Demostrar similitud de triángulos con LLL y LAL

Pregunta esencial ¿Cuáles son las dos formas de utilizar lados correspondientes de dos triángulos para determinar que son similares?

EXPLORACIÓN 1 Decidir si los triángulos son similares

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica.

a. Construye $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con las longitudes de los lados dados en la columna 1 de la siguiente tabla.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
AB	5	5	6	15	9	24	
BC	8	8	8	20	12	18	
AC	10	10	10	10	8	16	
DE	10	15	9	12	12	8	
EF	16	24	12	16	15	6	
DF	20	30	15	8	10	8	
$m\angle A$							
$m\angle B$							
$m\angle C$							
$m\angle D$							
$m\angle E$							
$m\angle F$							

b. Copia la tabla y completa la columna 1.

c. ¿Los triángulos son similares? Explica tu razonamiento.

d. Repite las partes (a)–(c) para las columnas 2–6 en la tabla.

e. ¿Qué relación existe entre las longitudes de los lados correspondientes en cada par de triángulos similares? ¿Es verdad que cada par de triángulos no son similares?

f. Haz una conjetura acerca de la similitud de dos triángulos con base en las longitudes de sus lados correspondientes.

g. Utiliza tu conjetura para escribir otro conjunto de longitudes de lados de dos triángulos similares. Utiliza las longitudes para completar la columna 7 de la tabla.

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas analizar situaciones dividiéndolas en casos, reconocer y utilizar contraejemplos.

EXPLORACIÓN 2 Decidir si los triángulos son similares

Trabaja con un compañero. Utiliza el software de geometría dinámica. Construye cualquier $\triangle ABC$.

a. Halla AB, AC y $m\angle A$. Elige cualquier número racional positivo k y construye $\triangle DEF$ de manera que $DE = k \cdot AB$, $DF = k \cdot AC$, y $m\angle D = m\angle A$.

b. ¿Es $\triangle DEF$ similar a $\triangle ABC$? Explica tu razonamiento.

c. Repite las partes (a) y (b) varias veces cambiando $\triangle ABC$ y k. Describe tus resultados.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cuáles son las dos formas de utilizar lados correspondientes de dos triángulos para determinar que son similares?

8.3 Lección

Vocabulario Esencial

Anterior
figuras similares
partes correspondientes
pendiente
líneas paralelas
líneas perpendiculares

Qué aprenderás

- Utilizar el Teorema de similitud lado-lado-lado.
- Utilizar el Teorema de similitud lado-ángulo-lado.
- Demostrar los criterios de la pendiente utilizando triángulos similares.

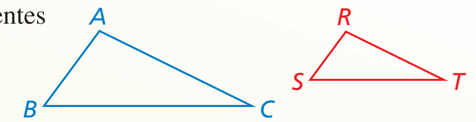
Utilizar el Teorema de similitud lado-lado-lado

Además de utilizar ángulos correspondientes congruentes para demostrar que dos triángulos son similares, puedes utilizar las longitudes de los lados correspondientes proporcionales.

Teorema

Teorema 8.4 Teorema de similitud lado-lado-lado (LLL)

Si las longitudes de lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces, los triángulos son similares.

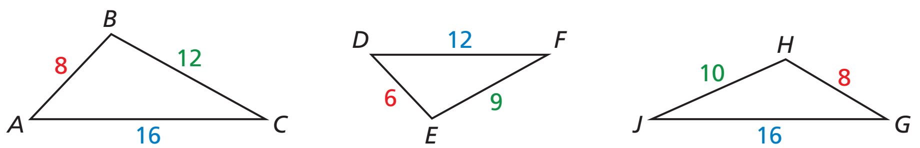


Si $\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{CA}{TR}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle RST$.

Prueba pág. 437

EJEMPLO 1 **Utilizar el Teorema de similitud LLL**

¿$\triangle DEF$ o $\triangle GHJ$ son similares a $\triangle ABC$?



HALLAR UN PUNTO DE ENTRADA

Al usar el Teorema de similitud LLL, compara los lados más cortos, los lados más largos y después, los lados restantes.

SOLUCIÓN

Compara $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ hallando las razones de las longitudes de sus lados correspondientes.

Lados más cortos	Lados más largos	Lados restantes
$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{6}$	$\frac{CA}{FD} = \frac{16}{12}$	$\frac{BC}{EF} = \frac{12}{9}$
$= \frac{4}{3}$	$= \frac{4}{3}$	$= \frac{4}{3}$

- Todas las razones son iguales $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Compara $\triangle ABC$ y $\triangle GHJ$ hallando las razones de las longitudes de los lados correspondientes.

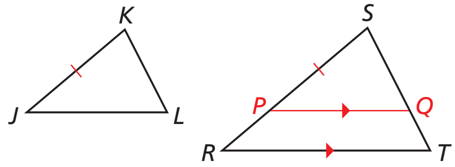
Lados más cortos	Lados más largos	Lados restantes
$\frac{AB}{GH} = \frac{8}{8}$	$\frac{CA}{JG} = \frac{16}{16}$	$\frac{BC}{HJ} = \frac{12}{10}$
$= 1$	$= 1$	$= \frac{6}{5}$

- Las razones no son todas iguales, por tanto, $\triangle ABC$ y $\triangle GHJ$ no son similares.

PRUEBA Teorema de similitud LLL

Dado $\dfrac{RS}{JK} = \dfrac{ST}{KL} = \dfrac{TR}{LJ}$

Demostrar $\triangle RST \sim \triangle JKL$



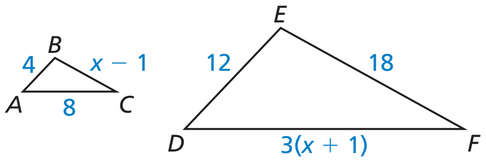
JUSTIFICAR LOS PASOS

El Postulado de los paralelos (Postulado 3.1) te permite trazar una línea auxiliar $\overleftrightarrow{PQ}$ en $\triangle RST$. Sólo hay una línea que pasa por el punto P paralelo a $\overleftrightarrow{RT}$, de manera que puedas trazarla.

Localiza P en $\overline{RS}$ de manera que $PS = JK$. Traza $\overline{PQ}$ de manera que $\overline{PQ} \parallel \overline{RT}$. Entonces, $\triangle RST \sim \triangle PSQ$ según el Teorema de similitud AA (Teorema 8.3), y $\dfrac{RS}{PS} = \dfrac{ST}{SQ} = \dfrac{TR}{QP}$. Puedes utilizar la proporción dada y el hecho de que $PS = JK$ para deducir que $SQ = KL$ y $QP = LJ$. Según el Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8), se desprende que $\triangle PSQ \cong \triangle JKL$. Por último, utiliza la definición de triángulos congruentes y el Teorema de similitud AA (Teorema 8.3) para concluir que $\triangle RST \sim \triangle JKL$.

EJEMPLO 2 Utilizar el Teorema de similitud LLL

Halla el valor de x que hace $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



HALLAR UN PUNTO DE ENTRADA

Puedes utilizar $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ o $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ en el paso 1.

SOLUCIÓN

Paso 1 Halla el valor de x que haga que las longitudes de los lados correspondientes sean proporcionales.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \qquad \text{Escriba una proporción.}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{x-1}{18} \qquad \text{Sustituye.}$$

$$4 \cdot 18 = 12(x-1) \qquad \text{Propiedad de productos cruzados.}$$

$$72 = 12x - 12 \qquad \text{Simplifica.}$$

$$7 = x \qquad \text{Resuelve para hallar } x.$$

Paso 2 Revisa que las longitudes de los lados sean proporcionales cuando $x = 7$.

$BC = x - 1 = 6$ $\qquad$ $DF = 3(x + 1) = 24$

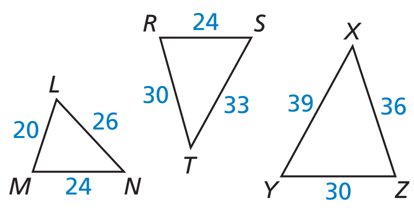
$\dfrac{AB}{DE} \stackrel{?}{=} \dfrac{BC}{EF} \rightarrow \dfrac{4}{12} = \dfrac{6}{18}$ ✓ $\qquad$ $\dfrac{AB}{DE} \stackrel{?}{=} \dfrac{AC}{DF} \rightarrow \dfrac{4}{12} = \dfrac{8}{24}$ ✓

▶ Cuando $x = 7$, los triángulos son similares según el Teorema de similitud LLL.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Utiliza el diagrama.



1. ¿Cuál de los tres triángulos son similares? Escribe un enunciado de similitud.

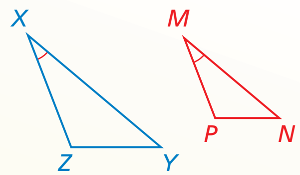
2. El lado más corto de un triángulo que es similar a $\triangle RST$ mide 12 unidades de largo. Halla las otras longitudes de lado del triángulo.

Utilizar el Teorema de similitud lado-ángulo-lado

Teorema

Teorema 8.5 Teorema de similitud lado-ángulo-lado (LAL)

Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de un segundo triángulo y las longitudes de los lados incluidos, esos ángulos son proporcionales, entonces, los triángulos son similares.

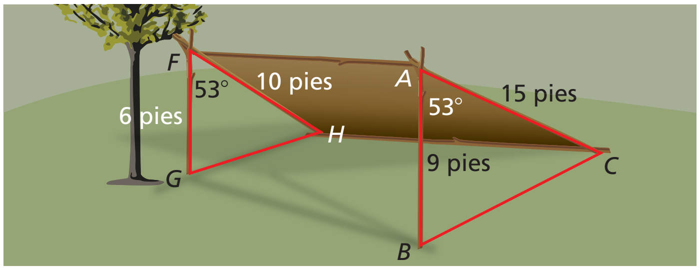


Si $\angle X \cong \angle M$ y $\dfrac{ZX}{PM} = \dfrac{XY}{MN}$, entonces $\triangle XYZ \sim \triangle MNP$.

Prueba Ej. 33, pág. 443

EJEMPLO 3 Utilizar el Teorema de similitud LAL

Estás construyendo un refugio inclinado, a partir de una rama de un árbol, como se muestra. ¿Puedes construir el extremo derecho de tal manera que sea similar al extremo izquierdo utilizando la medida del ángulo y las longitudes mostradas?



SOLUCIÓN

Tanto $m\angle A$ y $m\angle F$ son iguales 53°, por tanto $\angle A \cong \angle F$. Después, compara las razones de las longitudes de los lados que incluyan $\angle A$ y $\angle F$.

