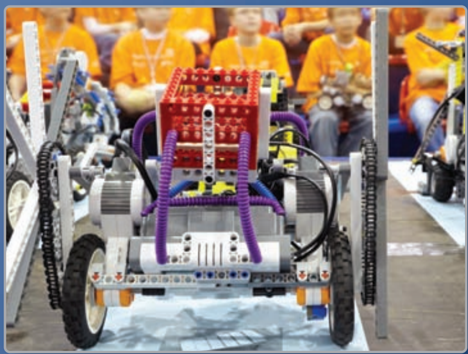
3 Ecuaciones cuadráticas y números complejos



Competencia de construcción de robots *(pág. 145)*

Torre de transmisión *(pág. 137)*

Alcatraces que se alimentan *(pág. 129)*

Béisbol *(pág. 115)*

Circuitos eléctricos *(pág. 106)*

Mantener el dominio de las matemáticas

Simplificar raíces cuadradas

Ejemplo 1 **Simplifica $\sqrt{8}$.**

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2}$ Factoriza usando el máximo factor de cuadrado perfecto.

$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$ Propiedad del producto de raíces cuadradas

$= 2\sqrt{2}$ Simplifica.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, donde $a, b \geq 0$

Ejemplo 2 **Simplifica $\sqrt{\frac{7}{36}}$.**

$\sqrt{\frac{7}{36}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{36}}$ Propiedad del cociente de raíces cuadradas

$= \frac{\sqrt{7}}{6}$ Simplifica.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, donde $a \geq 0$ y $b > 0$

Simplifica la expresión.

1. $\sqrt{27}$ **2.** $-\sqrt{112}$ **3.** $\sqrt{\frac{11}{64}}$ **4.** $\sqrt{\frac{147}{100}}$

5. $\sqrt{\frac{18}{49}}$ **6.** $-\sqrt{\frac{65}{121}}$ **7.** $-\sqrt{80}$ **8.** $\sqrt{32}$

Factorizar productos especiales

Ejemplo 3 **Factoriza (a) $x^2 - 4$ y (b) $x^2 - 14x + 49$.**

a. $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$ Escribe como $a^2 - b^2$.

$= (x + 2)(x - 2)$ Patrón de diferencia de dos cuadrados

▶ Entonces, $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

b. $x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2(x)(7) + 7^2$ Escribe como $a^2 - 2ab + b^2$.

$= (x - 7)^2$ Patrón de trinomio cuadrado perfecto

▶ Entonces, $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$.

Factoriza el polinomio.

9. $x^2 - 36$ **10.** $x^2 - 9$ **11.** $4x^2 - 25$

12. $x^2 - 22x + 121$ **13.** $x^2 + 28x + 196$ **14.** $49x^2 + 210x + 225$

15. RAZONAMIENTO ABSTRACTO Determina los posibles valores enteros de a y c para los cuales el trinomio $ax^2 + 8x + c$ es factorizable usando el Patrón de trinomio cuadrado perfecto. Explica tu razonamiento.

Prácticas matemáticas

Los estudiantes que dominan las matemáticas reconocen las limitaciones de la tecnología.

Reconocer las limitaciones de la tecnología

Concepto Esencial

Limitaciones de la calculadora gráfica

Las calculadoras gráficas tienen una cantidad limitada de píxeles para mostrar la gráfica de una función. El resultado podría ser una gráfica inexacta o engañosa.

Para corregir este problema, usa una configuración de ventana de visualización en base a las dimensiones de la pantalla (píxeles).

EJEMPLO 1 Reconocer una gráfica incorrecta

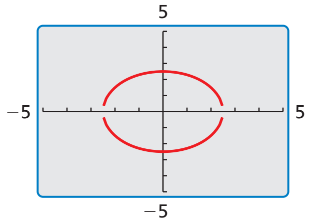
Usa la calculadora gráfica para dibujar el círculo dado por la ecuación $x^2 + y^2 = 6.25$.

SOLUCIÓN

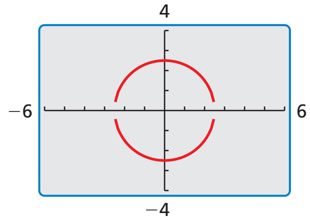
Empieza por solucionar la ecuación para y.

$y = \sqrt{6.25 - x^2}$ Ecuación para el semicírculo superior

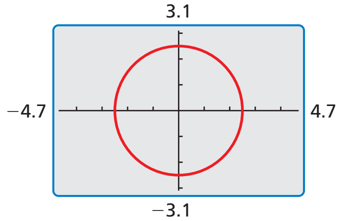
$y = -\sqrt{6.25 - x^2}$ Ecuación para el semicírculo inferior



Las gráficas de estas dos ecuaciones se muestran en la primera ventana de visualización. Ten en cuenta que hay dos problemas. El primero, la gráfica parece más un óvalo que un círculo. El segundo, las dos partes de la gráfica parecen tener brechas entre ellas.



Puedes corregir el primer problema usando una *ventana de visualización cuadrada*, como se muestra en la segunda ventana de visualización.



Para corregir el segundo problema necesitas conocer las dimensiones de la pantalla de la calculadora gráfica en términos del número de píxeles. Por ejemplo, para una pantalla con 63 pixeles de alto y 95 píxeles de ancho usa una configuración de ventana de visualización como se muestra a la derecha.

Monitoreo del progreso

1. Explica por qué la segunda ventana de visualización en el Ejemplo 1 muestra brechas entre el semicírculo superior y el semicírculo inferior, pero la tercera ventana de visualización no muestra brechas.

Usa una calculadora gráfica para dibujar una gráfica exacta de la ecuación. Explica tu elección de ventana de visualización.

2. $y = \sqrt{x^2 - 1.5}$
3. $y = \sqrt{x - 2.5}$
4. $x^2 + y^2 = 12.25$
5. $x^2 + y^2 = 20.25$
6. $x^2 + 4y^2 = 12.25$
7. $4x^2 + y^2 = 20.25$

3.1 Resolver ecuaciones cuadráticas

Pregunta esencial ¿Cómo puedes usar la gráfica de una ecuación cuadrática para determinar el número de soluciones reales de la ecuación?

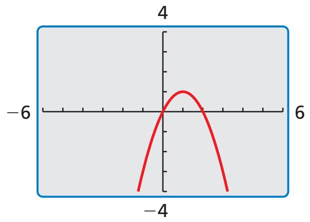
EXPLORACIÓN 1 Unir una función cuadrática con su gráfica

Trabaja con un compañero. Une cada función cuadrática con la gráfica correspondiente. Explica tu razonamiento. Determina el número de intersecciones con el eje x de la gráfica.

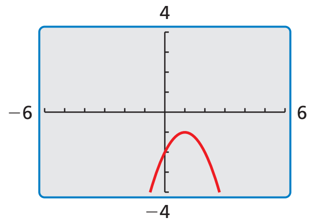
a. $f(x) = x^2 - 2x$ **b.** $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **c.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$

d. $f(x) = -x^2 + 2x$ **e.** $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ **f.** $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

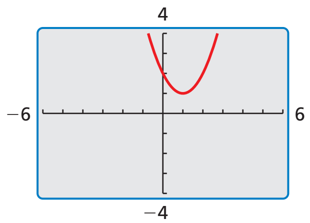
A.



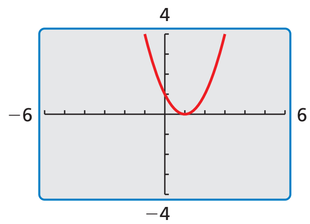
B.



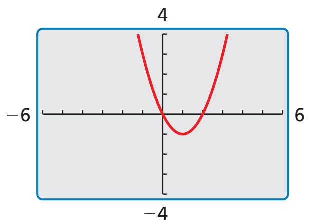
C.



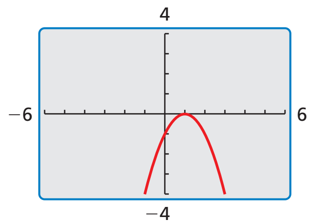
D.



E.



F.



EXPLORACIÓN 2 Resolver ecuaciones cuadráticas

Trabaja con un compañero. Usa los resultados en Exploración 1 para hallar las soluciones reales (de haberlas) para cada ecuación cuadrática.

a. $x^2 - 2x = 0$ **b.** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **c.** $x^2 - 2x + 2 = 0$

d. $-x^2 + 2x = 0$ **e.** $-x^2 + 2x - 1 = 0$ **f.** $-x^2 + 2x - 2 = 0$

DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS

Para dominar las matemáticas, necesitas hacer conjeturas sobre la forma y significado de las soluciones.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes usar la gráfica de una ecuación cuadrática para determinar el número de soluciones reales de la ecuación?

4. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$? ¿Cómo lo sabes? ¿Cuáles son las soluciones?

3.1 Lección

Qué aprenderás

- Resolver ecuaciones cuadráticas haciendo una gráfica.
- Resolver ecuaciones cuadráticas de forma algebraica.
- Resolver problemas de la vida real.

Vocabulario Esencial

ecuación cuadrática en una variable, *pág. 94*
raíz de una ecuación, *pág. 94*
cero de una función, *pág. 96*

Anterior

propiedades de las raíces cuadradas
factorización
racionalizar el denominador

CONSEJO DE ESTUDIO

Las ecuaciones cuadráticas pueden tener cero, una o dos soluciones reales.

Resolver ecuaciones cuadráticas haciendo una gráfica

Una **ecuación cuadrática en una variable** es una ecuación que puede escribirse en forma estándar de $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Una **raíz de una ecuación** es una solución de la ecuación. Puedes usar diversos métodos para resolver las ecuaciones cuadráticas.

Concepto Esencial

Resolver ecuaciones cuadráticas

Haciendo una gráfica Halla las intercepciones con el eje x de la función relacionada $y = ax^2 + bx + c$.

Usando raíces cuadradas Escribe la ecuación en la forma $u^2 = d$, donde u es una expresión algebraica, y resuélvela sacando la raíz cuadrada de cada lado.

Factorizando Escribe la ecuación polinomial $ax^2 + bx + c = 0$ en forma factorizada y resuélvela usando la Propiedad del Producto Cero.

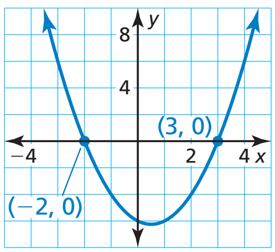
EJEMPLO 1 Resolver ecuaciones cuadráticas haciendo una gráfica

Resuelve cada ecuación haciendo una gráfica.

a. $x^2 - x - 6 = 0$ **b.** $-2x^2 - 2 = 4x$

SOLUCIÓN

a. La ecuación se encuentra en forma estándar. Haz una gráfica de la función relacionada $y = x^2 - x - 6$.



Las intersecciones con el eje x son -2 y 3.

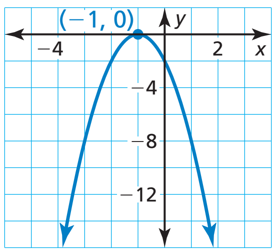
▶ Las soluciones, o raíces, son $x = -2$ y $x = 3$.

Verifica

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(-2)^2 - (-2) - 6 \stackrel{?}{=} 0$$
$$4 + 2 - 6 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$3^2 - 3 - 6 \stackrel{?}{=} 0$$
$$9 - 3 - 6 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

b. Suma $-4x$ a cada lado para obtener $-2x^2 - 4x - 2 = 0$. Haz una gráfica de la función relacionada $y = -2x^2 - 4x - 2$.



La intersección con el eje x es -1.

▶ La solución, o raíz, es $x = -1$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación haciendo una gráfica.

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$ **2.** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **3.** $\frac{1}{2}x^2 = 6x - 20$

Resolver ecuaciones cuadráticas de forma algebraica

Cuando resuelves ecuaciones cuadráticas usando raíces cuadradas puedes usar propiedades de las raíces cuadradas para escribir las soluciones en diferentes formas.

Cuando un radicando en el denominador de una fracción no es un cuadrado perfecto, puedes multiplicar la fracción por una forma apropiada de 1 para eliminar el radical del denominador. Este proceso se llama *racionalizar el denominador.*

EJEMPLO 2 **Resolver ecuaciones cuadráticas usando raíces cuadradas**

Resuelve cada ecuación usando raíces cuadradas.

a. $4x^2 - 31 = 49$ **b.** $3x^2 + 9 = 0$ **c.** $\frac{2}{5}(x+3)^2 = 5$

SOLUCIÓN

a.

$4x^2 - 31 = 49$	Escribe la ecuación.
$4x^2 = 80$	Suma 31 a cada lado.
$x^2 = 20$	Divide cada lado entre 4.
$x = \pm\sqrt{20}$	Saca la raíz cuadrada de cada lado.
$x = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$	Propiedad del producto de raíces cuadradas
$x = \pm 2\sqrt{5}$	Simplifica.