Lados más cortos	Lados más largos
$\dfrac{AB}{FG} = \dfrac{9}{6}$	$\dfrac{AC}{FH} = \dfrac{15}{10}$
$= \dfrac{3}{2}$	$= \dfrac{3}{2}$

Las longitudes de los lados que incluyen $\angle A$ y $\angle F$ son proporcionales. Por tanto, según el Teorema de similitud, $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

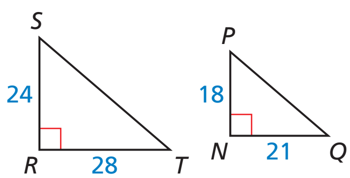
▶ Sí, puedes hacer que el lado derecho del refugio sea similar al izquierdo.

Monitoreo del progreso

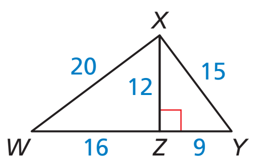
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Explica cómo demostrar que los triángulos indicados son similares.

3. $\triangle SRT \sim \triangle PNQ$



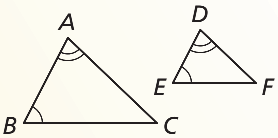
4. $\triangle XZW \sim \triangle YZX$



Resumen de conceptos

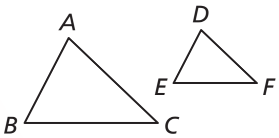
Teoremas de la similitud de triángulos

Teorema de similitud AA



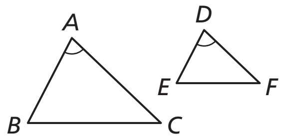
Si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Teorema de similitud LLL



Si $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Teorema de similitud LAL



Si $\angle A \cong \angle D$ y $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demostrar los criterios de la pendiente utilizando triángulos similares

Puedes utilizar triángulos similares para demostrar que el Teorema de las pendientes de líneas paralelas (Teorema 3.13). Debido a que el teorema es bicondicional, debes demostrar ambas partes.

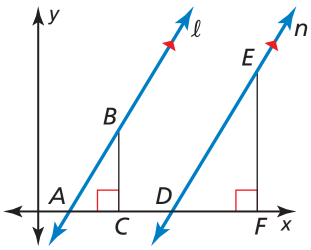
1. Si dos líneas no verticales son paralelas, entonces, tienen la misma pendiente.
2. Si dos líneas no verticales tienen la misma pendiente, entonces, son paralelas.

La primera parte se demuestra abajo. La segunda parte se demuestra en los ejercicios.

PRUEBA Parte de Teorema de las pendientes de líneas paralelas (Teorema 3.13)

Dado $\ell \parallel n$, ℓ y n son no verticales.

Demostrar $m_\ell = m_n$



Primero, considera el caso en que ℓ y n son horizontales. Debido a que todas las líneas horizontales son paralelas y tienen una pendiente de 0, el enunciado es verdadero para las líneas horizontales.

Para el caso de líneas no horizontales, no verticales, traza dos de esas líneas paralelas, ℓ y n, y rotula sus intersecciones con el eje x A y D, respectivamente. Traza un segmento vertical $\overline{BC}$ paralelo al eje y desde el punto B en la línea ℓ al punto C en el eje x. Traza un segmento vertical $\overline{EF}$ paralelo al eje y desde el punto E en la línea n al punto F en el eje x. Debido a que las líneas verticales y horizontales son perpendiculares, $\angle BCA$ y $\angle EFD$ son ángulos rectos.

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\ell \parallel n$	**1.** Dado
2. $\angle BAC \cong \angle EDF$	**2.** Teorema de ángulos correspondientes (Teorema 3.1)
3. $\angle BCA \cong \angle EFD$	**3.** Teorema de la congruencia de ángulos rectos (Teorema 2.3)
4. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	**4.** Teorema de similitud AA (Teorema 8.3)
5. $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$	**5.** Los lados correspondientes de figuras similares son proporcionales.
6. $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$	**6.** Reescribe una proporción.
7. $m_\ell = \dfrac{BC}{AC}$, $m_n = \dfrac{EF}{DF}$	**7.** Definición de pendiente
8. $m_n = \dfrac{BC}{AC}$	**8.** Propiedad de sustitución de la igualdad
9. $m_\ell = m_n$	**9.** Propiedad transitiva de la igualdad

Para demostrar el Teorema de pendientes de líneas perpendiculares (Teorema 3.14), debes demostrar ambas partes.

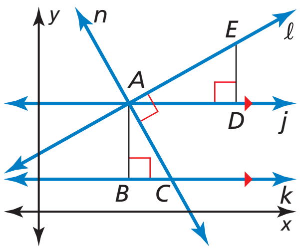
1. Si dos líneas no verticales son perpendiculares, entonces, el producto de sus pendientes es -1.
2. Si el producto de las pendientes de dos líneas no verticales es -1, entonces, las líneas son perpendiculares.

La primera parte se demuestra abajo. La segunda parte se demuestra en los ejercicios.

PRUEBA Parte de Teorema de las pendientes de líneas perpendiculares (Teorema 3.14)

Dado $\ell \perp n$, ℓ y n son no verticales.

Demostrar $m_\ell m_n = -1$



Traza dos líneas perpendiculares no verticales, ℓ y n, que intersequen un punto A. Traza una línea horizontal j paralela al eje x a través del punto A. Traza una línea horizontal k paralela al eje x que atraviese el punto C en la línea n. Como las líneas horizontales son paralelas, $j \parallel k$. Traza un segmento vertical $\overline{AB}$ paralelo al eje y desde el punto A hasta el punto B en la línea k. Traza un segmento vertical $\overline{ED}$ paralelo al eje y desde el punto E en la línea ℓ al punto D en la línea j. Debido a que las líneas horizontales y verticales son perpendiculares, $\angle ABC$ y $\angle ADE$ son ángulos rectos.

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\ell \perp n$	**1.** Dado
2. $m\angle CAE = 90°$	**2.** $\ell \perp n$
3. $m\angle CAE = m\angle DAE + m\angle CAD$	**3.** Postulado de la suma de ángulos (Postulado 1.4)
4. $m\angle DAE + m\angle CAD = 90°$	**4.** Propiedad transitiva de la igualdad
5. $\angle BCA \cong \angle CAD$	**5.** Teorema de los ángulos alternos internos (Teorema 3.2)
6. $m\angle BCA = m\angle CAD$	**6.** Definición de ángulos congruentes
7. $m\angle DAE + m\angle BCA = 90°$	**7.** Propiedad de sustitución de la igualdad
8. $m\angle DAE = 90° - m\angle BCA$	**8.** Resuelve el enunciado 7 para $m\angle DAE$.
9. $m\angle BCA + m\angle BAC + 90° = 180°$	**9.** Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1)
10. $m\angle BAC = 90° - m\angle BCA$	**10.** Resuelve el enunciado 9 para $m\angle BAC$.
11. $m\angle DAE = m\angle BAC$	**11.** Propiedad transitiva de la igualdad
12. $\angle DAE \cong \angle BAC$	**12.** Definición de ángulos congruentes
13. $\angle ABC \cong \angle ADE$	**13.** Teorema de la congruencia de ángulos rectos (Teorema 2.3)
14. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$	**14.** Teorema de la similitud AA (Teorema 8.3)
15. $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$	**15.** Los lados correspondientes de figuras similares son proporcionales.
16. $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AB}{BC}$	**16.** Reescribe la proporción.
17. $m_\ell = \dfrac{DE}{AD}$, $m_n = -\dfrac{AB}{BC}$	**17.** Definición de pendiente
18. $m_\ell m_n = \dfrac{DE}{AD} \cdot \left(-\dfrac{AB}{BC}\right)$	**18.** Propiedad de sustitución de la igualdad
19. $m_\ell m_n = \dfrac{DE}{AD} \cdot \left(-\dfrac{AD}{DE}\right)$	**19.** Propiedad de sustitución de la igualdad
20. $m_\ell m_n = -1$	**20.** Simplifica.

8.3 Ejercicios

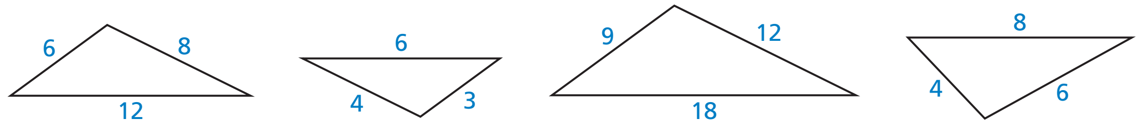
Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. COMPLETAR LA ORACIÓN Estás planeando demostrar que $\triangle QRS$ es similar a $\triangle XYZ$ según el Teorema de similitud LLL (Teorema 8.4).

Copia y completa la proporción que utilizarás: $\dfrac{QR}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{YZ} = \dfrac{QS}{\boxed{}}$.

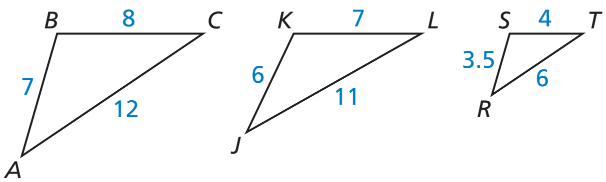
2. ¿CUÁL NO CORRESPONDE? ¿Qué triángulos *no* pertenecen a los otros tres? Explica tu razonamiento.



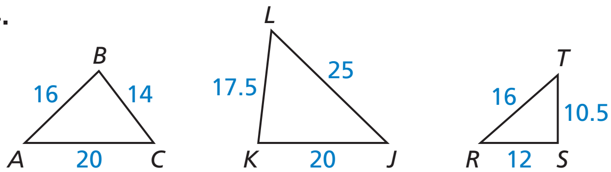
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3 y 4, determina si $\triangle JKL$ o $\triangle RST$ es similar a $\triangle ABC$. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3.

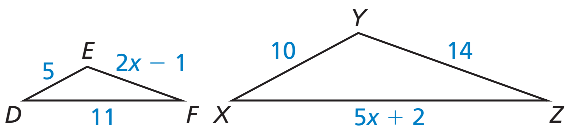


4.

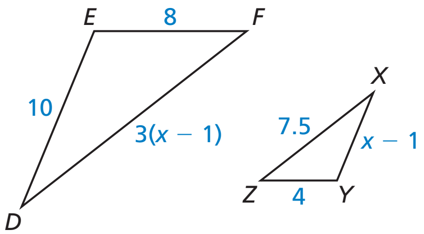


En los Ejercicios 5 y 6, halla el valor de x que hace que $\triangle DEF \sim \triangle XYZ$. *(Consulta el Ejemplo 2).*

5.



6.