▶ Las soluciones son $x = 2\sqrt{5}$ y $x = -2\sqrt{5}$.

b.

$3x^2 + 9 = 0$	Escribe la ecuación.
$3x^2 = -9$	Resta 9 de cada lado.
$x^2 = -3$	Divide cada lado entre 3.

▶ El cuadrado de un número real no puede ser negativo. Entonces, la ecuación no tiene una solución real.

c.

$\frac{2}{5}(x+3)^2 = 5$	Escribe la ecuación.
$(x+3)^2 = \frac{25}{2}$	Multiplica cada lado por $\frac{5}{2}$.
$x + 3 = \pm\sqrt{\frac{25}{2}}$	Saca la raíz cuadrada de cada lado.
$x = -3 \pm \sqrt{\frac{25}{2}}$	Resta 3 de cada lado.
$x = -3 \pm \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}$	Propiedad del cociente de raíces cuadradas
$x = -3 \pm \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	Multiplicar por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.
$x = -3 \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$	Simplifica.

▶ Las soluciones son $x = -3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ y $x = -3 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Nota que $(x+3)^2 = \frac{25}{2}$ tiene la forma $u^2 = d$, donde $u = x + 3$.

CONSEJO DE ESTUDIO

Dado que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, el valor de $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}$ no cambia cuando lo multiplicas por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación usando raíces cuadradas.

4. $\frac{2}{3}x^2 + 14 = 20$ **5.** $-2x^2 + 1 = -6$ **6.** $2(x-4)^2 = -5$

Cuando el lado izquierdo de $ax^2 + bx + c = 0$ es factorizable puedes resolver la ecuación usando la *Propiedad del producto cero.*

Concepto Esencial

Propiedad del producto cero

Palabras Si el producto de dos expresiones es cero, entonces una o ambas de las expresiones es igual a cero.

Álgebra Si A y B son expresiones y $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación cuadrática factorizando

Resuelve $x^2 - 4x = 45$ factorizando.

SOLUCIÓN

$x^2 - 4x = 45$		Escribe la ecuación.
$x^2 - 4x - 45 = 0$		Escribe en forma estándar.
$(x - 9)(x + 5) = 0$		Factoriza el polinomio.
$x - 9 = 0$	o $\quad x + 5 = 0$	Propiedad del producto cero
$x = 9$	o $\quad x = -5$	Resuelve para hallar x.

▶ Las soluciones son $x = -5$ y $x = 9$.

COMPRENDER LOS TÉRMINOS MATEMÁTICOS

Si un número real k es un cero de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces k es una intersección con el eje x de la gráfica de la función, y k también es una raíz de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Sabes que las intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = a(x - p)(x - q)$ son p y q. Dado que el valor de la función es cero cuando $x = p$ y cuando $x = q$, los números p y q también se llaman ceros de la función. Un **cero de una función** f es un valor de x para el cual $f(x) = 0$.

EJEMPLO 4 Hallar los ceros de una función cuadrática

Halla los ceros de $f(x) = 2x^2 - 11x + 12$.

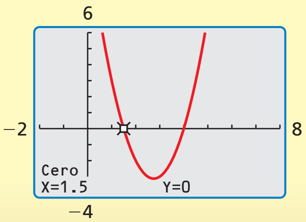
SOLUCIÓN

Para hallar los ceros de la función halla los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

$2x^2 - 11x + 12 = 0$		Coloca $f(x)$ igual a 0.
$(2x - 3)(x - 4) = 0$		Factoriza el polinomio.
$2x - 3 = 0$	o $\quad x - 4 = 0$	Propiedad del producto cero
$x = 1.5$	o $\quad x = 4$	Resuelve para hallar x.

▶ Los ceros de la función son $x = 1.5$ y $x = 4$. Puedes verificarlo haciendo una gráfica de la función. Las intersecciones con el eje x son 1.5 y 4.

Verifica



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación factorizando.

7. $x^2 + 12x + 35 = 0$

8. $3x^2 - 5x = 2$

Halla el(los) cero(s) de la función.

9. $f(x) = x^2 - 8x$

10. $f(x) = 4x^2 + 28x + 49$

Resolver problemas de la vida real

Para hallar el valor máximo o el valor mínimo de una función cuadrática primero puedes factorizar y escribir la función en forma de intersección $f(x) = a(x - p)(x - q)$. Dado que el vértice de la función yace en el eje de simetría, $x = \frac{p + q}{2}$, el valor máximo o el valor mínimo ocurre en el promedio de los ceros p y q.

EJEMPLO 5 Resolver un problema de varios pasos

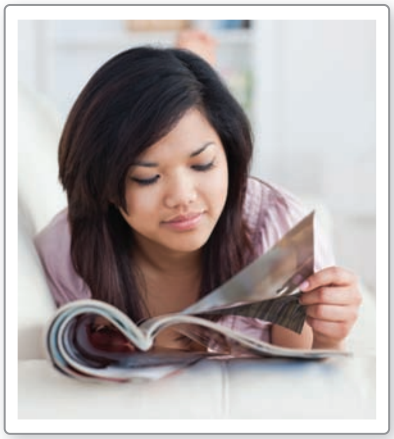
Una revista mensual para adolescentes tiene 48,000 suscriptores cuando cobra $20 por suscripción anual. Por cada aumento de $1 en el precio la revista pierde alrededor de 2000 suscriptores. ¿Cuánto deberá cobrar la revista para maximizar los ingresos anuales? ¿Cuál es el máximo ingreso anual?

SOLUCIÓN

Paso 1 Define las variables. Imagina que x representa el aumento de precio y $R(x)$ representa el ingreso anual.

Paso 2 Escribe un modelo verbal. Luego escribe y simplifica una función cuadrática.

Ingreso anual (dólares)	=	Numero de suscriptores (personas)	•	Precio de suscripción (dólares/persona)



$$R(x) = (48{,}000 - 2000x) \cdot (20 + x)$$
$$R(x) = (-2000x + 48{,}000)(x + 20)$$
$$R(x) = -2000(x - 24)(x + 20)$$

Paso 3 Identifica los ceros y halla sus promedios. Luego halla cuánto debe costar cada suscripción para maximizar el ingreso anual.

Los ceros de la función de ingresos son 24 y -20. El promedio de los ceros es $\frac{24 + (-20)}{2} = 2$.

Para maximizar el ingreso cada suscripción debe costar $20 + $2 = $22.

Paso 4 Halla el ingreso anual máximo.

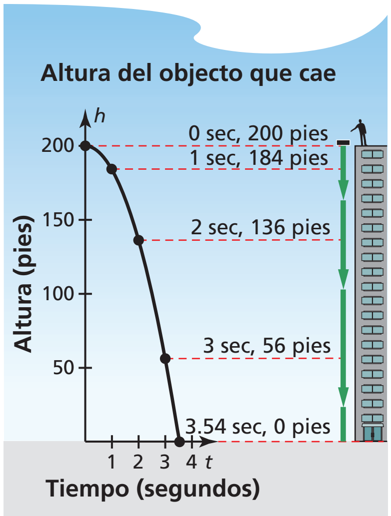
$$R(2) = -2000(2 - 24)(2 + 20) = \$968{,}000$$

▶ Entonces, la revista deberá cobrar $22 por suscripción para maximizar el ingreso anual. El ingreso anual máximo es $968,000.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

11. ¿QUÉ PASA SI? La revista inicialmente cobra $21 por suscripción anual. ¿Cuánto deberá cobrar la revista para maximizar el ingreso anual? ¿Cuál es el máximo ingreso anual?



Cuando cae un objeto, su altura h (en pies) por encima del suelo luego de t segundos puede ser representado por la función $h = -16t^2 + h_0$, donde h_0 es la altura inicial (en pies) del objeto. A la izquierda se muestra la gráfica de $h = -16t^2 + 200$, representando la altura de un objeto que cae de una altura inicial de 200 pies.

El modelo $h = -16t^2 + h_0$ considera que la fuerza de resistencia del aire en el objeto es insignificante. Además, este modelo se aplica únicamente para objetos que caen a la Tierra. Para planetas con fuerzas gravitacionales más fuertes o débiles se usan diferentes modelos.

EJEMPLO 6 Representar un objeto que cae

Para un concurso de ciencias los estudiantes deberán diseñar un contenedor que evite que un huevo se rompa al caer de una altura de 50 pies.

a. Escribe una función que dé la altura h (en pies) del contenedor luego de t segundos. ¿Cuánto tiempo demora el contenedor en llegar al piso?

b. Halla e interpreta $h(1) - h(1.5)$.

SOLUCIÓN

a. La altura inicial es 50, entonces el modelo es $h = -16t^2 + 50$. Halla los ceros de la función.

$h = -16t^2 + 50$	Escribe la función.
$0 = -16t^2 + 50$	Sustituye 0 por h.
$-50 = -16t^2$	Resta 50 de cada lado.
$\dfrac{-50}{-16} = t^2$	Divide cada lado entre -16.
$\pm\sqrt{\dfrac{50}{16}} = t$	Saca la raíz cuadrada de cada lado.
$\pm 1.8 \approx t$	Usa una calculadora.

▶ Rechaza la solución negativa, -1.8, porque el tiempo debe ser positivo. El contenedor caerá alrededor de 1.8 segundos antes de que llegue al suelo.

INTERPRETAR LAS EXPRESIONES

En el modelo para la altura de un objeto caído, el término $-16t^2$ indica que un objeto ha caído $16t^2$ pies luego de t segundos.

b. Halla $h(1)$ y $h(1.5)$. Estas representan las alturas luego de 1 y 1.5 segundos.

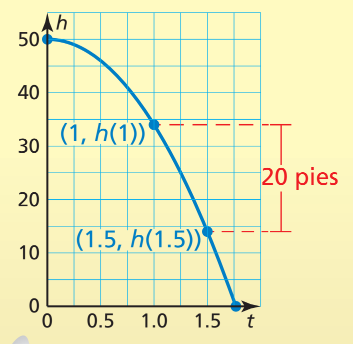
$$h(1) = -16(1)^2 + 50 = -16 + 50 = 34$$

$$h(1.5) = -16(1.5)^2 + 50 = -16(2.25) + 50 = -36 + 50 = 14$$

$$h(1) - h(1.5) = 34 - 14 = 20$$

▶ Entonces, el contendor cayó 20 pies entre 1 y 1.5 segundos. Puedes verificarlo haciendo una gráfica de la función. Los puntos parecen estar a 20 pies de distancia. Entonces, la respuesta es razonable.

Verifica



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

12. ¿QUÉ PASA SI? El contenedor de huevos cae de una altura de 80 pies. ¿Cómo cambia esto tus respuestas en las partes (a) y (b)?

3.1 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Explica cómo usar gráficas para hallar las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

2. **DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** ¿Cuál es diferente? Halla “ambas” respuestas.

¿Cuáles son los ceros de $f(x) = x^2 + 3x - 10$?	¿Cuáles son las soluciones de $x^2 + 3x - 10 = 0$?
¿Cuáles son las raíces de $10 - x^2 = 3x$?	¿Cuál es la intersección con el eje y en la gráfica de $y = (x + 5)(x - 2)$?

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–12, resuelve la ecuación haciendo una gráfica. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $x^2 + 3x + 2 = 0$
4. $-x^2 + 2x + 3 = 0$
5. $0 = x^2 - 9$
6. $-8 = -x^2 - 4$
7. $8x = -4 - 4x^2$
8. $3x^2 = 6x - 3$
9. $7 = -x^2 - 4x$
10. $2x = x^2 + 2$
11. $\frac{1}{5}x^2 + 6 = 2x$
12. $3x = \frac{1}{4}x^2 + 5$

En los Ejercicios 13–20, resuelve la ecuación usando raíces cuadradas. *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $s^2 = 144$
14. $a^2 = 81$
15. $(z - 6)^2 = 25$
16. $(p - 4)^2 = 49$
17. $4(x - 1)^2 + 2 = 10$
18. $2(x + 2)^2 - 5 = 8$
19. $\frac{1}{2}r^2 - 10 = \frac{3}{2}r^2$
20. $\frac{1}{5}x^2 + 2 = \frac{3}{5}x^2$

21. **ANALIZAR RELACIONES** ¿Qué ecuaciones tienen raíces equivalentes a las intersecciones con el eje x en la siguiente gráfica?