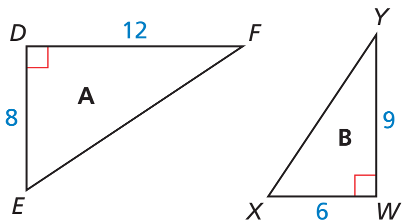
En los Ejercicios 7 y 8, verifica que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Halla el factor de escala de $\triangle ABC$ respecto a $\triangle DEF$.

7. $\triangle ABC$: $BC = 18$, $AB = 15$, $AC = 12$
$\triangle DEF$: $EF = 12$, $DE = 10$, $DF = 8$

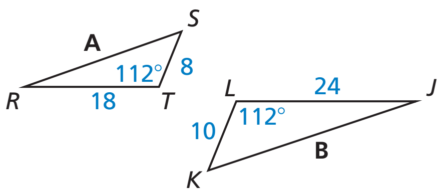
8. $\triangle ABC$: $AB = 10$, $BC = 16$, $CA = 20$
$\triangle DEF$: $DE = 25$, $EF = 40$, $FD = 50$

En los Ejercicios 9 y 10, determina si los dos triángulos son similares; si son similares, escribe un enunciado de similitud y halla el factor de escala del triángulo B respecto al triángulo A. *(Consulta el Ejemplo 3).*

9.



10.



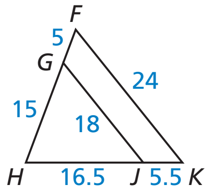
En los Ejercicios 11 y 12, dibuja los triángulos utilizando la descripción dada. Después determina si los dos triángulos pueden ser similares.

11. En $\triangle RST$, $RS = 20$, $ST = 32$ y $m\angle S = 16°$. En $\triangle FGH$, $GH = 30$, $HF = 48$ y $m\angle H = 24°$.

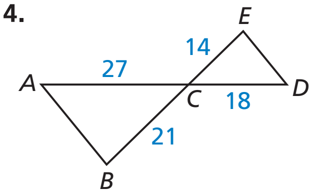
12. Las longitudes de los lados de $\triangle ABC$ son 24, $8x$, y 48, y las longitudes de los lados de $\triangle DEF$ son 15, 25 y $6x$.

En los Ejercicios 13–16, demuestra que los triángulos son similares y escribe un enunciado de similitud. Explica tu razonamiento.

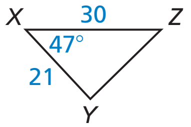
13.

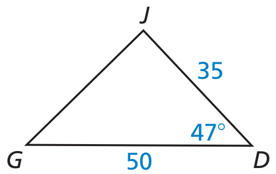


14.

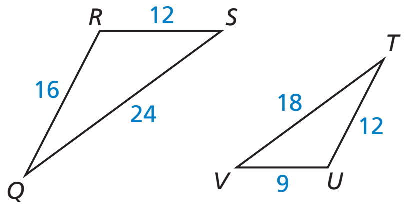


15.

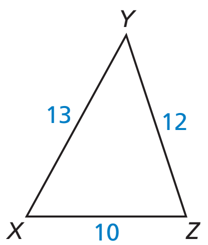




16.



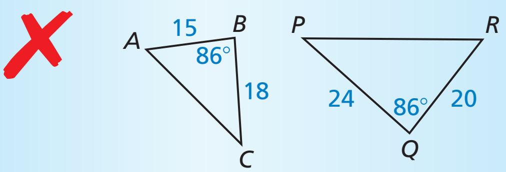
En los Ejercicios 17 y 18, utiliza $\triangle XYZ$.



17. El lado más corto de un triángulo similar a $\triangle XYZ$ es de 20 unidades de largo. Halla las otras longitudes de los lados del triángulo.

18. El lado más largo de un triángulo similar a $\triangle XYZ$ es de 39 unidades de largo. Halla las otras longitudes de los lados del triángulo.

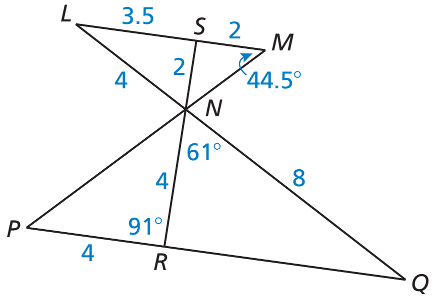
19. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al escribir un enunciado de similitud.



$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ según el Teorema de similitud LAL (Teorema 8.5).

20. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Halla el valor de n que haga que $\triangle DEF \sim \triangle XYZ$ cuando $DE = 4$, $EF = 5$, $XY = 4(n + 1)$, $YZ = 7n - 1$ y $\angle E \cong \angle Y$. Incluye un dibujo.

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN **En los Ejercicios 21–26, utiliza el diagrama para copiar y completar el enunciado.**



21. $m\angle LNS =$

22. $m\angle NRQ =$

23. $m\angle NQR =$

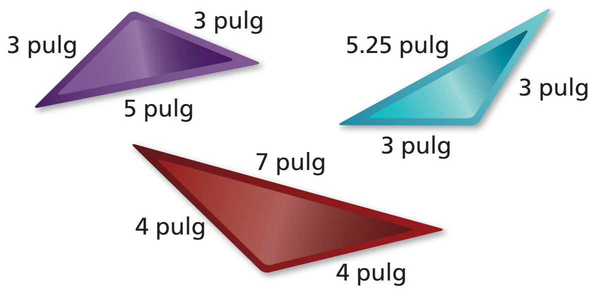
24. $RQ =$

25. $m\angle NSM =$

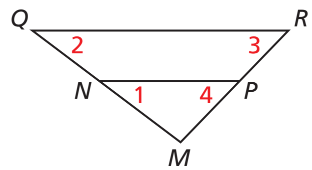
26. $m\angle NPR =$

27. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que $\triangle JKL \sim \triangle MNO$ según el Teorema de similitud LAL (Teorema 8.5) cuando $JK = 18$, $m\angle K = 130°$, $KL = 16$, $MN = 9$, $m\angle N = 65°$, y $NO = 8$. ¿Apoyas la afirmación de tu amigo? Explica tu razonamiento.

28. **ANALIZAR RELACIONES** Ciertas secciones de vitral se venden en piezas triangulares biseladas. ¿Cuáles de las tres piezas son similares?



29. **PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN** En el diagrama $\frac{MN}{MR} = \frac{MP}{MQ}$. ¿Cuál de los enunciados debe ser verdadero? Selecciona todos los aplicables. Explica tu razonamiento.

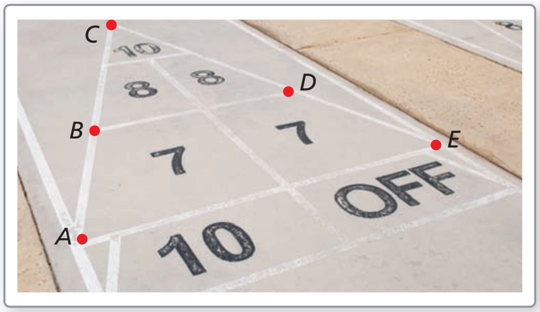


Ⓐ $\angle 1 \cong \angle 2$ Ⓑ $\overline{QR} \parallel \overline{NP}$

Ⓒ $\angle 1 \cong \angle 4$ Ⓓ $\triangle MNP \sim \triangle MRQ$

30. **ESCRIBIR** ¿Alguno de los dos triángulos rectos son similares? Explica.

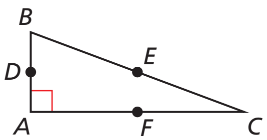
31. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS En la proporción del tablero de tejo mostrado $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE}$.



a. ¿Qué información adicional necesitas para demostrar que $\triangle BCD \sim \triangle ACE$ utilizando el Teorema de similitud LLL (Teorema 8.4)?

b. ¿Qué información adicional necesitas para demostrar que $\triangle BCD \sim \triangle ACE$ utilizando el Teorema de similitud LAL (Teorema 8.5)?

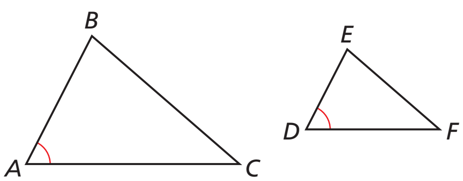
32. PRUEBA Dado que $\triangle BAC$ es un triángulo rectángulo y que D, E y F son puntos medios, demuestra que $m\angle DEF = 90°$.



33. DEMOSTRAR UN TEOREMA Escribe una prueba de dos columnas del Teorema de similitud LAL (Teorema 8.5).

Dado $\angle A \cong \angle D$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

Demostrar $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



34. PENSAMIENTO CRÍTICO Se te dan dos triángulos rectos con un par de catetos correspondientes y las mismas razones de longitud para el par de hipotenusas.

a. Las longitudes del par determinado de catetos correspondientes son 6 y 18, y las longitudes de las hipotenusas son 10 y 30. Utiliza el Teorema de Pitágoras para hallar las longitudes del otro par de catetos correspondientes. Dibuja un diagrama.

b. Escribe la razón de las longitudes del segundo par de catetos correspondientes.

c. ¿Estos triángulos son similares? ¿Esto sugiere un Teorema de similitud hipotenusa-cateto para los triángulos rectos? Explica.

35. ESCRIBIR ¿Las tres razones de las medidas de los ángulos correspondientes de dos triángulos, son iguales a un valor mayor que 1? ¿Menor que 1? Explica.

36. ¿CÓMO LO VES? ¿Qué teorema podrías utilizar para mostrar que $\triangle OPQ \sim \triangle OMN$ en la proporción de la rueda de la fortuna mostrada cuando $PM = QN = 5$ pies y $MO = NO = 10$ pies?

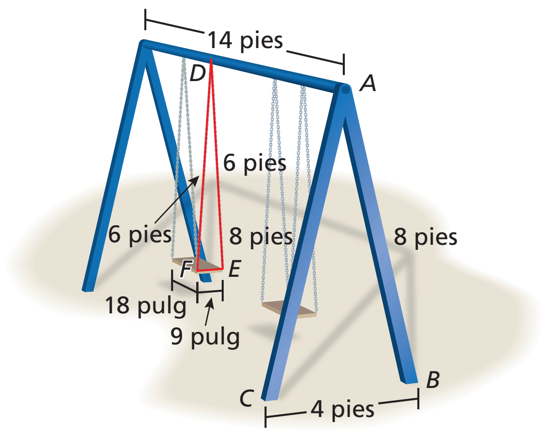
37. SACAR CONCLUSIONES Explica porqué no es necesario tener un Teorema de similitud ángulo-lado-ángulo.

38. ESTIMULR EL PENSAMIENTO Determina si cada método es válido para demostrar que dos cuadriláteros son similares. Justifica tu respuesta.

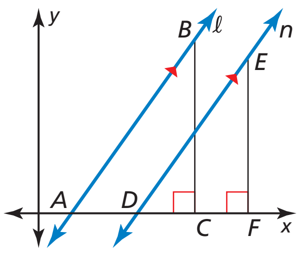
a. LALA **b.** LALAL **c.** LLLL **d.** LALLL

39. REPRESENTACIONES MÚLTIPLES Utiliza un diagrama para demostrar por qué no hay Teorema de similitud lado-lado-ángulo.

40. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Se muestran las dimensiones de un columpio de tamaño real. Deseas crear un modelo a escala de un columpio para una casa de muñecas utilizando triángulos similares. Dibuja tu columpio y rotula la longitud de cada lado. Escribe un enunciado de similitud para cada par de triángulos similares. Indica el factor de escala que utilizaste para crear el modelo a escala.



41. DEMOSTRAR UN TEOREMA Copia y completa la prueba de párrafo de la segunda parte del Teorema de las pendientes de líneas paralelas (Teorema 3.13) de la página 439.



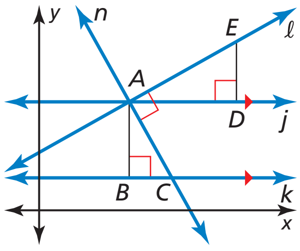
Dado $m_\ell = m_n$, ℓ y n son no verticales.

Demostrar $\ell \parallel n$

Sabes que $m_\ell = m_n$. Según la definición de la pendiente, $m_\ell = \frac{BC}{AC}$ y $m_n = \frac{EF}{DF}$. Según ________________________, $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$. Al reescribir esta proporción resulta __________. Según el Teorema de la congruencia de ángulos rectos (Teorema 2.3), ________________. Por tanto, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ según ________________________.

Debido a que los ángulos correspondientes de triángulos similares son congruentes, $\angle BAC \cong \angle EDF$. Según ________________________, $\ell \parallel n$.

42. DEMOSTRAR UN TEOREMA Copia y completa la prueba de dos columnas de la segunda parte del Teorema de las pendientes de líneas perpendiculares (Teorema 3.14) de la página 440.



Dado $m_\ell m_n = -1$, ℓ y n son no verticales.

Demostrar $\ell \perp n$

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $m_\ell m_n = -1$	**1.** Dado
2. $m_\ell = \frac{DE}{AD}$, $m_n = -\frac{AB}{BC}$	**2.** Definición de pendiente
3. $\frac{DE}{AD} \cdot -\frac{AB}{BC} = -1$	**3.** ________________________
4. $\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$	**4.** Multiplica cada lado del enunciado 3 por $-\frac{BC}{AB}$.
5. $\frac{DE}{BC} = \frac{}{}$ —	**5.** Reescribe la proporción.
6. ________________________	**6.** Teorema de la congruencia de ángulos rectos (Teorema 2.3)
7. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$	**7.** ________________________
8. $\angle BAC \cong \angle DAE$	**8.** Los ángulos correspondientes de figuras similares son congruentes.
9. $\angle BCA \cong \angle CAD$	**9.** Teorema de ángulos interiores alternos (Teorema 3.2)
10. $m\angle BAC = m\angle DAE$, $m\angle BCA = m\angle CAD$	**10.** ________________________
11. $m\angle BAC + m\angle BCA + 90° = 180°$	**11.** ________________________
12. ________________________	**12.** Propiedad de igualdad de la resta
13. $m\angle CAD + m\angle DAE = 90°$	**13.** Propiedad de substitución de la igualdad
14. $m\angle CAE = m\angle DAE + m\angle CAD$	**14.** Postulado de la suma del ángulo (Postulado 1.4)
15. $m\angle CAE = 90°$	**15.** ________________________
16. ________________________	**16.** Definición de las líneas perpendiculares

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla las coordenadas del punto *P* a lo largo del segmento de línea dirigido *AB* de manera que *AP* respecto a *PB* es la razón dada. *(Sección 3.5)*

43. $A(-3, 6)$, $B(2, 1)$; 3 a 2 **44.** $A(-3, -5)$, $B(9, -1)$; 1 a 3 **45.** $A(1, -2)$, $B(8, 12)$; 4 a 3

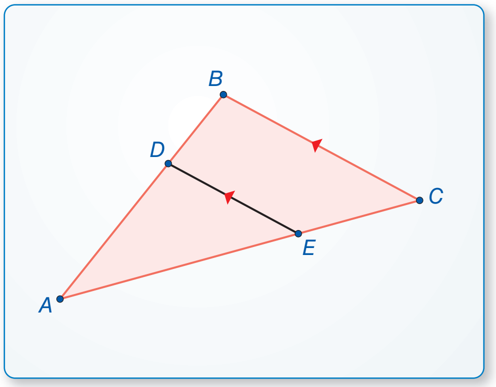
8.4 Teoremas de proporcionalidad

Pregunta esencial ¿Qué relaciones de proporcionalidad existen en un triángulo intersecado por una bisectriz de ángulo o por una línea paralela a uno de los lados?

EXPLORACIÓN 1 **Descubrir una relación de proporcionalidad**

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica para trazar cualquier $\triangle ABC$.

a. Traza $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{BC}$ con extremos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.



b. Compara las razones de AD con respecto a BD y AE respecto a CE.

c. Mueve $\overline{DE}$ a otras ubicaciones paralelas a $\overline{BC}$ con extremos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y repite la parte (b).

d. Cambia $\triangle ABC$ y repite varias veces las partes (a)–(c). Escribe una conjetura que resuma tus resultados.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas, necesitas observar atentamente para identificar un patrón o estructura.

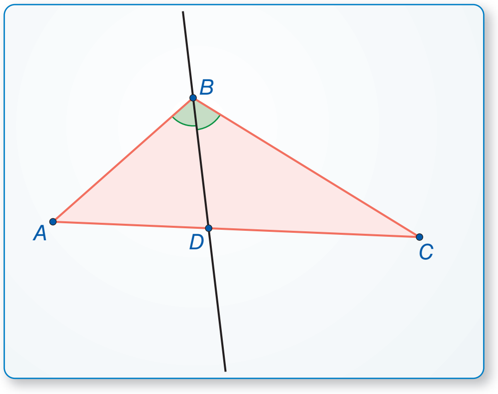
EXPLORACIÓN 2 **Descubrir una relación de proporcionalidad**

Trabaja con un compañero. Utiliza un software de geometría dinámica para dibujar un $\triangle ABC$ cualquiera.

a. Biseca $\angle B$ y traza el punto D en la intersección de la bisectriz de ángulo y $\overline{AC}$.

b. Compara las razones de AD respecto a DC y BA respecto a BC.

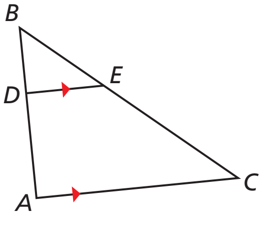
c. Cambia $\triangle ABC$ y repite varias veces las partes (a) y (b). Escribe una conjetura que resuma tus resultados.



Comunicar tu respuesta

3. ¿Qué relaciones de proporcionalidad existen en un triángulo intersecado por una bisectriz de ángulo o por una línea paralela a uno de los lados?

4. Utiliza la figura de la derecha para escribir una proporción.



8.4 Lección

Qué aprenderás

- Utilizar el Teorema de proporcionalidad del triángulo y su recíproco.
- Utilizar otros teoremas de la proporcionalidad.

Vocabulario Esencial

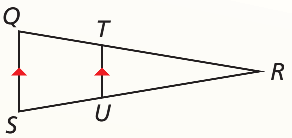
Anterior
ángulos correspondientes
razón
proporción

Utilizar el Teorema de proporcionalidad del triángulo

Teoremas

Teorema 8.6 Teorema de proporcionalidad del triángulo

Si una línea paralela a un lado de un triángulo se interseca con los otros dos lados, entonces divide a los dos lados proporcionalmente.

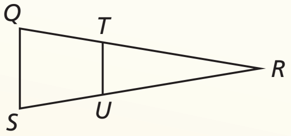


Si $\overline{TU} \parallel \overline{QS}$, entonces $\dfrac{RT}{TQ} = \dfrac{RU}{US}$.

Prueba Ej. 27, pág. 451

Teorema 8.7 Recíproco del Teorema de proporcionalidad del triángulo

Si una línea divide proporcionalmente dos lados de un triángulo, entonces, es paralela al tercer lado.

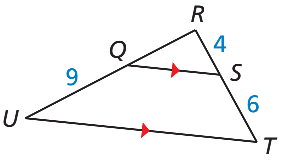


Si $\dfrac{RT}{TQ} = \dfrac{RU}{US}$, entonces $\overline{TU} \parallel \overline{QS}$.

Prueba Ej. 28, pág. 451

EJEMPLO 1 Hallar la longitud de un segmento

En el diagrama, $\overline{QS} \parallel \overline{UT}$, $RS = 4$, $ST = 6$ y $QU = 9$. ¿Cuál es la longitud de $\overline{RQ}$?



SOLUCIÓN

$\dfrac{RQ}{QU} = \dfrac{RS}{ST}$ Teorema de proporcionalidad del triángulo

$\dfrac{RQ}{9} = \dfrac{4}{6}$ Sustituye.

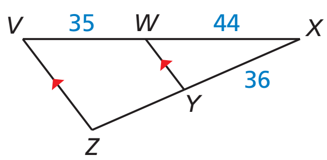
$RQ = 6$ Multiplica cada lado por 9 y simplifica.

- La longitud de $\overline{RQ}$ es 6 unidades.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

1. Halla la longitud de $\overline{YZ}$.



Los teoremas de la página previa también implican lo siguiente:

Contrarrecíproco del Teorema de proporcionalidad del triángulo

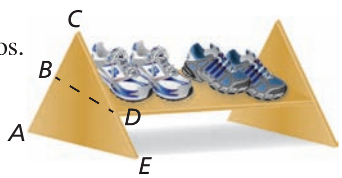
Si $\frac{RT}{TQ} \neq \frac{RU}{US}$, entonces $\overline{TU} \nparallel \overline{QS}$.

Inverso del Teorema de proporcionalidad del triángulo

Si $\overline{TU} \nparallel \overline{QS}$, entonces $\frac{RT}{TQ} \neq \frac{RU}{US}$.

EJEMPLO 2 Resolver un problema de la vida real

En la zapatera mostrada, $BA = 33$ centímetros, $CB = 27$ centímetros, $CD = 44$ centímetros y $DE = 25$ centímetros. Explica porqué la zapatera no es paralela al suelo.