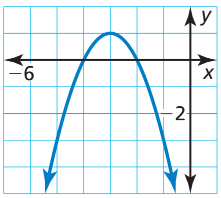
Ⓐ $-x^2 - 6x - 8 = 0$

Ⓑ $0 = (x + 2)(x + 4)$

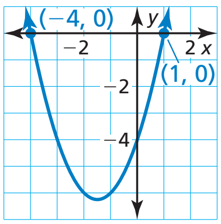
Ⓒ $0 = -(x + 2)^2 + 4$

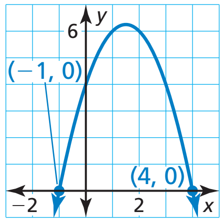
Ⓓ $2x^2 - 4x - 6 = 0$

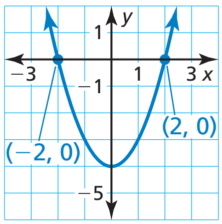
Ⓔ $4(x + 3)^2 - 4 = 0$

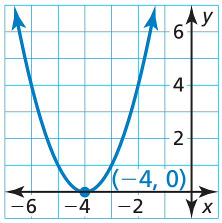


22. **ANALIZAR RELACIONES** ¿Qué gráfica tiene intersecciones con el eje x equivalentes a las raíces de la ecuación $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$? Explica tu razonamiento.

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 23 y 24, describe y corrige el error cometido al resolver la ecuación.**

23. ✗

$$2(x + 1)^2 + 3 = 21$$
$$2(x + 1)^2 = 18$$
$$(x + 1)^2 = 9$$
$$x + 1 = 3$$
$$x = 2$$

24. ✗

$$-2x^2 - 8 = 0$$
$$-2x^2 = 8$$
$$x^2 = -4$$
$$x = \pm 2$$

25. **FINAL ABIERTO** Escribe una ecuación de la forma $x^2 = d$ que tiene (a) dos soluciones reales, (b) una solución real, y (c) ninguna solución real.

26. **ANALIZAR ECUACIONES** ¿Qué ecuación tiene una solución real? Explica.

Ⓐ $3x^2 + 4 = -2(x^2 + 8)$

Ⓑ $5x^2 - 4 = x^2 - 4$

Ⓒ $2(x + 3)^2 = 18$

Ⓓ $\frac{3}{2}x^2 - 5 = 19$

En los Ejercicios 27–34, resuelve la ecuación factorizando. *(Consulta el Ejemplo 3).*

27. $0 = x^2 + 6x + 9$

28. $0 = z^2 - 10z + 25$

29. $x^2 - 8x = -12$

30. $x^2 - 11x = -30$

31. $n^2 - 6n = 0$

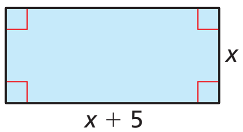
32. $a^2 - 49 = 0$

33. $2w^2 - 16w = 12w - 48$

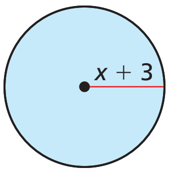
34. $-y + 28 + y^2 = 2y + 2y^2$

CONEXIONES MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 35–38 halla el valor de x.**

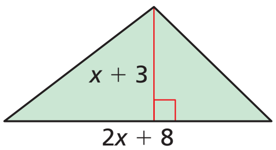
35. Área del rectángulo = 36



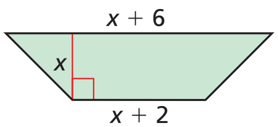
36. Área del círculo = 25π



37. Área del triángulo = 42



38. Área del trapecio = 32



En los Ejercicios 39–46 resuelve la ecuación usando cualquier método. Explica tu razonamiento.

39. $u^2 = -9u$

40. $\frac{t^2}{20} + 8 = 15$

41. $-(x + 9)^2 = 64$

42. $-2(x + 2)^2 = 5$

43. $7(x - 4)^2 - 18 = 10$

44. $t^2 + 8t + 16 = 0$

45. $x^2 + 3x + \frac{5}{4} = 0$

46. $x^2 - 1.75 = 0.5$

En los Ejercicios 47–54, halla el(los) cero(s) de la función. *(Consulta el Ejemplo 4).*

47. $g(x) = x^2 + 6x + 8$

48. $f(x) = x^2 - 8x + 16$

49. $h(x) = x^2 + 7x - 30$

50. $g(x) = x^2 + 11x$

51. $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$

52. $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

53. $g(x) = x^2 + 22x + 121$

54. $h(x) = x^2 + 19x + 84$

55. **RAZONAR** Escribe una función cuadrática en la forma $f(x) = x^2 + bx + c$ que tenga ceros 8 y 11.

56. **SENTIDO NUMÉRICO** Escribe una ecuación cuadrática en forma estándar que tenga raíces equidistantes del 10 en la recta numérica.

57. **RESOLVER PROBLEMAS** Un restaurante vende 330 sándwiches al día. Por cada disminución de \$0.25 en el precio, el restaurante vende alrededor de 15 sándwiches más. ¿Cuánto deberá cobrar el restaurante para maximizar el ingreso diario? ¿Cuál es el máximo ingreso diario? *(Consulta el Ejemplo 5).*

58. **RESOLVER PROBLEMAS** Una tienda de atletismo vende alrededor de 200 pares de zapatillas para básquetbol al mes cuando cobra \$120 por par. Por cada \$2 de aumento en el precio la tienda vende dos pares menos de zapatillas. ¿Cuánto deberá cobrar la tienda para maximizar el ingreso mensual? ¿Cuál es el ingreso mensual?

59. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Las cataratas del Niágara están compuestas por tres cascadas. La altura de la catarata Horseshoe es de alrededor de 188 pies por encima del Río del Niágara que se encuentra más abajo. Cae un tronco desde la parte superior de la catarata Horseshoe. *(Consulta el Ejemplo 6).*

a. Escribe una función que dé la altura h (en pies) del tronco después de t segundos. ¿Cuánto demora el tronco en llegar al río?

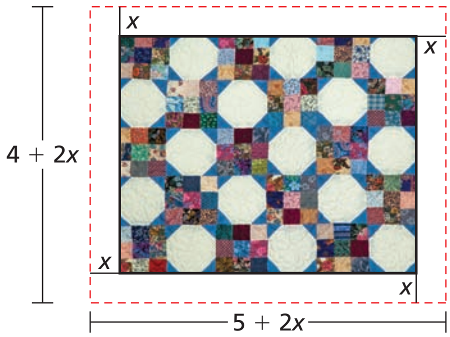
b. Halla e interpreta $h(2) - h(3)$.

60. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** De acuerdo con la leyenda, en 1589, el científico italiano Galileo Galilei dejó caer rocas de diferentes pesos desde el último piso de la Torre Inclinada de Pisa para comprobar sus conjeturas de que las rocas llegarían al suelo al mismo tiempo. La altura h (en pies) de una roca luego de t segundos puede ser representada por $h(t) = 196 - 16t^2$.

a. Halla e interpreta los ceros de la función. Luego usa los ceros para hacer un dibujo de la gráfica.

b. ¿Qué representan el dominio y el rango de la función en esta situación?

61. **RESOLVER PROBLEMAS** Haces un colcha rectangular que mide 5 pies por 4 pies. Usas los 10 pies cuadrados restantes de tela para añadir un borde de ancho uniforme a la colcha. ¿Cuál es el ancho del borde?

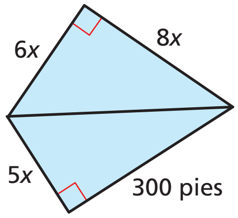


62. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Dejas caer una concha de mar en al océano desde una altura de 40 pies. Escribe una ecuación que represente la altura h (en pies) de la concha por encima del agua después de t segundos. ¿Cuánto tiempo dura la concha en el aire?

63. **ESCRIBIR** La ecuación $h = 0.019s^2$ representa la altura h (en pies) de las olas más grandes del océano cuando la velocidad del viento es de s nudos. Compara las velocidades del viento requeridas para generar olas de 5 pies y olas de 20 pies.

64. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Escribe y resuelve una ecuación para hallar dos números enteros impares consecutivos cuyo producto sea 143.

65. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** Se divide un cuadrilátero en dos triángulos rectángulos como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud de cada lado del cuadrilátero?



66. **RAZONAMIETO ABSTRACTO** Supón que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene una solución real y una gráfica de la función relacionada tiene un vértice que pertenece al segundo cuadrante.

a. ¿El valor a es positivo o negativo? Explica tu razonamiento.

b. Supón que la gráfica es trasladada de manera que el vértice esté en el cuarto cuadrante. ¿La gráfica tiene alguna intersección con el eje x? Explica.

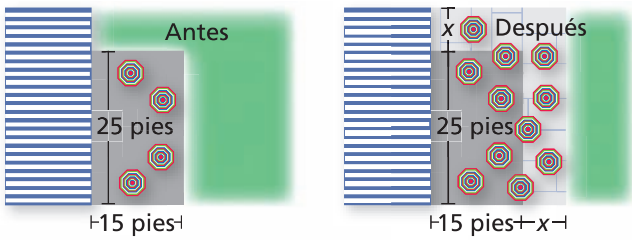
67. **RAZONAR** Cuando un objeto cae en cualquier planeta, su altura h (en pies) después de t segundos puede ser representado por la función $h = -\frac{g}{2}t^2 + h_0$, donde h_0 es la altura inicial del objeto y g es la aceleración del planeta debido a la gravedad. Supón que una roca cae desde la misma altura inicial en los tres planetas que se muestran a continuación. Formula una conjetura sobre qué roca llegará primero al suelo. Justifica tu respuesta.

Tierra: $g = 32$ pies/segundo^2

Júpiter: $g = 76$ pies/segundo^2

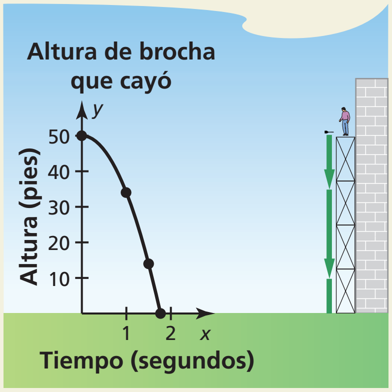
Marte: $g = 12$ pies/segundo^2

68. **RESOLVER PROBLEMAS** Un café tiene un patio rectangular exterior. El dueño quiere añadir 329 pies cuadrados al área del patio expandiendo el patio ya existente como se muestra. Escribe y resuelve una ecuación para hallar el valor de x. ¿Por qué distancia debe el patio ser extendido?



69. **RESOLVER PROBLEMAS** Una pulga puede saltar distancias muy largas. La trayectoria del salto de una pulga puede ser representada por la gráfica de la función $y = -0.189x^2 + 2.462x$, donde x es la distancia horizontal (en pulgadas) y y es la distancia vertical (en pulgadas). Haz una gráfica de la función. Identifica el vértice y los ceros e interpreta sus significados en esta situación.

70. **¿CÓMO LO VES?** Un artista está pintando un mural y deja caer una brocha. La gráfica representa la altura h (en pies) de la brocha después de t segundos.



a. ¿Cuál es la altura inicial de la brocha?

b. ¿Cuánto demora la brocha en llegar al piso? Explica.

71. **ARGUMENTAR** Tu amigo afirma que la ecuación $x^2 + 7x = -49$ se puede resolver factorizando y que tiene una solución de $x = 7$. Tú resuelves la ecuación haciendo una gráfica de la función relacionada y afirmas que no hay solución. ¿Quién tiene la razón? Explica.

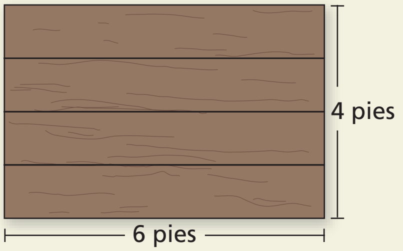
72. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Factoriza las expresiones $x^2 - 4$ y $x^2 - 9$. Recuerda que una expresión en esta forma se llama una diferencia de dos cuadrados. Usa tus respuestas para factorizar la expresión $x^2 - a^2$. Haz una gráfica de la función relacionada $y = x^2 - a^2$. Rotula el vértice, las intersecciones con el eje x, y el eje de simetría.

73. **SACAR CONCLUSIONES** Considera la expresión $x^2 + a^2$, donde $a > 0$.

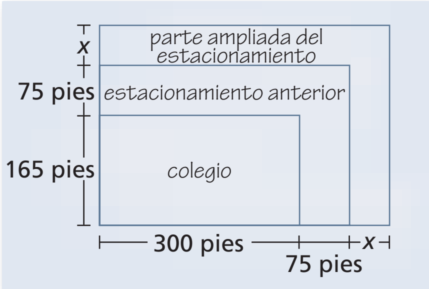
a. Quieres escribir la expresión como $(x + m)(x + n)$. Escribe dos ecuaciones que m y n deben satisfacer.

b. Usa las ecuaciones que escribiste en parte a para resolver para m y n. ¿Cuál es tu conclusión?

74. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Estás rediseñando una balsa rectangular. La balsa tiene 6 pies de largo y 4 pies de ancho. Quieres duplicar el área de la balsa añadiendo al diseño ya existente. Dibuja un diagrama de la nueva balsa. Escribe y resuelve una ecuación que puedas usar para hallar las dimensiones de la nueva balsa.



75. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un colegio de secundaria quiere duplicar el tamaño de su estacionamiento ampliando el existente como se muestra a continuación. ¿En qué distancia x deberá ampliarse el estacionamiento?



Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla la suma o la diferencia. *(Manual de revisión de destrezas)*

76. $(x^2 + 2) + (2x^2 - x)$

77. $(x^3 + x^2 - 4) + (3x^2 + 10)$

78. $(-2x + 1) - (-3x^2 + x)$

79. $(-3x^3 + x^2 - 12x) - (-6x^2 + 3x - 9)$

Halla el producto. *(Manual de revisión de destrezas)*

80. $(x + 2)(x - 2)$

81. $2x(3 - x + 5x^2)$

82. $(7 - x)(x - 1)$

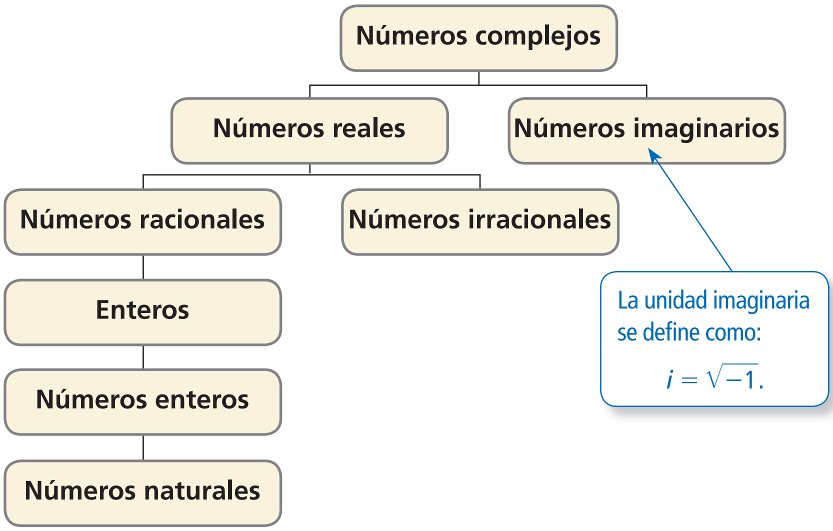
83. $11x(-4x^2 + 3x + 8)$

3.2 Números complejos

Pregunta esencial

¿Cuáles son los subconjuntos del conjunto de números complejos?

Durante tus estudios de matemáticas probablemente has trabajado únicamente con *números reales*, los cuales pueden expresarse gráficamente en la recta de números reales. En esta lección, el sistema de números se ha ampliado para incluir *números imaginarios*. Los números reales e imaginarios componen el conjunto de *números complejos*.



EXPLORACIÓN 1 Clasificar números

Trabaja con un compañero. Determina cuáles de los subconjuntos del conjunto de números complejos contienen cada número.

a. $\sqrt{9}$ **b.** $\sqrt{0}$ **c.** $-\sqrt{4}$

d. $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **e.** $\sqrt{2}$ **f.** $\sqrt{-1}$

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN

Para dominar las matemáticas, necesitas usar definiciones claras en tu razonamiento y debates con otros.

EXPLORACIÓN 2 Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Trabaja con un compañero. Usa la definición de la unidad imaginaria i para unir cada ecuación cuadrática con su solución compleja. Justifica tus respuestas.

a. $x^2 - 4 = 0$ **b.** $x^2 + 1 = 0$ **c.** $x^2 - 1 = 0$

d. $x^2 + 4 = 0$ **e.** $x^2 - 9 = 0$ **f.** $x^2 + 9 = 0$

A. i **B.** $3i$ **C.** 3

D. $2i$ **E.** 1 **F.** 2

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cuáles son los subconjuntos del conjunto de números complejos? Da un ejemplo de un número de cada subconjunto.

4. ¿Es posible que un número sea tanto entero como natural? ¿Natural y racional? ¿Racional e irracional? ¿Real e imaginario? Explica tu razonamiento.

3.2 Lección

Vocabulario Esencial

unidad imaginaria *i*, *pág. 104*
número complejo, *pág. 104*
número imaginario, *pág. 104*
número imaginario puro, pág. 104

Qué aprenderás

- Definir y usar la unidad imaginaria *i*.
- Sumar, restar y multiplicar números complejos.
- Hallar soluciones complejas y ceros.

La unidad imaginaria *i*

No todas las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones en números reales. Por ejemplo, $x^2 = -3$ no tiene soluciones en números reales porque el cuadrado de todo número real nunca será un número negativo.

Para superar este problema, los matemáticos crearon un sistema desarrollado de números usando la **unidad imaginaria *i***, definida como $i = \sqrt{-1}$. Nota que $i^2 = -1$. La unidad imaginaria i puede ser usada para escribir la raíz cuadrada de *cualquier* número negativo.

Concepto Esencial

La raíz cuadrada de un número negativo

Propiedad	Ejemplo
1. Si r es un número real positivo, entonces $\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$.	$\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$
2. En base a la primera propiedad, se deduce que $(i\sqrt{r})^2 = -r$.	$(i\sqrt{3})^2 = i^2 \cdot 3 = -3$

EJEMPLO 1 Hallar la raíz cuadrada de números negativos

Halla la raíz cuadrada de cada número.

a. $\sqrt{-25}$ **b.** $\sqrt{-72}$ **c.** $-5\sqrt{-9}$

SOLUCIÓN

a. $\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$

b. $\sqrt{-72} = \sqrt{72} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} \cdot i = 6\sqrt{2}\, i = 6i\sqrt{2}$

c. $-5\sqrt{-9} = -5\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = -5 \cdot 3 \cdot i = -15i$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla la raíz cuadrada del número.

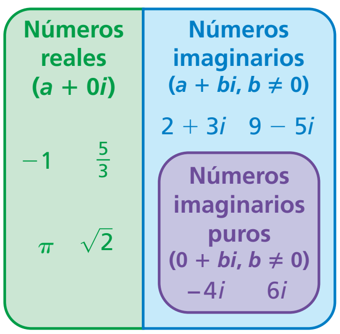
1. $\sqrt{-4}$ **2.** $\sqrt{-12}$ **3.** $-\sqrt{-36}$ **4.** $2\sqrt{-54}$

Un **número complejo** escrito en *forma estándar* es un número $a + bi$ donde a y b son números reales. El número a es la *parte real*, y el número bi es la *parte imaginaria*.

$$a + bi$$

Si $b \neq 0$, entonces $a + bi$ es un **número imaginario**. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $a + bi$ es un **número imaginario puro**. El diagrama muestra cómo se relacionan los diferentes tipos de números complejos.

Números complejos ($a + bi$)



Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$.

EJEMPLO 2 Igualdad de dos números complejos

Halla los valores de x y y que satisfagan la ecuación $2x - 7i = 10 + yi$.

SOLUCIÓN

Iguala las partes reales unas con otras, e iguala las partes imaginarias unas con otras.

$2x = 10$	Iguala las partes reales.	$-7i = yi$	Iguala las partes imaginarias.
$x = 5$	Resuelve para hallar x.	$-7 = y$	Resuelve para hallar y.

▶ Entonces, $x = 5$ y $y = -7$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla los valores de x y y que satisfagan la ecuación.

5. $x + 3i = 9 - yi$

6. $9 + 4yi = -2x + 3i$

Operaciones con números complejos

Concepto Esencial

Sumas y restas de números complejos

Para sumar (o restar) dos números complejos, suma (o resta) sus partes reales y sus partes imaginarias de manera separada.

Suma de números complejos: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Resta de números complejos: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

EJEMPLO 3 Sumar y restar números complejos

Suma o resta. Escribe la respuesta en forma estándar.

a. $(8 - i) + (5 + 4i)$

b. $(7 - 6i) - (3 - 6i)$

c. $13 - (2 + 7i) + 5i$

SOLUCIÓN

a. $(8 - i) + (5 + 4i) = (8 + 5) + (-1 + 4)i$ Definición de suma compleja

$= 13 + 3i$ Escribe en forma estándar.

b. $(7 - 6i) - (3 - 6i) = (7 - 3) + (-6 + 6)i$ Definición de resta compleja

$= 4 + 0i$ Simplifica.

$= 4$ Escribe en forma estándar.

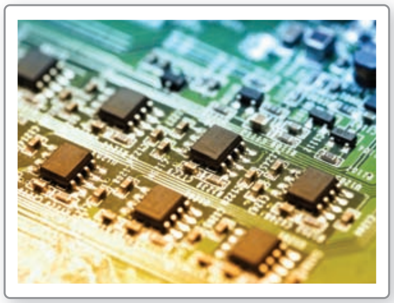
c. $13 - (2 + 7i) + 5i = [(13 - 2) - 7i] + 5i$ Definición de resta compleja

$= (11 - 7i) + 5i$ Simplifica.

$= 11 + (-7 + 5)i$ Definición de suma compleja

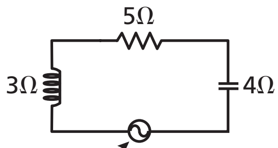
$= 11 - 2i$ Escribe en forma estándar.

EJEMPLO 4 Resolver un problema de la vida real



Los componentes del circuito eléctrico, como resistores, inductores y capacitores se oponen al flujo de la corriente. Para los resistores, esta oposición se llama *resistencia*, y para los inductores y capacitores se llama *reactancia*. Cada una de estas cantidades se mide en ohmios. El símbolo usado para ohmios es Ω, la letra griega omega en mayúscula.

Componente y símbolo	Resitencia	Inductor	Capacitor
Resistencia o reactancia (ohmios)	R	L	C
Impedancia (ohmios)	R	Li	$-Ci$



La tabla muestra la relación entre la resistencia o reactancia del componente y su contribución a la impedancia. También se muestra un circuito en serie con la resistencia o reactancia de cada componente rotulado. La impedancia para el circuito en serie es la suma de las impedancias de los componentes individuales. Halla la impedancia del circuito.

SOLUCIÓN

El resistor tiene una resistencia de 5 ohmios, de manera que su impedancia es de 5 ohmios. El inductor tiene una reactancia de 3 ohmios por lo que su impedancia es de $3i$ ohmios. El capacitor tiene una reactancia de 4 ohmios, entonces su reactancia es de $-4i$ ohmios.

La impedancia del circuito $= 5 + 3i + (-4i) = 5 - i$

▶ La impedancia del circuito es $(5 - i)$ ohmios.

Para multiplicar dos números complejos usa la Propiedad Distributiva, o el método FOIL tal como haces cuando multiplicas números reales o expresiones algebraicas.

EJEMPLO 5 Multiplicar números complejos

Multiplica. Escribe la respuesta en forma estándar.

a. $4i(-6 + i)$ **b.** $(9 - 2i)(-4 + 7i)$

SOLUCIÓN

a. $4i(-6 + i) = -24i + 4i^2$ Propiedad distributiva

$= -24i + 4(-1)$ Usa $i^2 = -1$.

$= -4 - 24i$ Escribe en forma estándar.

b. $(9 - 2i)(-4 + 7i) = -36 + 63i + 8i - 14i^2$ Multiplica usando el método FOIL.

$= -36 + 71i - 14(-1)$ Simplica y usa $i^2 = -1$.

$= -36 + 71i + 14$ Simplica.

$= -22 + 71i$ Escribe en forma estándar.

CONSEJO DE ESTUDIO

Cuando simplifiques una expresión que incluye números complejos asegúrate de simplificar i^2 como -1.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

7. ¿QUÉ PASA SI? En el Ejemplo 4, ¿cuál es la impedancia del circuito cuando el capacitor es reemplazado con uno cuya reactancia es de 7 ohmios?

Realiza la operación. Escribe la respuesta en forma estándar.

8. $(9 - i) + (-6 + 7i)$ **9.** $(3 + 7i) - (8 - 2i)$ **10.** $-4 - (1 + i) - (5 + 9i)$

11. $(-3i)(10i)$ **12.** $i(8 - i)$ **13.** $(3 + i)(5 - i)$

Soluciones complejas y ceros

EJEMPLO 6 **Resolver ecuaciones cuadráticas**

Resuelve (a) $x^2 + 4 = 0$ y (b) $2x^2 - 11 = -47$.

SOLUCIÓN

a. $x^2 + 4 = 0$ — Escribe la ecuación original.

$x^2 = -4$ — Resta 4 de cada lado.

$x = \pm\sqrt{-4}$ — Saca raíz cuadradas de cada lado.

$x = \pm 2i$ — Escribe en términos de *i*.

▶ Las soluciones son $2i$ y $-2i$.

b. $2x^2 - 11 = -47$ — Escribe la ecuación original.

$2x^2 = -36$ — Suma 11 a cada lado.

$x^2 = -18$ — Divide cada lado entre 2.

$x = \pm\sqrt{-18}$ — Saca raíz cuadradas de cada lado.