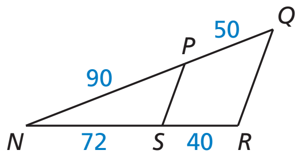


SOLUCIÓN

Halla y simplifica las razones de las longitudes.

$$\frac{CD}{DE} = \frac{44}{25} \qquad \frac{CB}{BA} = \frac{27}{33} = \frac{9}{11}$$

▶ Debido a que $\frac{44}{25} \neq \frac{9}{11}$, $\overline{BD}$ no es paralelo a $\overline{AE}$. Por tanto, la zapatera no es paralela al suelo.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

2. Determina si $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$.

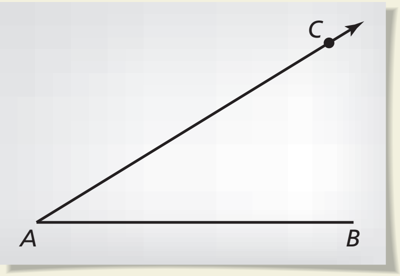
Recuerda que dividiste el segmento de línea en el plano de coordenadas en la Sección 3.5. Puedes aplicar el Teorema de proporcionalidad del triángulo para construir un punto a lo largo del segmento de línea dirigido que divida al segmento según una razón determinada.

CONSTRUCCIÓN Construir un punto a lo largo de un segmento de línea dirigido

Construye el punto L en $\overline{AB}$ de manera que la razón de AL con respecto a LB es 3 a 1.

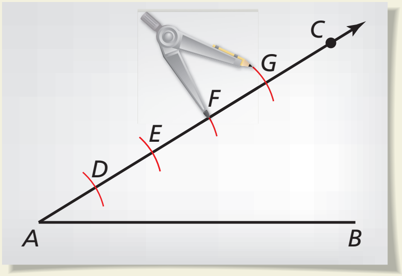
SOLUCIÓN

Paso 1



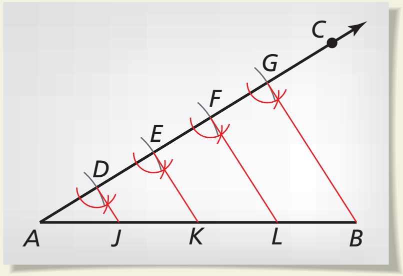
Traza un segmento y un rayo Traza un $\overline{AB}$ de cualquier longitud. Elige cualquier punto C que no esté en $\overleftrightarrow{AB}$. Traza $\overrightarrow{AC}$.

Paso 2



Traza arcos Coloca el punto de un compás en A y haz un arco de cualquier radio que interseque $\overrightarrow{AC}$. Rotula el punto de intersección D. Con ayuda de la misma apertura del compás, haz tres arcos más en $\overrightarrow{AC}$, como se muestra. Rotula los puntos de intersección E, F y G y observa que $AD = DE = EF = FG$.

Paso 3



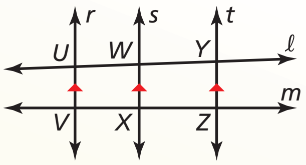
Traza un segmento Traza $\overline{GB}$. Copia $\angle AGB$ y traza ángulos congruentes en D, E y F con lados que intersequen a $\overline{AB}$ en J, K y L. Los lados $\overline{DJ}$, $\overline{EK}$ y $\overline{FL}$ son paralelos, y dividen equitativamente a $\overline{AB}$. Por tanto, $AJ = JK = KL = LB$. El punto L divide el segmento de línea dirigido AB en razón de 3 a 1.

Utilizar otros teoremas de la proporcionalidad

Teorema

Teorema 8.8 **Teorema de las tres líneas paralelas**

Si tres líneas paralelas intersecan dos transversales, entonces, dividen a éstas transversales proporcionalmente.

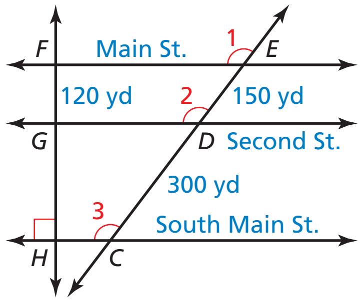


$$\frac{UW}{WY} = \frac{VX}{XZ}$$

Prueba Ej. 32, pág. 451

EJEMPLO 3 Utilizar el Teorema de las tres líneas paralelas

En el diagrama, $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son congruentes, $GF = 120$ yardas, $DE = 150$ yardas, y $CD = 300$ yardas. Halla la distancia HF entre Main Street y South Main Street.



SOLUCIÓN

Los ángulos correspondientes son congruentes, por tanto, $\overleftrightarrow{FE}$, $\overleftrightarrow{GD}$ y $\overleftrightarrow{HC}$ son paralelos. Hay diferentes formas de escribir una proporción para hallar HG.

Método 1 Utiliza el Teorema de las tres líneas paralelas para hacer una conjetura de una proporción.

$$\frac{HG}{GF} = \frac{CD}{DE}$$ Teorema de las tres líneas paralelas

$$\frac{HG}{120} = \frac{300}{150}$$ Sustituye.

$$HG = 240$$ Multiplica cada lado por 120 y simplifica.

Según el Postulado de suma de segmentos (Postulado 1.2), $HF = HG + GF = 240 + 120 = 360$.

▶ La distancia entre Main Street y South Main Street es 360 yardas.

Método 2 Haz una conjetura de una proporción que involucre las distancias totales y parciales.

Paso 1 Haz una tabla para comparar las distancias.

	$\overleftrightarrow{CE}$	$\overleftrightarrow{HF}$
Distancia total	$CE = 300 + 150 = 450$	HF
Distancia parcial	$DE = 150$	$GF = 120$

Paso 2 Escribe y resuelve una proporción.

$$\frac{450}{150} = \frac{HF}{120}$$ Escribe una proporción.

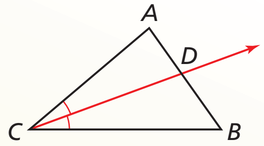
$$360 = HF$$ Multiplica cada lado por 120 y simplifica.

▶ La distancia entre Main Street y South Main Street es 360 yardas.

Teorema

Teorema 8.9 Teorema de la bisectriz del ángulo del triángulo

Si un rayo biseca un ángulo de un triángulo, entonces, divide el lado opuesto en segmentos cuyas longitudes son proporcionales a las longitudes de los otros dos lados.

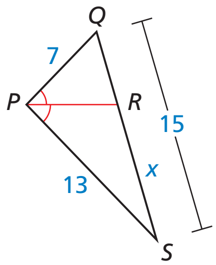


$$\frac{AD}{DB} = \frac{CA}{CB}$$

Prueba Ej. 35, pág. 452

EJEMPLO 4 **Utilizar el Teorema de la bisectriz del ángulo del triángulo**

En el diagrama, $\angle QPR \cong \angle RPS$. Utiliza las longitudes dadas de los lados para hallar la longitud de $\overline{RS}$.



SOLUCIÓN

Debido a que $\overrightarrow{PR}$ es una bisectriz de ángulo de $\angle QPS$, puedes aplicar el Teorema de la bisectriz del ángulo del triángulo. Sea $RS = x$. Entonces, $RQ = 15 - x$.

$\dfrac{RQ}{RS} = \dfrac{PQ}{PS}$	Teorema de la bisectriz del ángulo del triángulo
$\dfrac{15 - x}{x} = \dfrac{7}{13}$	Sustituye.
$195 - 13x = 7x$	Propiedad de productos cruzados
$9.75 = x$	Resuelve para hallar *x*.

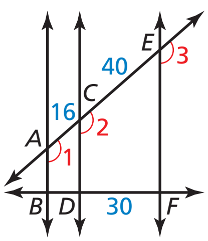
▶ La longitud de $\overline{RS}$ es 9.75 unidades.

Monitoreo del progreso

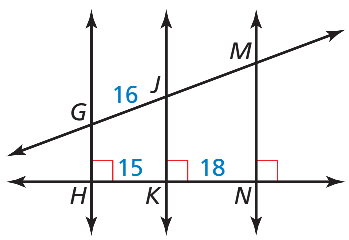
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla la longitud del segmento de línea dado.

3. $\overline{BD}$

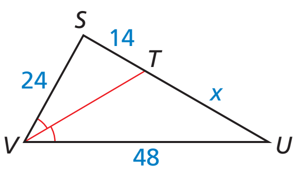


4. $\overline{JM}$

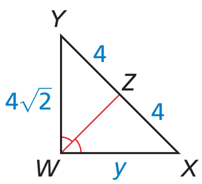


Halla el valor de la variable.

5.



6.



 Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

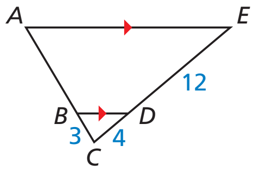
Verificación de vocabulario y concepto esencial

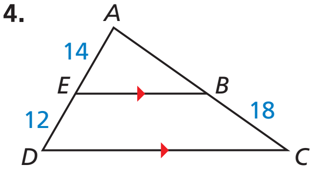
1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Si una línea divide proporcionalmente dos lados, entonces, es _________ al tercer lado. Este teorema se conoce como ___________.

2. **VOCABULARIO** En $\triangle ABC$, el punto R pertenece a $\overline{BC}$ y $\overrightarrow{AR}$ biseca a $\angle CAB$. Escribe el enunciado de proporcionalidad para el triángulo que esté basado en el Teorema de la bisectriz del ángulo del triángulo (Teorema 8.9).

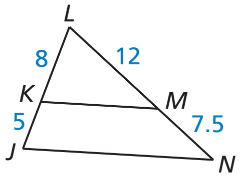
Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

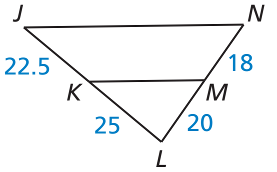
En los Ejercicios 3 y 4, halla la longitud de $\overline{AB}$. *(Consulta el Ejemplo 1).*

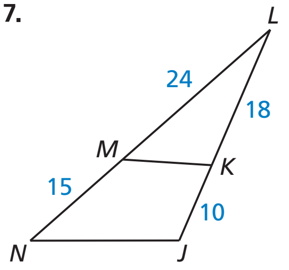
3. 

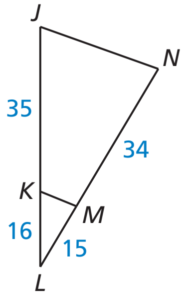
4. 

En los Ejercicios 5–8, determina si $\overline{KM} \parallel \overline{JN}$. *(Consulta el Ejemplo 2).*

5. 

6. 

7. 

8. 