$x = \pm i\sqrt{18}$ — Escribe en términos de *i*.

$x = \pm 3i\sqrt{2}$ — Simplifica el radical.

▶ Las soluciones son $3i\sqrt{2}$ y $-3i\sqrt{2}$.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Nota que puedes usar las soluciones en el Ejemplo 6(a) para factorizar $x^2 + 4$ como $(x + 2i)(x - 2i)$.

EJEMPLO 7 **Hallar los ceros de una función cuadrática**

Halla los ceros de $f(x) = 4x^2 + 20$.

SOLUCIÓN

$4x^2 + 20 = 0$ — Coloca $f(x)$ igual a 0.

$4x^2 = -20$ — Resta 20 de cada lado.

$x^2 = -5$ — Divide cada lado entre 4.

$x = \pm\sqrt{-5}$ — Saca raíz cuadradas de cada lado.

$x = \pm i\sqrt{5}$ — Escribe en términos de *i*.

▶ Entonces, los ceros de *f* son $i\sqrt{5}$ y $-i\sqrt{5}$.

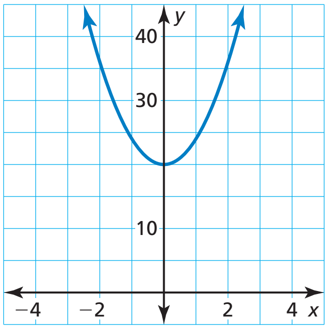
Verifica

$f(i\sqrt{5}) = 4(i\sqrt{5})^2 + 20 = 4 \cdot 5i^2 + 20 = 4(-5) + 20 = 0$ ✓

$f(-i\sqrt{5}) = 4(-i\sqrt{5})^2 + 20 = 4 \cdot 5i^2 + 20 = 4(-5) + 20 = 0$ ✓

HALLAR UN PUNTO DE ENTRADA

La gráfica de *f* no se interseca con el eje *x*. Esto significa que *f* no tiene ceros reales. Entonces, *f* debe tener ceros complejos que puedes encontrar de forma algebraica.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación.

14. $x^2 = -13$ **15.** $x^2 = -38$ **16.** $x^2 + 11 = 3$

17. $x^2 - 8 = -36$ **18.** $3x^2 - 7 = -31$ **19.** $5x^2 + 33 = 3$

Halla los ceros de la función.

20. $f(x) = x^2 + 7$ **21.** $f(x) = -x^2 - 4$ **22.** $f(x) = 9x^2 + 1$

3.2 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. VOCABULARIO ¿Cómo se define la unidad imaginaria iy cómo puedes usarla?

2. COMPLETAR LA ORACIÓN Para los números complejos $5 + 2i$, la parte imaginaria es ____ y la parte real es ____.

3. ESCRIBIR Describe cómo sumar números complejos.

4. ¿CUÁL NO CORRESPONDE? ¿Cuál de los siguientes números no corresponde al grupo de los otros tres? Explica tu razonamiento.

$3 + 0i$ $\quad$ $2 + 5i$ $\quad$ $\sqrt{3} + 6i$ $\quad$ $0 - 7i$

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–12, halla la raíz cuadrada del número. *(Consulta el Ejemplo 1).*

5. $\sqrt{-36}$ **6.** $\sqrt{-64}$

7. $\sqrt{-18}$ **8.** $\sqrt{-24}$

9. $2\sqrt{-16}$ **10.** $-3\sqrt{-49}$

11. $-4\sqrt{-32}$ **12.** $6\sqrt{-63}$

En los Ejercicios 13–20, halla los valores de x y y que satisfagan la ecuación. *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $4x + 2i = 8 + yi$

14. $3x + 6i = 27 + yi$

15. $-10x + 12i = 20 + 3yi$

16. $9x - 18i = -36 + 6yi$

17. $2x - yi = 14 + 12i$

18. $-12x + yi = 60 - 13i$

19. $54 - \frac{1}{7}yi = 9x - 4i$

20. $15 - 3yi = \frac{1}{2}x + 2i$

En los Ejercicios 21–30, suma o resta. Escribe la respuesta en forma estándar. *(Consulta el Ejemplo 3).*

21. $(6 - i) + (7 + 3i)$ **22.** $(9 + 5i) + (11 + 2i)$

23. $(12 + 4i) - (3 - 7i)$ **24.** $(2 - 15i) - (4 + 5i)$

25. $(12 - 3i) + (7 + 3i)$ **26.** $(16 - 9i) - (2 - 9i)$

27. $7 - (3 + 4i) + 6i$ **28.** $16 - (2 - 3i) - i$

29. $-10 + (6 - 5i) - 9i$ **30.** $-3 + (8 + 2i) + 7i$

31. USAR LA ESTRUCTURA Escribe cada expresión como un número complejo en forma estándar.

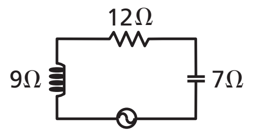
a. $\sqrt{-9} + \sqrt{-4} - \sqrt{16}$

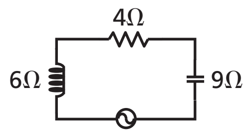
b. $\sqrt{-16} + \sqrt{8} + \sqrt{-36}$

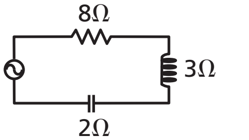
32. RAZONAR El inverso aditivo de un número complejo z es un número complejo z_a, de tal forma que $z + z_a = 0$. Halla el inverso aditivo de cada número complejo.

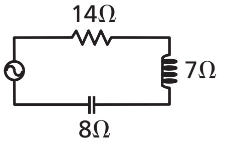
a. $z = 1 + i$ **b.** $z = 3 - i$ **c.** $z = -2 + 8i$

En los Ejercicios 33–36, halla la impedancia del circuito en serie. *(Consulta el Ejemplo 4).*

33.


34.


35.


36.


En los Ejercicios 37–44, multiplica. Escribe la respuesta en forma estándar. *(Consulta el Ejemplo 5).*

37. $3i(-5 + i)$

38. $2i(7 - i)$

39. $(3 - 2i)(4 + i)$

40. $(7 + 5i)(8 - 6i)$

41. $(4 - 2i)(4 + 2i)$

42. $(9 + 5i)(9 - 5i)$

43. $(3 - 6i)^2$

44. $(8 + 3i)^2$

JUSTIFICAR LOS PASOS **En los Ejercicios 45 y 46, justifica cada paso al hacer la operación.**

45. $11 - (4 + 3i) + 5i$

$= [(11 - 4) - 3i] + 5i$

$= (7 - 3i) + 5i$

$= 7 + (-3 + 5)i$

$= 7 + 2i$

46. $(3 + 2i)(7 - 4i)$

$= 21 - 12i + 14i - 8i^2$

$= 21 + 2i - 8(-1)$

$= 21 + 2i + 8$

$= 29 + 2i$

RAZONAR **En los Ejercicios 47 y 48, coloca las fichas en la expresión para formar un enunciado verdadero.**

47. $(\_\_\_\_ - \_\_\_\_i) - (\_\_\_\_ - \_\_\_\_i) = 2 - 4i$

7 4 3 6

48. $\_\_\_\_i(\_\_\_\_ + \_\_\_\_i) = -18 - 10i$

−5 9 2

En los Ejercicios 49–54, resuelve la ecuación. Verifica tu(s) respuesta(s). *(Consulta el Ejemplo 6).*

49. $x^2 + 9 = 0$

50. $x^2 + 49 = 0$

51. $x^2 - 4 = -11$

52. $x^2 - 9 = -15$

53. $2x^2 + 6 = -34$

54. $x^2 + 7 = -47$

En los Ejercicios 55–62, halla los ceros de la función. *(Consulta el Ejemplo 7).*

55. $f(x) = 3x^2 + 6$

56. $g(x) = 7x^2 + 21$

57. $h(x) = 2x^2 + 72$

58. $k(x) = -5x^2 - 125$

59. $m(x) = -x^2 - 27$

60. $p(x) = x^2 + 98$

61. $r(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 24$

62. $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 - 10$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 63 y 64 describe y corrige el error cometido al hacer la operación y escribe la respuesta en forma estándar.**

63.
$$\begin{aligned}(3 + 2i)(5 - i) &= 15 - 3i + 10i - 2i^2\\ &= 15 + 7i - 2i^2\\ &= -2i^2 + 7i + 15\end{aligned}$$

64.
$$\begin{aligned}(4 + 6i)^2 &= (4)^2 + (6i)^2\\ &= 16 + 36i^2\\ &= 16 + (36)(-1)\\ &= -20\end{aligned}$$

65. **SENTIDO NUMÉRICO** Simplifica cada expresión. Luego, clasifica tus respuestas en la tabla a continuación.

a. $(-4 + 7i) + (-4 - 7i)$

b. $(2 - 6i) - (-10 + 4i)$

c. $(25 + 15i) - (25 - 6i)$

d. $(5 + i)(8 - i)$

e. $(17 - 3i) + (-17 - 6i)$

f. $(-1 + 2i)(11 - i)$

g. $(7 + 5i) + (7 - 5i)$

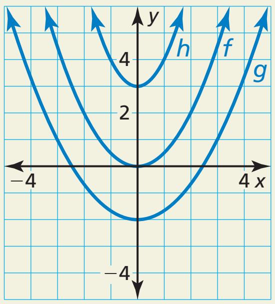
h. $(-3 + 6i) - (-3 - 8i)$

Números reales	Números imaginarios	Números imaginarios puros

66. **ARGUMENTAR** La Propiedad del producto de raíces cuadrados indica que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Tu amigo concluye que $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$. ¿Tiene razón tu amigo? Explica.

67. **HALLAR UN PATRÓN** Haz una tabla que muestre las potencias de i desde i^1 hasta i^8 en la primera fila y las formas simplificadas de dichas potencias en la segunda fila. Describe el patrón que observas en la tabla. Comprueba que el patrón continúa al evaluar las siguientes cuatro potencias de i.

68. **¿CÓMO LO VES?** Se muestran las gráficas de tres funciones. ¿Qué función(es) tiene(n) ceros reales? ¿Ceros imaginarios? Explica tu razonamiento.



En los Ejercicios 69–74, escribe la expresión como un número complejo en forma estándar.

69. $(3 + 4i) - (7 - 5i) + 2i(9 + 12i)$

70. $3i(2 + 5i) + (6 - 7i) - (9 + i)$

71. $(3 + 5i)(2 - 7i^4)$

72. $2i^3(5 - 12i)$

73. $(2 + 4i^5) + (1 - 9i^6) - (3 + i^7)$

74. $(8 - 2i^4) + (3 - 7i^8) - (4 + i^9)$

75. **FINAL ABIERTO** Halla dos números imaginarios cuya suma y producto sean números reales. ¿Cómo se relacionan los números imaginarios?

76. **COMPARAR MÉTODOS** Describe los dos métodos diferentes mostrados para escribir la expresión compleja en la forma estándar. ¿Qué métodos prefieres? Explica.

Método 1

$$\begin{aligned} 4i(2 - 3i) + 4i(1 - 2i) &= 8i - 12i^2 + 4i - 8i^2 \\ &= 8i - 12(-1) + 4i - 8(-1) \\ &= 20 + 12i \end{aligned}$$

Método 2

$$\begin{aligned} 4i(2 - 3i) + 4i(1 - 2i) &= 4i[(2 - 3i) + (1 - 2i)] \\ &= 4i[3 - 5i] \\ &= 12i - 20i^2 \\ &= 12i - 20(-1) \\ &= 20 + 12i \end{aligned}$$

77. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Determina si cada enunciado es *verdadero* o *falso*. Si es verdadero, da un ejemplo. Si es falso, da un contra ejemplo.

a. La suma de dos números imaginarios es un número imaginario.

b. El producto de dos números imaginarios puros es un número real.

c. Un número imaginario puro es un número imaginario.

d. Un número complejo es un número real.

78. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Crea un circuito que tenga una impedancia de $14 - 3i$.

Mantener el dominio de las matemáticas

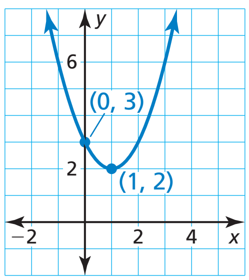
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Determina si el valor dado de x es una solución a la ecuación. *(Manual de revisión de destrezas)*

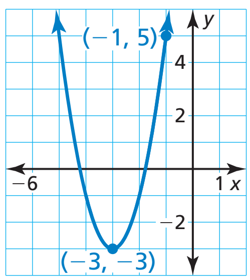
79. $3(x - 2) + 4x - 1 = x - 1;\ x = 1$ **80.** $x^3 - 6 = 2x^2 + 9 - 3x;\ x = -5$ **81.** $-x^2 + 4x = \frac{19}{3}x^2;\ x = -\frac{3}{4}$

Escribe una ecuación cuadrática en forma de vértice cuya gráfica se muestra a continuación. *(Sección 2.4)*

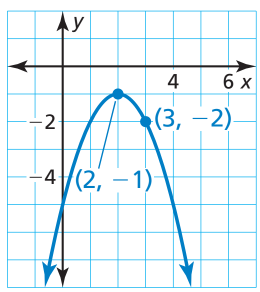
82.