CONSTRUCCIÓN **En los Ejercicios 9–12, dibuja un segmento con la longitud dada. Construye cada punto que divida el segmento en la razón dada.**

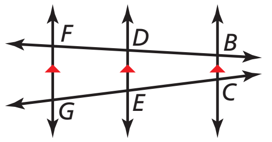
9. 3 pulg; 1 a 4

10. 2 pulg; 2 a 3

11. 12 cm; 1 a 3

12. 9 cm; 2 a 5

En los Ejercicios 13–16, utiliza el diagrama para completar la proporción.



13. $\dfrac{BD}{BF} = \dfrac{\square}{CG}$

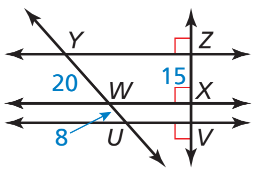
14. $\dfrac{CG}{\square} = \dfrac{BF}{DF}$

15. $\dfrac{EG}{CE} = \dfrac{DF}{\square}$

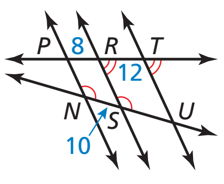
16. $\dfrac{\square}{BD} = \dfrac{CG}{CE}$

En los Ejercicios 17–18, halla la longitud del segmento de línea indicado. *(Consulta el Ejemplo 3).*

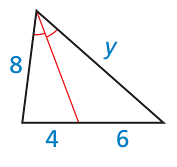
17. $\overline{VX}$

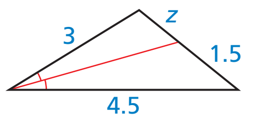


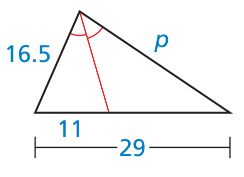
18. $\overline{SU}$

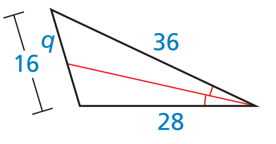


En los Ejercicios 19–22, halla el valor de la variable. *(Consulta el Ejemplo 4).*

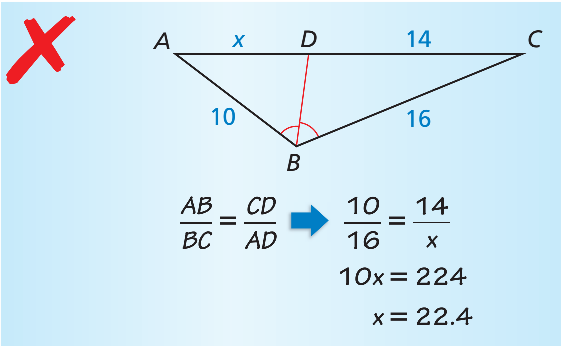
19. 

20. 

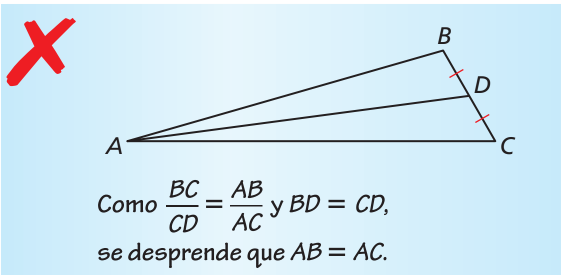
21. 

22. 

23. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al resolver para hallar x.

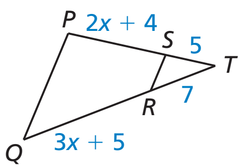


24. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido en el razonamiento del estudiante.

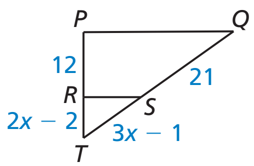


CONEXIONES MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 25 y 26, hallar el valor de x para los que $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$.**

25.



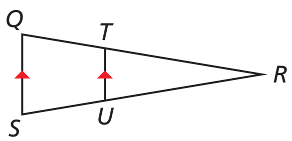
26.



27. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Demuestra el Teorema de la proporcionalidad del triángulo (Teorema 8.6).

Dado $\overline{QS} \parallel \overline{TU}$

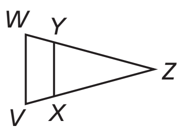
Demostrar $\frac{QT}{TR} = \frac{SU}{UR}$



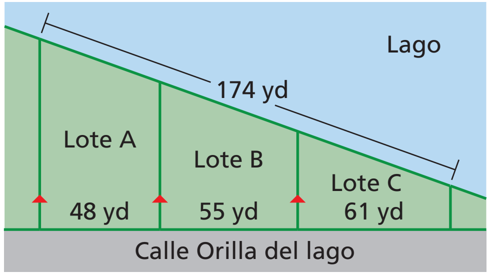
28. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Demuestra el recíproco del Teorema de la proporcionalidad del triángulo (Teorema 8.7).

Dado $\frac{ZY}{YW} = \frac{ZX}{XV}$

Demostrar $\overline{YX} \parallel \overline{WV}$



29. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** En bienes raíces, el término *frente de lago* se refiere a la distancia a lo largo del borde de una propiedad que toca un lago.

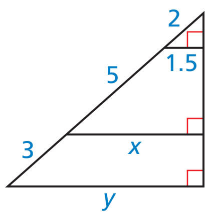


a. Halla el frente de lago (redondeado a la décima más cercana) de cada lote mostrado.

b. En general, cuanto mayor sea el frente de lago que tenga un lote, más alto será su precio de venta. Haz una lista de el(los) lote(s) con el precio más alto.

c. Supón que los precios de los lotes tienen la misma razón que los frentes de lago. Si el precio más bajo de los lotes es \$250,000, ¿cuáles son los precios de los lotes? Explica tu razonamiento.

30. **USAR LA ESTRUCTURA** Utiliza el diagrama para hallar los valores de x y y.

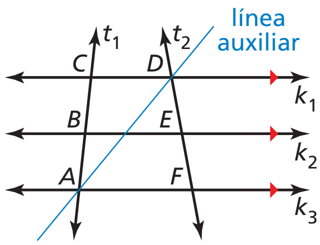


31. **RAZONAR** En el dibujo de la página 447, explica porqué puedes aplicar el Teorema de la proporcionalidad del triángulo (Teorema 8.6) en el paso 3.

32. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Utiliza el diagrama con la línea auxiliar para escribir una prueba de párrafo del Teorema de las tres líneas paralelas (Teorema 8.8).

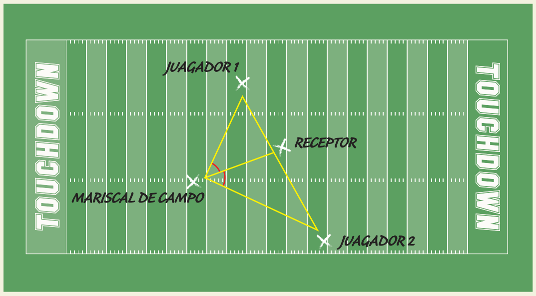
Dado $k_1 \parallel k_2 \parallel k_3$

Demostrar $\frac{CB}{BA} = \frac{DE}{EF}$



33. **PENSAMIENTO CRÍTICO** En $\triangle LMN$, la bisectriz de ángulo de $\angle M$ también biseca a $\overline{LN}$. Clasifica $\triangle LMN$ tanto como sea posible. Justifica tu respuesta.

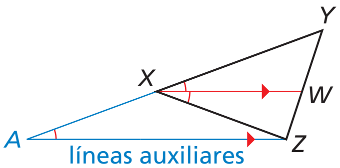
34. **¿CÓMO LO VES?** Durante un partido de futbol, el mariscal de campo lanza la bola al receptor. El receptor está entre dos defensas, como se muestra. Si el jugador 1 está más cerca del mariscal cuando se lanza la bola y ambas defensas se mueven a la misma velocidad, ¿qué jugador llegará primero al receptor? Explica tu razonamiento.



35. **DEMOSTRAR UN TEOREMA** Utiliza el diagrama con las líneas auxiliares dibujadas para escribir una prueba de párrafo del Teorema de bisectriz de un ángulo de un triángulo (Teorema 8.9)

Dado $\angle YXW \cong \angle WXZ$

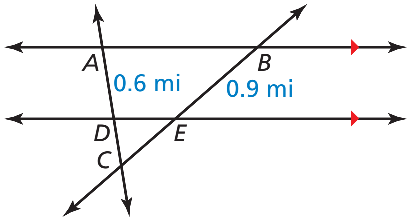
Demostrar $\dfrac{YW}{WZ} = \dfrac{XY}{XZ}$



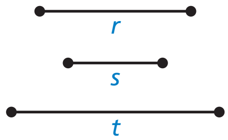
36. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe el recíproco del Teorema de la bisectriz de un ángulo de un triángulo (Teorema 8.9). ¿El recíproco es verdadero? Justifica tu respuesta.

37. **RAZONAR** ¿Qué relación hay entre el Teorema del segmento medio del triángulo (Teorema 6.8) y el Teorema de la proporcionalidad del triángulo (Teorema 8.6)? Explica tu razonamiento.

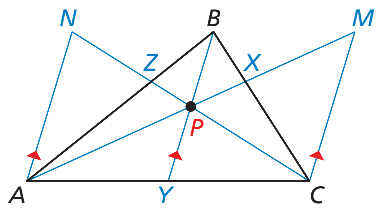
38. **ARGUMENTAR** Dos personas parten al mismo tiempo de los puntos A y B. Intentan reunirse en el punto C al mismo tiempo. La persona que parte del punto A camina a una velocidad de 3 millas por hora. Tú y tu amigo tratan de determinar con cuánta rapidez debe caminar la persona que parte del punto B. Tu amigo afirma que debes conocer la longitud de $\overline{AC}$. ¿Tu amigo está en lo correcto? Explica tu razonamiento.



39. **CONSTRUCCIÓN** Dado que los segmentos con longitudes r, s y t, traza un segmento de longitud x, tal que $\dfrac{r}{s} = \dfrac{t}{x}$.



40. **PRUEBA** Demuestra el *Teorema de Ceva:* Si P es cualquier punto dentro de $\triangle ABC$, entonces $\dfrac{AY}{YC} \cdot \dfrac{CX}{XB} \cdot \dfrac{BZ}{ZA} = 1$.



(*Sugerencia:* Traza segmentos paralelos a $\overline{BY}$ que pasen por A y C, como se muestra. Aplica el Teorema de la proporcionalidad del triángulo (Teorema 8.6) respecto a $\triangle ACM$. Demuestra que $\triangle APN \sim \triangle MPC$, $\triangle CXM \sim \triangle BXP$, y $\triangle BZP \sim \triangle AZN$).

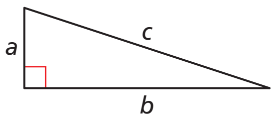
Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Utiliza el triángulo. *(Sección 5.5)*

41. ¿Qué lados son los catetos?