83.



84.



3.3 Completar el cuadrado

Pregunta esencial

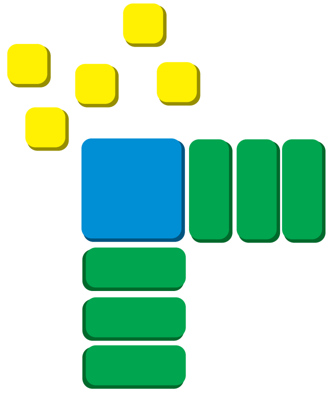
¿Cómo puedes completar el cuadrado de una expresión cuadrática?

EXPLORACIÓN 1 Usar fichas de álgebra para completar el cuadrado

Trabaja con un compañero. Usa las fichas de álgebra para completar el cuadrado para la expresión

$x^2 + 6x.$

a. Puedes representar $x^2 + 6x$ usando una ficha de x^2 y seis fichas de x. Ordena las fichas en un cuadrado. Tu agrupación estará incompleta en una de las esquinas.



b. ¿Cuántas fichas de 1 necesitas para completar el cuadrado?

c. Halla el valor de c de manera que la expresión

$x^2 + 6x + c$

sea un trinomio cuadrado perfecto.

d. Escribe la expresión de la parte (c) como el cuadrado de un binomio.

EXPLORACIÓN 2 Sacar conclusiones

Trabaja con un compañero.

a. Usa el método descrito en la Exploración 1 para completar la tabla.

Expresión	Valor de c necesario para completar el cuadrado	Expresión escrita como un binomio al cuadrado
$x^2 + 2x + c$		
$x^2 + 4x + c$		
$x^2 + 8x + c$		
$x^2 + 10x + c$		

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Para dominar las matemáticas, necesitas observar de cerca para discernir un patrón o estructura.

b. Busca patrones en la última columna de la tabla. Considera $x^2 + bx + c = (x + d)^2$ como un enunciado general. ¿Cómo se relacionan d y b en cada caso? ¿Cómo se relacionan c y d en cada caso?

c. ¿Cómo obtienes los valores de la segunda columna directamente de los coeficientes de x de la primera columna?

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes completar el cuadrado de una expresión cuadrática?

4. Describe cómo puedes resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 6x = 1$ al completar el cuadrado.

3.3 Lección

Vocabulario Esencial

completar el cuadrado, *pág. 112*

Anterior

trinomio cuadrado perfecto

forma de vértice

Qué aprenderás

- Resolver ecuaciones cuadráticas usando raíces cuadradas.
- Resolver ecuaciones cuadráticas al completar el cuadrado.
- Escribir funciones cuadráticas en forma de vértice.

Resolver ecuaciones cuadráticas usando raíces cuadradas

Anteriormente has resuelto ecuaciones de la forma $u^2 = d$ sacando la raíz cuadrada de cada lado. Este método también funciona cuando un lado de una ecuación es un trinomio cuadrado perfecto y el otro lado es una constante.

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación cuadrática usando raíces cuadradas

Resuelve $x^2 - 16x + 64 = 100$ usando raíces cuadradas.

SOLUCIÓN

$x^2 - 16x + 64 = 100$	Escribe la ecuación.
$(x - 8)^2 = 100$	Escribe el lado izquierdo como un binomio al cuadrado.
$x - 8 = \pm 10$	Saca la raíz cuadrada de cada lado.
$x = 8 \pm 10$	Suma 8 a cada lado.

- Entonces, las soluciones son $x = 8 + 10 = 18$ y $x = 8 - 10 = -2$.

OTRA MANERA

También puedes resolver la ecuación al escribirla en forma estándar como $x^2 - 16x - 36 = 0$ y factorizarla.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación usando raíces cuadradas. Verifica tu(s) solución(es).

1. $x^2 + 4x + 4 = 36$ **2.** $x^2 - 6x + 9 = 1$ **3.** $x^2 - 22x + 121 = 81$

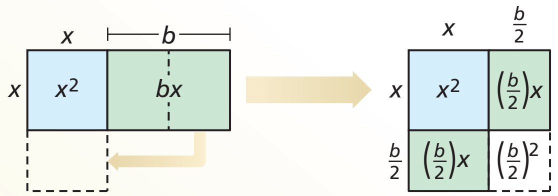
En el ejemplo 1, la expresión $x^2 - 16x + 64$ es un trinomio cuadrado perfecto porque es igual a $(x - 8)^2$. A veces necesitas sumar un término a una expresión $x^2 + bx$ para convertirla en un trinomio cuadrado perfecto. Este proceso se llama **completar el cuadrado.**

Concepto Esencial

Completar el cuadrado

Palabras Para completar el cuadrado de la expresión $x^2 + bx$, suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Diagramas En cada diagrama, el área combinada de las regiones sombreadas es $x^2 + bx$. Sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ completa el cuadrado en el segundo diagrama.



Álgebra $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2}\right) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

Resolver ecuaciones cuadráticas al completar el cuadrado

EJEMPLO 2 Hacer un trinomio cuadrado perfecto

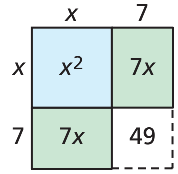
Halla el valor de c que hace a $x^2 + 14x + c$ un trinomio cuadrado perfecto. Luego, escribe la expresión como el cuadrado de un binomio.

SOLUCIÓN

Paso 1 Halla la mitad del coeficiente de x. $\frac{14}{2} = 7$

Paso 2 Eleva el resultado del Paso 1 al cuadrado. $7^2 = 49$

Paso 3 Reemplaza c con el resultado del Paso 2. $x^2 + 14x + 49$



▶ La expresión $x^2 + 14x + c$ es un trinomio cuadrado perfecto cuando $c = 49$. Entonces, $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)(x + 7) = (x + 7)^2$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla el valor de c que hace a la expresión un trinomio cuadrado perfecto. Luego, escribe la expresión como el cuadrado de un binomio.

4. $x^2 + 8x + c$ **5.** $x^2 - 2x + c$ **6.** $x^2 - 9x + c$

El método de completar el cuadrado puede usarse para resolver *cualquier* ecuación cuadrática. Cuando completes el cuadrado como parte de resolver una ecuación, deberás sumar el mismo número a *ambos* lados de la ecuación.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Nota que no podrás resolver la ecuación factorizando porque $x^2 - 10x + 7$ no es factorizable como un producto de binomios.

EJEMPLO 3 Resolver $ax^2 + bx + c = 0$ cuando $a = 1$

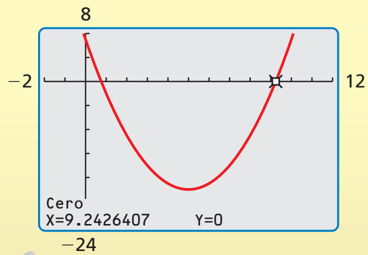
Resuelve $x^2 - 10x + 7 = 0$ al completar el cuadrado.

SOLUCIÓN

$x^2 - 10x + 7 = 0$	Escribe la ecuación.
$x^2 - 10x = -7$	Escribe el lado izquierdo en la forma $x^2 + bx$.
$x^2 - 10x + 25 = -7 + 25$	Suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-10}{2}\right)^2 = 25$ a cado lado.
$(x - 5)^2 = 18$	Escribe el lado izquierdo como un binomio al cuadrado.
$x - 5 = \pm\sqrt{18}$	Saca la raíz cuadrada de cada lado.
$x = 5 \pm\sqrt{18}$	Suma 5 a cada lado.
$x = 5 \pm 3\sqrt{2}$	Simplifica el radical.

▶ Las soluciones son $x = 5 + 3\sqrt{2}$ y $x = 5 - 3\sqrt{2}$. Verifícalas haciendo una gráfica de $y = x^2 - 10x + 7$. Las intersecciones con el eje x son aproximadamente $9.24 \approx 5 + 3\sqrt{2}$ y $0.76 \approx 5 - 3\sqrt{2}$.

Verifica



EJEMPLO 4 Resolver $ax^2 + bx + c = 0$ cuando $a \neq 1$

Resuelve $3x^2 + 12x + 15 = 0$ al completar el cuadrado.

SOLUCIÓN

El coeficiente a no es 1, de manera que primero deberás dividir cada lado de la ecuación entre a.

$3x^2 + 12x + 15 = 0$	Escribe la ecuación.
$x^2 + 4x + 5 = 0$	Divide cada lado entre 3.
$x^2 + 4x = -5$	Escribe el lado izquierdo en la forma de $x^2 + bx$.
$x^2 + 4x + 4 = -5 + 4$	Suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ a cada lado.
$(x + 2)^2 = -1$	Escribe el lado izquierdo como un binomio al cuadrado.
$x + 2 = \pm\sqrt{-1}$	Sace la raíz cuadrada de cada lado.
$x = -2 \pm \sqrt{-1}$	Resta 2 de cada lado.
$x = -2 \pm i$	Escribe en términos de i.

▶ Las soluciones son $x = -2 + i$ y $x = -2 - i$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación al completar el cuadrado.

7. $x^2 - 4x + 8 = 0$ **8.** $x^2 + 8x - 5 = 0$ **9.** $-3x^2 - 18x - 6 = 0$

10. $4x^2 + 32x = -68$ **11.** $6x(x + 2) = -42$ **12.** $2x(x - 2) = 200$

Escribir funciones cuadráticas en forma de vértice

Recuerda que la forma de vértice de una función cuadrática es $y = a(x - h)^2 + k$, donde (h, k) es el vértice de la gráfica de la función. Puedes escribir una función cuadrática en la forma de vértice al completar el cuadrado.

EJEMPLO 5 Escribir una función cuadrática en forma de vértice

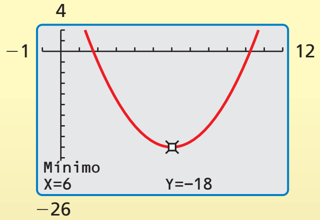
Escribe $y = x^2 - 12x + 18$ en forma de vértice. Luego, identifica el vértice.

SOLUCIÓN

$y = x^2 - 12x + 18$	Escribe la función.
$y + ? = (x^2 - 12x + ?) + 18$	Prepara para completar el cuadrado.
$y + 36 = (x^2 - 12x + 36) + 18$	Suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-12}{2}\right)^2 = 36$ a cada lado.
$y + 36 = (x - 6)^2 + 18$	Escribe $x^2 - 12x + 36$ como un binomio al cuadrado.
$y = (x - 6)^2 - 18$	Resuelve para hallar y.

▶ La forma de vértice de la función es $y = (x - 6)^2 - 18$. El vértice es $(6, -18)$.

Verifica



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe la función cuadrática en forma de vértice. Luego, identifica el vértice.

13. $y = x^2 - 8x + 18$ **14.** $y = x^2 + 6x + 4$ **15.** $y = x^2 - 2x - 6$

EJEMPLO 6 Representar con matemáticas

La altura y (en pies) de una pelota de béisbol t segundos después de haber sido bateada puede ser representada por la función

$$y = -16t^2 + 96t + 3.$$

Halla la altura máxima de la pelota de béisbol. ¿Cuánto tiempo demora la pelota en llegar al suelo?

SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Te dan una función cuadrática que representa la altura de una pelota. Se te pide determinar la altura máxima de la pelota y cuánto tiempo permanece en el aire.
2. **Haz un plan** Escribe la función en forma en vértice para identificar la altura máxima. Luego, halla e interpreta los ceros para determinar cuánto tiempo demora la pelota en llegar al suelo.
3. **Resuelve el problema** Escribe la función en forma en vértice al completar el cuadrado.

$y = -16t^2 + 96t + 3$	Escribe la función.
$y = -16(t^2 - 6t) + 3$	Factoriza -16 de los dos primeros términos.
$y + ? = -16(t^2 - 6t + ?) + 3$	Prepara para completar el cuadrado.
$y + (-16)(9) = -16(t^2 - 6t + 9) + 3$	Suma $(-16)(9)$ a cada lado.
$y - 144 = -16(t - 3)^2 + 3$	Escribe $t^2 - 6t + 9$ como un binomio al cuadrado.
$y = -16(t - 3)^2 + 147$	Resuelve para hallar y.

OTRA MANERA

Puedes usar los coeficientes de la función original $y = f(x)$ para hallar la altura máxima.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{96}{2(-16)}\right)$$
$$= f(3)$$
$$= 147$$

El vértice es (3, 147). Halla los ceros de la función.