42. ¿Qué lado es la hipotenusa?



Resuelve la ecuación. *(Manual de revisión de destrezas)*

43. $x^2 = 121$

44. $x^2 + 16 = 25$

45. $36 + x^2 = 85$

8.3–8.4 ¿Qué aprendiste?

Conceptos Esenciales

Sección 8.3

Teorema 8.4 Teorema de similitud lado-lado-lado (LLL), *pág. 436*
Teorema 8.5 Teorema de similitud lado-ángulo-lado (LAL), *pág. 438*
Demostrar los criterios de la pendiente utilizando triángulos similares, *pág. 439*

Sección 8.4

Teorema 8.6 Teorema de proporcionalidad del triángulo, *pág. 446*
Teorema 8.7 Recíproco del Teorema de proporcionalidad del triángulo, *pág. 446*
Teorema 8.8 Teorema de las tres líneas paralelas, *pág. 448*
Teorema 8.9 Teorema de la bisectriz del ángulo del triángulo, *pág. 449*

Prácticas Matemáticas

1. En el Ejercicio 17 de la página 442, ¿por qué se te dijo qué lado mide 20 unidades de largo?

2. En el Ejercicio 42 de la página 444, analiza el enunciado dado. Describe la relación entre las pendientes de las líneas.

3. En el Ejercicio 4 de la página 450, ¿es mejor utilizar $\frac{7}{6}$ o 1.17 como tu razón de las longitudes cuando se desea hallar la longitud de $\overline{AB}$? Explica tu razonamiento.

Tarea de desempeño

Ser juez en la Feria de matemáticas

Te seleccionaron como uno de los jueces para la Feria de matemáticas de secundaria. En una competencia, se les ha pedido a los estudiantes de séptimo grado que creen dibujos o modelos a escala de objetos de la vida real. Como juez debes verificar que los objetos estén reproducidos a escala correctamente en al menos de dos maneras diferentes. ¿Cómo verificarás que las escalas de las entradas sean correctas?

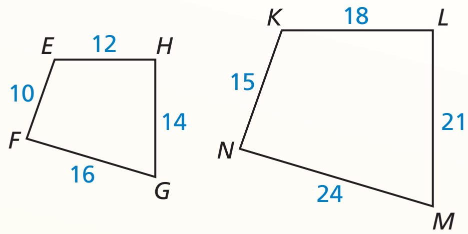
Para explorar las respuestas a la pregunta y más ve a *BigIdeasMath.com*.

8 Repaso del capítulo

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

8.1 Polígonos similares (*págs. 417–426*)

En el diagrama *EHGF* ~ *KLMN*. Halla el factor de escala de *EHGF* a *KLMN*. Después haz una lista de todos los pares de ángulos congruentes y escribe las razones de las longitudes de los lados correspondientes en un enunciado de proporcionalidad.



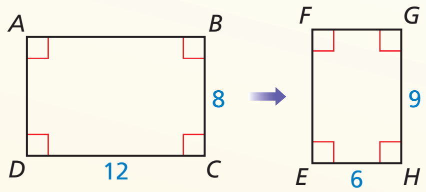
En el diagrama puedes ver que $\overline{EH}$ y $\overline{KL}$ son lados correspondientes. Por tanto, el factor de escala de $EHGF$ a $KLMN$ es $\dfrac{KL}{EH} = \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2}$.

$\angle E \cong \angle K$, $\angle H \cong \angle L$, $\angle G \cong \angle M$, y $\angle F \cong \angle N$.

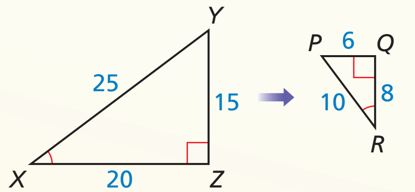
$$\frac{KL}{EH} = \frac{LM}{HG} = \frac{MN}{GF} = \frac{NK}{FE}$$

Halla el factor de escala. Después haz una lista de los ángulos congruentes y escribe las razones de las longitudes de lados correspondientes en un enunciado de proporcionalidad.

1. $ABCD \sim EFGH$



2. $\triangle XYZ \sim \triangle RPQ$

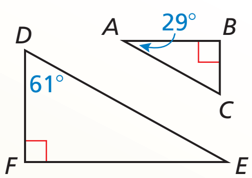


3. Dos triángulos similares tienen un factor de escala de 3 : 5. La altitud del triángulo más largo es 24 pulgadas. ¿Cuál es la altitud del triángulo más pequeño?

4. Dos triángulos similares tienen un par de lados correspondientes de longitudes de 12 y 8 metros. El triángulo más largo tiene un perímetro de 48 metros y un área de 180 metros cuadrados. Halla el perímetro y el área del triángulo más pequeño.

8.2 Demostrar similitud de triángulos con AA (*págs. 427–432*)

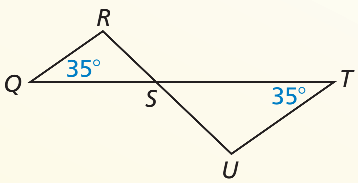
Determina si los triángulos son similares. Si lo son, escribe un enunciado de similitud. Explica tu razonamiento.



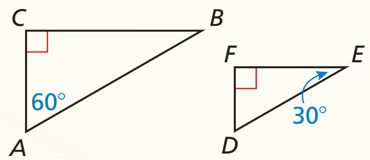
Debido a que ambos son ángulos rectos, $\angle F$ y $\angle B$ son congruentes. Según el Teorema de la suma del triángulo (Teorema 5.1), $61° + 90° + m\angle E = 180°$, entonces $m\angle E = 29°$. Entonces, $\angle E$ y $\angle A$ son congruentes. Por tanto, $\triangle DFE \sim \triangle CBA$ según el Teorema de similitud AA (Teorema 8.3).

Demuestra que los triángulos son similares. Escribe un enunciado de similitud.

5.



6.

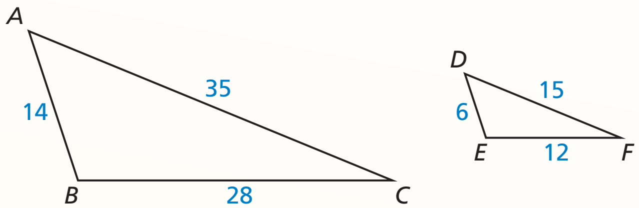


7. Una torre de telefonía celular proyecta una sombra de 72 pies de largo, mientras que un árbol cercano que mide 27 pies de alto proyecta una sombra de 6 pies de largo. ¿Qué tan alta es la torre?

8.3 Demostrar similitud de triángulos con LLL y LAL *(págs. 435–444)*

Demuestra que los triángulos son similares.

a.

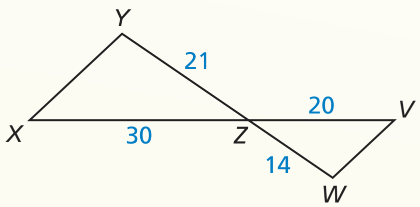


Halla las razones de los lados correspondientes para comparar $\triangle ABC$ y $\triangle DFE$.

Lados más cortos	**Lados más largos**	**Lados restantes**
$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3}$	$\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{35}{15} = \dfrac{7}{3}$	$\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{28}{12} = \dfrac{7}{3}$

Todas las razones son iguales, por tanto $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ según el Teorema de similitud LLL (Teorema 8.4).

b.



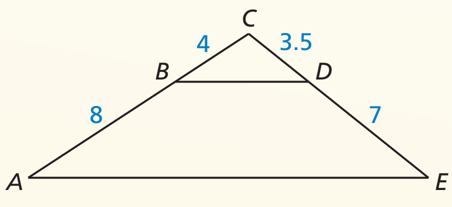
$\angle YZX \cong \angle WZV$ según el Teorema de la congruencia de los ángulos verticales (Teorema 2.6). Después, compara las razones de las longitudes de los lados correspondientes de $\triangle YZX$ y $\triangle WZV$.

$$\frac{WZ}{YZ} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \qquad \frac{VZ}{XZ} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

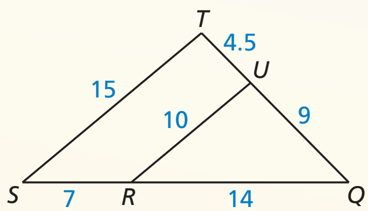
► Por tanto, según el Teorema de similitud LAL (Teorema 8.5), $\triangle YZX \sim \triangle WZV$.

Utiliza el Teorema de la similitud LLL (Teorema 8.4) o el Teorema de la similitud LAL (Teorema 8.5) para demostrar que los triángulos son similares.

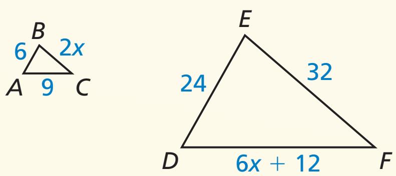
8.



9.



10. Halla el valor de x que hace que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



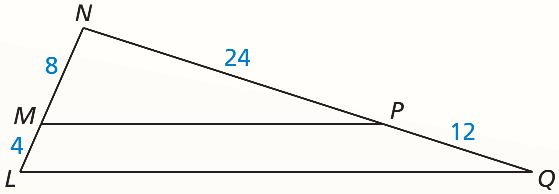
8.4 Teoremas de proporcionalidad *(págs. 445–452)*

a. Determina si $\overline{MP} \parallel \overline{LQ}$.

Inicia simplificando y halla las razones de las longitudes determinadas por $\overline{MP}$.

$$\frac{NM}{ML} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{24}{12} = \frac{2}{1} = 2$$



Debido a que $\frac{NM}{ML} = \frac{NP}{PQ}$, $\overline{MP}$ es paralelo a $\overline{LQ}$ según el recíproco del Teorema de la proporcionalidad del triángulo (Teorema 8.7).

b. En el diagrama, $\overline{AD}$ biseca a $\angle CAB$. Halla la longitud de $\overline{DB}$.

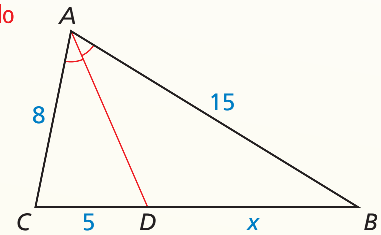
Como $\overline{AD}$ es una bisectriz de ángulo de $\angle CAB$, puedes aplicar el Teorema de bisectriz de ángulo del triángulo (Teorema 8.9).

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ Teorema de la bisectriz del ángulo del triángulo

$\frac{x}{5} = \frac{15}{8}$ Sustituye.