$0 = -16(t - 3)^2 + 147$	Sustituye 0 por y.
$-147 = -16(t - 3)^2$	Resta 147 de cada lado.
$9.1875 = (t - 3)^2$	Divide cada lado entre -16.
$\pm\sqrt{9.1875} = t - 3$	Saca la raíz cuadrada de cada lado.
$3 \pm \sqrt{9.1875} = t$	Suma 3 a cada lado.

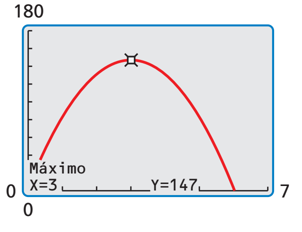
BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Podrías escribir los ceros como $3 \pm \frac{7\sqrt{3}}{4}$, pero es más fácil reconocer que $3 - \sqrt{9.1875}$ es negativo porque $\sqrt{9.1875}$ es mayor que 3.

Rechaza la solución negativa, $3 - \sqrt{9.1875} \approx -0.03$, porque el tiempo debe ser positivo.

▶ Entonces, la altura máxima de la pelota es 147 pies, y demora $3 + \sqrt{9.1875} \approx 6$ segundos para llegar al suelo.

4. **Verifícalo** El vértice indica que la altura máxima de 147 pies ocurre cuando $t = 3$. Esto tiene sentido porque la gráfica de la función es parabólica con ceros cercanos a $t = 0$ y $t = 6$. Puedes usar una gráfica para verificar la altura máxima.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

16. ¿QUÉ PASA SI? La altura de la pelota de béisbol puede ser representada por $y = -16t^2 + 80t + 2$. Halla la altura máxima de la pelota de béisbol. ¿Cuánto tiempo demora en llegar al suelo?

3.3 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** ¿Qué debes sumar a la expresión $x^2 + bx$ para completar el cuadrado?

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** El trinomio $x^2 - 6x + 9$ es un ____ porque equivale a ____.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

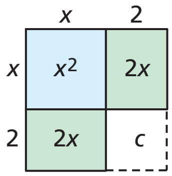
En los Ejercicios 3–10, resuelve la ecuación usando raíces cuadradas. Verifica tu(s) solución(es). *(Consulta el Ejemplo 1).*

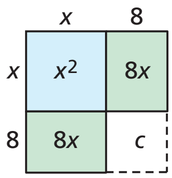
3. $x^2 - 8x + 16 = 25$
4. $r^2 - 10r + 25 = 1$
5. $x^2 - 18x + 81 = 5$
6. $m^2 + 8m + 16 = 45$
7. $y^2 - 24y + 144 = -100$
8. $x^2 - 26x + 169 = -13$
9. $4w^2 + 4w + 1 = 75$
10. $4x^2 - 8x + 4 = 1$

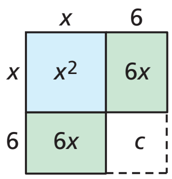
En los Ejercicios 11–20, halla el valor de c que hace que la expresión sea un trinomio cuadrado perfecto. Luego, escribe la expresión como el cuadrado de un binomio. *(Consulta el Ejemplo 2).*

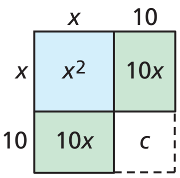
11. $x^2 + 10x + c$
12. $x^2 + 20x + c$
13. $y^2 - 12y + c$
14. $t^2 - 22t + c$
15. $x^2 - 6x + c$
16. $x^2 + 24x + c$
17. $z^2 - 5z + c$
18. $x^2 + 9x + c$
19. $w^2 + 13w + c$
20. $s^2 - 26s + c$

En los Ejercicios 21–24, halla el valor de c. Luego escribe una expresión representada por un diagrama.

21.


22.


23.


24.


En los Ejercicios 25–36, resuelve la ecuación al completar el cuadrado. *(Consulta los Ejemplos 3 y 4).*

25. $x^2 + 6x + 3 = 0$
26. $s^2 + 2s - 6 = 0$
27. $x^2 + 4x - 2 = 0$
28. $t^2 - 8t - 5 = 0$
29. $z(z + 9) = 1$
30. $x(x + 8) = -20$
31. $7t^2 + 28t + 56 = 0$
32. $6r^2 + 6r + 12 = 0$
33. $5x(x + 6) = -50$
34. $4w(w - 3) = 24$
35. $4x^2 - 30x = 12 + 10x$
36. $3s^2 + 8s = 2s - 9$

37. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al resolver la ecuación.

$$4x^2 + 24x - 11 = 0$$
$$4(x^2 + 6x) = 11$$
$$4(x^2 + 6x + 9) = 11 + 9$$
$$4(x + 3)^2 = 20$$
$$(x + 3)^2 = 5$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{5}$$

38. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al hallar el valor de c que hace que la expresión sea un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 30x + c$$
$$x^2 + 30x + \frac{30}{2}$$
$$x^2 + 30x + 15$$

39. **ESCRIBIR** ¿Puedes resolver una ecuación al completar el cuadrado cuando la ecuación tiene dos soluciones imaginarias? Explica.

40. **RAZONAMIETO ABSTRACTO** ¿Cuál de las siguientes son soluciones de la ecuación $x^2 - 2ax + a^2 = b^2$? Justifica tus respuestas.

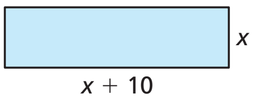
Ⓐ ab Ⓑ $-a - b$
Ⓒ b Ⓓ a
Ⓔ $a - b$ Ⓕ $a + b$

USAR LA ESTRUCTURA En los Ejercicios 41–50, determina si usarías la factorización, raíces cuadradas o completar el cuadrado para resolver la ecuación. Explica tu razonamiento. Luego, resuelve la ecuación.

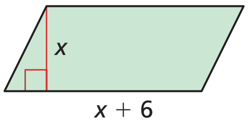
41. $x^2 - 4x - 21 = 0$
42. $x^2 + 13x + 22 = 0$
43. $(x + 4)^2 = 16$
44. $(x - 7)^2 = 9$
45. $x^2 + 12x + 36 = 0$
46. $x^2 - 16x + 64 = 0$
47. $2x^2 + 4x - 3 = 0$
48. $3x^2 + 12x + 1 = 0$
49. $x^2 - 100 = 0$
50. $4x^2 - 20 = 0$

CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 51–54, halla el valor de *x*.

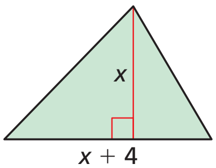
51. Área del rectángulo = 50



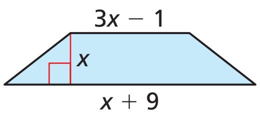
52. Área del paralelogramo = 48



53. Área del triángulo = 40



54. Área del trapecio = 20



En los Ejercicios 55–62, escribe la función cuadrática en la forma de vértice. Luego, identifica el vértice. *(Consulta el Ejemplo 5).*

55. $f(x) = x^2 - 8x + 19$
56. $g(x) = x^2 - 4x - 1$
57. $g(x) = x^2 + 12x + 37$
58. $h(x) = x^2 + 20x + 90$
59. $h(x) = x^2 + 2x - 48$
60. $f(x) = x^2 + 6x - 16$
61. $f(x) = x^2 - 3x + 4$
62. $g(x) = x^2 + 7x + 2$

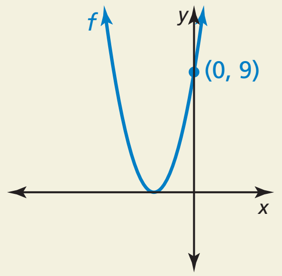
63. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Al marchar, el bastonero que lidera la banda lanza el bastón en el aire y lo atrapa. La altura h (en pies) del bastón t segundos después de que es lanzado puede representarse por la función $h = -16t^2 + 32t + 6$. *(Consulta el Ejemplo 6).*
   a. Halla la altura máxima del bastón.
   b. El bastonero atrapa el bastón cuando se encuentra a 4 pies del suelo. ¿Cuánto tiempo permanece el bastón en el aire?

64. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un fuego artificial explota cuando alcanza su altura máxima. La altura h (en pies) del fuego artificial t segundos después de haber sido lanzado puede representarse por $h = -\frac{500}{9}t^2 + \frac{1000}{3}t + 10$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el fuego artificial? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire antes de explotar?

65. **COMPARAR MÉTODOS** Una tienda de patinetas vente alrededor de 50 patinetas a la semana cuando cobran el precio anunciado. Por cada $1 menos en el precio, se vende una patineta adicional a la semana. El ingreso de la tienda podrá representarse mediante $y = (70 - x)(50 + x)$.

   a. Usa la forma de intersección de la función para hallar el ingreso semanal máximo.
   b. Escribe la función en forma de vértice para hallar el ingreso semanal máximo.
   c. ¿Qué forma prefieres? Explica tu razonamiento.

66. **¿CÓMO LO VES?** A continuación se muestra la gráfica de la función $f(x) = (x - h)^2$. ¿Cuál es la intersección con el eje x? Explica tu razonamiento.

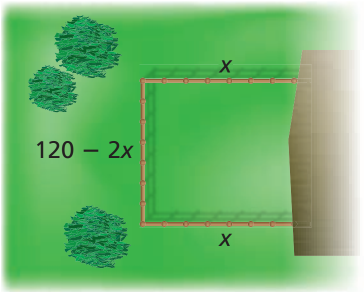


67. **ESCRIBIR** En la Fuente de Buckingham en Chicago la altura h (en pies) del agua por encima de la tobera principal puede ser representada por $h = -16t^2 + 89.6t$, donde t es el tiempo (en segundos) desde que el agua salió de la tobera. Describe las tres formas diferentes para hallar la altura máxima que alcanza el agua. Luego, elige un método y halla la altura máxima del agua.

68. **RESOLVER PROBLEMAS** Un granjero construye un corral rectangular sobre un lado de un establo de animales. El establo servirá como un lado del corral. El granjero cuenta con 120 pies de vallas para cercar un área de 1512 pies cuadrados y quiere que cada lado del corral tenga por lo menos 20 pies de largo.

a. Escribe una ecuación que represente el área del corral.

b. Resuelve la ecuación de la parte (a) para hallar las dimensiones del corral.



69. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que la ecuación $x^2 + 10x = -20$ puede resolverse ya sea al completar el cuadrado o factorizando. ¿Tiene razón tu amigo? Explica.

70. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Escribe una función g en la forma estándar cuya gráfica tenga las mismas intersecciones con el eje x que la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 2$. Halla los ceros de cada función al completar el cuadrado. Haz una gráfica de cada función.

71. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Resuelve $x^2 + bx + c = 0$ al completar el cuadrado. Tu respuesta será una expresión para x en términos de b y c.

72. **SACAR CONCLUSIONES** En este ejercicio investigarás el efecto gráfico de completar el cuadrado.

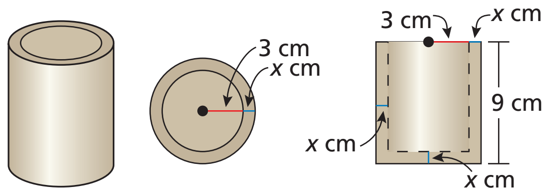
a. Haz una gráfica para cada par de funciones en el mismo plano de coordenadas.

$y = x^2 + 2x$ $\quad$ $y = x^2 - 6x$

$y = (x + 1)^2$ $\quad$ $y = (x - 3)^2$

b. Compara las gráficas de $y = x^2 + bx$ y $y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. Describe qué sucede con la gráfica de $y = x^2 + bx$ cuando completas el cuadrado.

73. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** En tu clase de cerámica recibes un trozo de arcilla con un volumen de 200 centímetros cúbicos y se te pide hacer un portalápices cilíndrico. El portalápices deberá tener 9 centímetros de altura y tener un diámetro interno de 3 centímetros. ¿Qué espesor x deberá tener tu portalápices si quieres usar toda la arcilla?



Vista superior $\quad$ Vista lateral

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Resuelve la desigualdad. Haz una gráfica de la solución. *(Manual de revisión de destrezas)*

74. $2x - 3 < 5$ $\quad$ **75.** $4 - 8y \geq 12$ $\quad$ **76.** $\frac{n}{3} + 6 > 1$ $\quad$ **77.** $-\frac{2s}{5} \leq 8$

Haz una gráfica de la función. Rotula el vértice, el eje de simetría y las intersecciones con el eje x. *(Sección 2.2)*

78. $g(x) = 6(x - 4)^2$ $\quad$ **79.** $h(x) = 2x(x - 3)$

80. $f(x) = x^2 + 2x + 5$ $\quad$ **81.** $f(x) = 2(x + 10)(x - 12)$

3.1–3.3 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

ecuación cuadrática en una variable, *pág. 94*
raíz de una ecuación, *pág. 94*
cero de una función, *pág. 96*
unidad imaginaria *i*, *pág. 104*
número complejo, *pág. 104*
número imaginario, *pág. 104*
número imaginario puro, *pág. 104*
completar el cuadrado, *pág. 112*

Conceptos Esenciales

Sección 3.1

Resolver ecuaciones cuadráticas haciendo una gráfica, *pág*. 94
Resolver ecuaciones cuadráticas de forma algebraica, *pág*. 95
Propiedad del producto cero, *pág. 96*

Sección 3.2

La raíz cuadrada de un número negativo, *pág. 104*
Operaciones con números complejos, *pág. 105*

Sección 3.3

Resolver ecuaciones cuadráticas al completar el cuadrado, *pág. 113*
Escribir funciones cuadráticas en forma de vértice, *pág. 114*

Prácticas matemáticas

1. Analiza los datos dados, limitaciones, relaciones y objetivos del Ejercicio 61 de la página 101.
2. Determina si sería más fácil hallar los ceros de la función del Ejercicio 63 de la página 117 o del Ejercicio 67 de la página 118.