$8x = 75$ Propiedad de productos cruzados

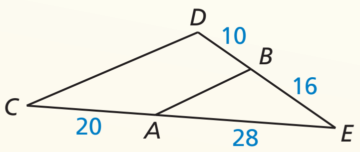
$9.375 = x$ Resuelve para hallar x.



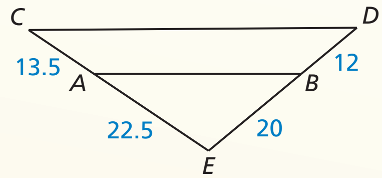
▶ La longitud de $\overline{DB}$ es 9.375 unidades.

Determina si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

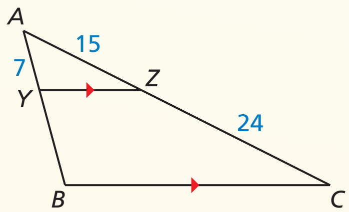
11.



12.

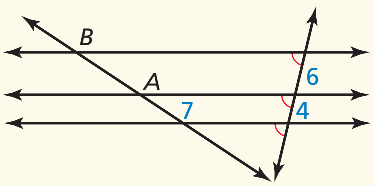


13. Halla la longitud de $\overline{YB}$.

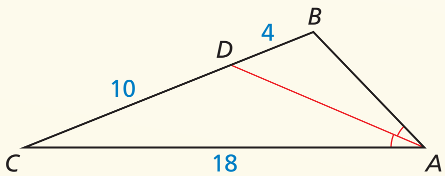


Halla la longitud de $\overline{AB}$.

14.



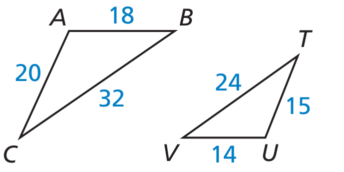
15.



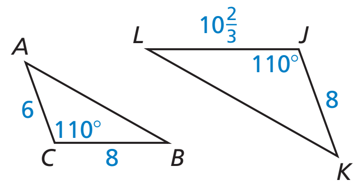
8 Prueba del capítulo

Determina si los triángulos son similares. Si lo son, escribe un enunciado de similitud. Explica tu razonamiento.

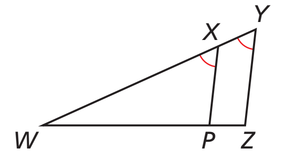
1.



2.

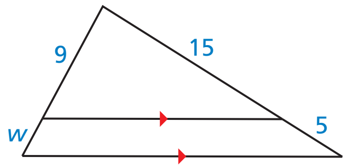


3.

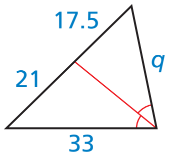


Halla el valor de la variable.

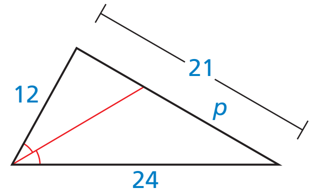
4.



5.

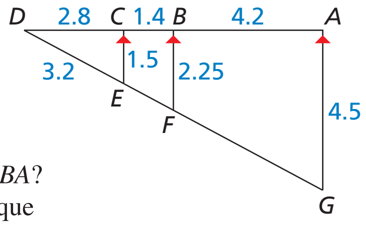


6.



7. Dado que $\triangle QRS \sim \triangle MNP$, haz una lista de todos los pares de ángulos congruentes. Después, escribe las razones de las longitudes de lados correspondientes en un enunciado de proporcionalidad.

Utiliza el diagrama.

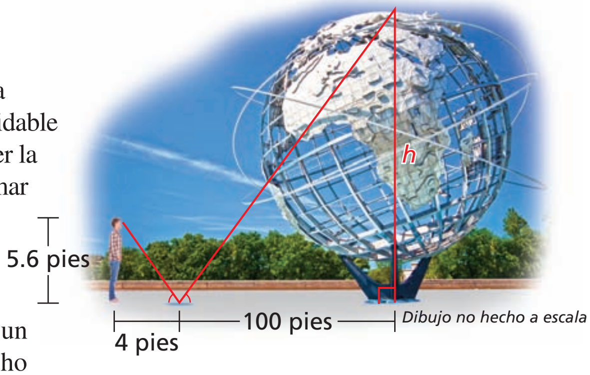


8. Halla la longitud de $\overline{EF}$.

9. Halla la longitud de $\overline{FG}$.

10. ¿El cuadrilátero *FECB* es similar al cuadrilátero *GFBA*? Si lo es, ¿cuál es el factor de escala de la dilatación que mapea el cuadrilátero *FECB* respecto del cuadrilátero *GFBA*?

11. Estás visitando el Unisphere en el parque Flushing Meadows Corona Park en Nueva York. Para estimar la altura del modelo de acero inoxidable de la Tierra, colocas un espejo en el suelo y te paras donde puedas ver la parte superior del modelo en el espejo. Utiliza el diagrama para estimar la altura del modelo. Explica porqué funciona este método.

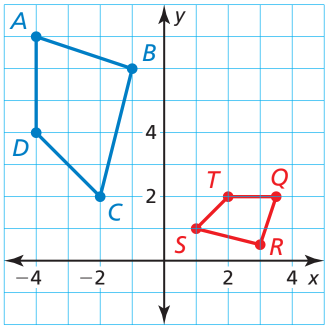


12. Estás haciendo un modelo a escala de un parque rectangular para un proyecto escolar. Tu modelo tiene una longitud de 2 pies y un ancho de 1.4 pies. El parque real mide 800 yardas de largo. ¿Cuál es el perímetro y el área real del parque?

13. En un *dibujo en perspectiva,* las líneas que son paralelas en la vida real, deben confluir en un punto de fuga en el horizonte. Para hacer que los carros del tren en el dibujo parezcan tener la misma longitud, se dibujan de tal manera que las líneas que conectan las esquinas opuestas de cada carro sean paralelas. Utiliza las dimensiones dadas y las líneas paralelas amarillas para hallar la longitud del borde inferior del dibujo del carro 2.

8 Evaluación acumulativa

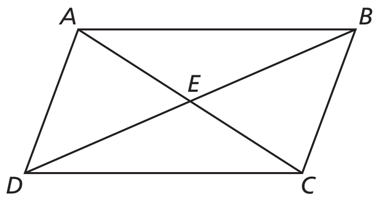
1. Utiliza la gráfica de los cuadriláteros *ABCD* y *QRST*.



a. Escribe una composición de transformaciones que mapee el cuadrilátero *ABCD* respecto al cuadrilátero *QRST*.

b. ¿Los cuadriláteros son similares? Explica tu razonamiento.

2. En el diagrama, *ABCD* es un paralelogramo. ¿Qué teorema(s) de congruencia utilizarías para demostrar que $\triangle AED \cong \triangle CEB$? Selecciona todos los aplicables.



Teorema de congruencia LAL (Teorema 5.5)

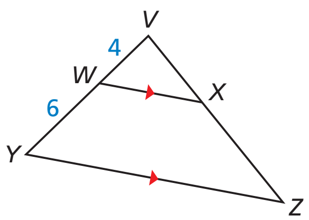
Teorema de congruencia LLL (Teorema 5.8)

Teorema de congruencia HC (Teorema 5.9)

Teorema de congruencia ALA (Teorema 5.10)

Teorema de congruencia AAL (Teorema 5.11)

3. Según el Teorema de proporcionalidad del triángulo (Teorema 8.6), $\frac{VW}{WY} = \frac{VX}{XZ}$. En el diagrama, $VX > VW$ y $XZ > WY$. Haz una lista de los tres posibles valores de *VX* y *XZ*.



4. La pendiente de la línea ℓ es $-\frac{3}{4}$. La pendiente de la línea n es $\frac{4}{3}$. ¿Qué es verdad sobre las líneas ℓ y n?

Ⓐ Las líneas ℓ y n son paralelas.

Ⓑ Las líneas ℓ y n son perpendiculares.

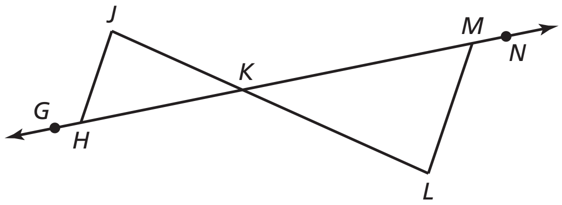
Ⓒ Las líneas ℓ y n son oblicuas.

Ⓓ Las líneas ℓ y n son la misma línea.

5. Escribe un enunciado o razón en cada espacio en blanco para completar la prueba de dos columnas.

Dado $\dfrac{KJ}{KL} = \dfrac{KH}{KM}$

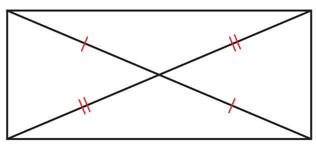
Demostrar $\angle LMN \cong \angle JHG$



ENUNCIADOS	**RAZONES**
1. $\dfrac{KJ}{KL} = \dfrac{KH}{KM}$	1. Dado
2. $\angle JKH \cong \angle LKM$	2. ______________
3. $\triangle JKH \sim \triangle LKM$	3. ______________
4. $\angle KHJ \cong \angle KML$	4. ______________
5. ______________	5. Definición de los ángulos congruentes
6. $m\angle KHJ + m\angle JHG = 180°$	6. Postulado del par lineal (Postulado 2.8)
7. $m\angle JHG = 180° - m\angle KHJ$	7. ______________
8. $m\angle KML + m\angle LMN = 180°$	8. ______________
9. ______________	9. Propiedad de igualdad de la resta
10. $m\angle LMN = 180° - m\angle KHJ$	10. ______________
11. ______________	11. Propiedad transitiva de la igualdad
12. $\angle LMN \cong \angle JHG$	12. ______________

6. Las coordenadas de los vértices de $\triangle DEF$ son $D(-8, 5)$, $E(-5, 8)$ y $F(-1, 4)$. Las coordenadas de los vértices de $\triangle JKL$ son $J(16, -10)$, $K(10, -16)$ y $L(2, -8)$. $\angle D \cong \angle J$. ¿Puedes demostrar que $\triangle DEF \sim \triangle JKL$ mediante el Teorema de similitud AA (Teorema 8.3)? Si es así, hazlo mediante una lista de los ángulos correspondientes congruentes y escribe una transformación de similitud que mapee $\triangle DEF$ con respecto a $\triangle JKL$. Si no, explica porqué no.

7. Clasifica el cuadrilátero usando el nombre más específico.



rectángulo | cuadrado | paralelogramo | rombo

8. Tu amigo afirma "El cuadrilátero *PQRS* es similar al cuadrilátero *WXYZ*". Describe las relaciones entre los ángulos correspondientes y entre los lados correspondientes que hacen verdadero este enunciado.