Destrezas de estudio

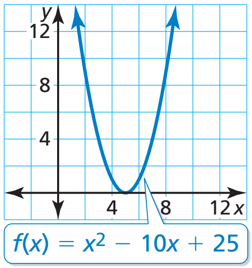
Crear un entorno de estudio positivo

- Separa una cantidad adecuada de tiempo para revisar tus notas y el libro de texto, reelaborar tus apuntes y completar la tarea.
- Crea un lugar para estudiar en tu casa que sea cómodo pero no tan cómodo. El lugar necesita estar alejado de toda posible distracción.
- Forma un grupo de estudio. Elige a estudiantes que estudien bien juntos, apoya cuando alguien haya faltado al colegio, y fomenta actitudes positivas.

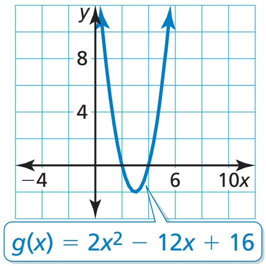
3.1–3.3 Prueba

Resuelve la ecuación usando la gráfica. Verifica tu(s) solución(es). *(Sección 3.1)*

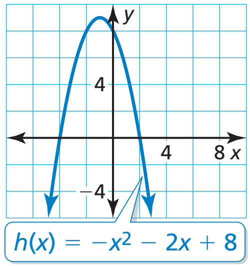
1. $x^2 - 10x + 25 = 0$



2. $2x^2 + 16 = 12x$



3. $x^2 = -2x + 8$



Resuelve la ecuación usando raíces cuadradas o factorizando. Explica la razón detrás de tu elección. *(Sección 3.1)*

4. $2x^2 - 15 = 0$

5. $3x^2 - x - 2 = 0$

6. $(x + 3)^2 = 8$

7. Halla los valores de x y y que satisfagan la ecuación $7x - 6i = 14 + yi$. *(Sección 3.2)*

Haz la operación. Escribe tus respuestas en forma estándar. *(Sección 3.2)*

8. $(2 + 5i) + (-4 + 3i)$

9. $(3 + 9i) - (1 - 7i)$

10. $(2 + 4i)(-3 - 5i)$

11. Halla los ceros de la función $f(x) = 9x^2 + 2$. ¿La gráfica de la función interseca con el eje x? Explica tu razonamiento. *(Sección 3.2)*

Resuelve la ecuación al completar el cuadrado. *(Sección 3.3)*

12. $x^2 - 6x + 10 = 0$

13. $x^2 + 12x + 4 = 0$

14. $4x(x + 6) = -40$

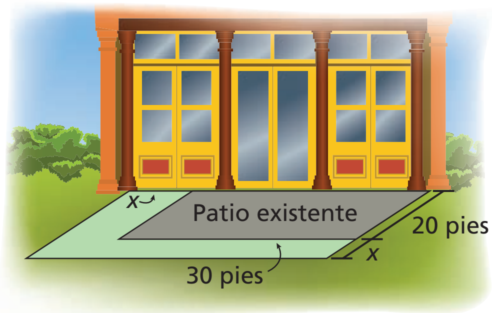
15. Escribe $y = x^2 - 10x + 4$ en forma de vértice. Luego, identifica el vértice. *(Sección 3.3)*

16. Un museo tiene un café con un patio rectangular. El museo quiere añadir 464 pies cuadrados al área del patio ampliando el patio existente según se muestra a continuación. *(Sección 3.1)*

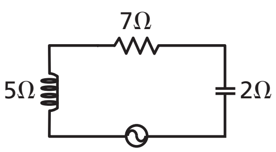
a. Halla el área del patio existente.

b. Escribe una ecuación para representar el área del patio nuevo.

c. ¿Cuánta distancia x debe ampliarse la longitud del patio?



17. Halla la impedancia del circuito en serie. *(Sección 3.2)*



18. La altura h (en pies) del birdie de bádminton t segundos después de haber sido golpeado puede ser representada por la función $h = -16t^2 + 32t + 4$. *(Sección 3.3)*

a. Halla la altura máxima del birdie.

b. ¿Cuánto tiempo permanece el birdie en el aire?

3.4 Usar la fórmula cuadrática

Pregunta esencial ¿Cómo puedes deducir una fórmula general para resolver una ecuación cuadrática?

EXPLORACIÓN 1 Deducir la fórmula cuadrática

Trabaja con un compañero. Analiza y describe lo que se hace en cada paso del desarrollo de la Fórmula Cuadrática.

Paso	Justificación
$ax^2 + bx + c = 0$	
$ax^2 + bx = -c$	
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$	
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\lvert a \rvert}$	
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	

El resultado es la fórmula cuadrática.

RAZONAR DE MANERA ABSTRACTA

Para dominar las matemáticas, necesitas crear una representación coherente del problema en cuestión.

EXPLORACIÓN 2 Usar la fórmula cuadrática

Trabaja con un compañero. Usa la fórmula cuadrática para resolver cada ecuación.

a. $x^2 - 4x + 3 = 0$

b. $x^2 - 2x + 2 = 0$

c. $x^2 + 2x - 3 = 0$

d. $x^2 + 4x + 4 = 0$

e. $x^2 - 6x + 10 = 0$

f. $x^2 + 4x + 6 = 0$

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo deducir una fórmula general para resolver una ecuación cuadrática?

4. Resume los siguientes métodos que has aprendido para resolver ecuaciones cuadráticas: hacer gráficas, usar raíces cuadradas, completar el cuadrado, y usar la fórmula cuadrática.

3.4 Lección

Qué aprenderás

- Resolver las ecuaciones cuadráticas usando la Fórmula Cuadrática.
- Analizar el discriminante para determinar el número y tipo de soluciones.
- Resolver problemas de la vida real.

Vocabulario Esencial

fórmula cuadrática, *pág. 122*
discriminante, *pág. 124*

Resolver ecuaciones usando la fórmula cuadrática

Anteriormente has resuelto ecuaciones cuadráticas al completar el cuadrado. Durante la Exploración desarrollaste una fórmula que da las soluciones para cualquier ecuación cuadrática al completar una vez el cuadrado para la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$. La fórmula para las soluciones se llama **fórmula cuadrática**.

Concepto Esencial

La fórmula cuadrática

Sea a, b y c números reales de tal manera que $a \neq 0$. Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ERROR COMÚN

Recuerda escribir la ecuación cuadrática en la forma estándar antes de aplicar la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación con dos soluciones reales

Resuelve $x^2 + 3x = 5$ usando la fórmula cuadrática.

SOLUCIÓN

$x^2 + 3x = 5$ — Escribe la ecuación original.

$x^2 + 3x - 5 = 0$ — Escribe en forma estándar.

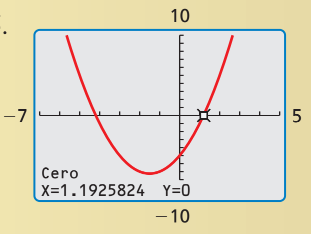
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Fórmula cuadrática

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$ — Sustituye 1 por a, 3 por *b*, y −5 por *c*.

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ — Simplifica.

▶ Entonces, las soluciones son: $x = \dfrac{-3 + \sqrt{29}}{2} \approx 1.19$ y $x = \dfrac{-3 - \sqrt{29}}{2} \approx -4.19$.

Verifica Haz una gráfica de $y = x^2 + 3x - 5$. Las intersecciones con el eje x son aproximadamente -4.19 y aproximadamente 1.19. ✓



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

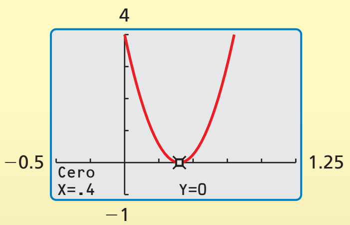
Resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática.

1. $x^2 - 6x + 4 = 0$ **2.** $2x^2 + 4 = -7x$ **3.** $5x^2 = x + 8$

OTRA MANERA

También puedes factorizar para resolver $25x^2 - 20x + 4 = 0$ porque el lado izquierdo se factoriza como $(5x - 2)^2$.

Verifica



EJEMPLO 2 Resolver una ecuación con una solución real

Resuelve $25x^2 - 8x = 12x - 4$ usando la fórmula cuadrática.

SOLUCIÓN

$$25x^2 - 8x = 12x - 4 \qquad \text{Escribe la ecuación original.}$$

$$25x^2 - 20x + 4 = 0 \qquad \text{Escribe en forma estándar.}$$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(25)(4)}}{2(25)} \qquad a = 25, b = -20, c = 4$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{50} \qquad \text{Simplifica.}$$

$$x = \frac{2}{5} \qquad \text{Simplifica.}$$

▶ Entonces, la solución es $x = \frac{2}{5}$. Puedes verificarla haciendo una gráfica de $y = 25x^2 - 20x + 4$. La única intersección con el eje x es $\frac{2}{5}$.

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación con soluciones imaginarias

Resuelve $-x^2 + 4x = 13$ usando la fórmula cuadrática.

SOLUCIÓN

$$-x^2 + 4x = 13 \qquad \text{Escribe la ecuación original.}$$

$$-x^2 + 4x - 13 = 0 \qquad \text{Escribe en forma estándar.}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-13)}}{2(-1)} \qquad a = -1, b = 4, c = -13$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{-2} \qquad \text{Simplifica.}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6i}{-2} \qquad \text{Escribe en términos de } i.$$

$$x = 2 \pm 3i \qquad \text{Simplifica.}$$

▶ Las soluciones son $x = 2 + 3i$ y $x = 2 - 3i$.

ERROR COMÚN

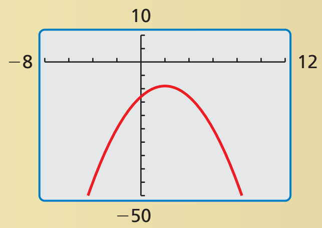
Al simplificar recuerda dividir la parte real *y* la parte imaginaria entre −2.

Verifica Haz una gráfica para $y = -x^2 + 4x - 13$. No hay intersecciones con el eje x. Entonces, la ecuación original no tiene soluciones reales. A continuación se muestra la verificación algebraica para una de las soluciones imaginarias.

$$-(2 + 3i)^2 + 4(2 + 3i) \stackrel{?}{=} 13$$

$$5 - 12i + 8 + 12i \stackrel{?}{=} 13$$

$$13 = 13 \checkmark$$



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática.

4. $x^2 + 41 = -8x$ **5.** $-9x^2 = 30x + 25$ **6.** $5x - 7x^2 = 3x + 4$

Analizar el discriminante

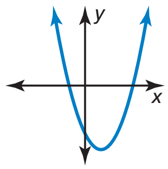
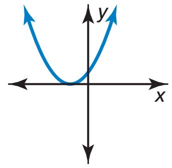
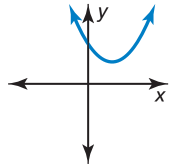
En la fórmula cuadrática, la expresión $b^2 - 4ac$ se llama el **discriminante** de la ecuación asociada $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ discriminante

Puedes analizar el discriminante de la ecuación cuadrática para determinar el número y tipo de soluciones de la ecuación.

Concepto Esencial

Analizar el discriminante de $ax^2 + bx + c = 0$

Valor del discriminante	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
Número y tipo de soluciones	Dos soluciones reales	Una solución real	Dos soluciones imaginarias
Gráfica de $y = ax^2 + bx + c$	 Dos intersecciones con el eje x	 Una intersección con el eje x	 Ninguna intersección con el eje x

EJEMPLO 4 Analizar el discriminante

Halla el discriminante de la ecuación cuadrante y describe el número y tipo de soluciones de la ecuación.

a. $x^2 - 6x + 10 = 0$ **b.** $x^2 - 6x + 9 = 0$ **c.** $x^2 - 6x + 8 = 0$

SOLUCIÓN

Ecuación	**Discriminante**	**Solución(es)**
$ax^2 + bx + c = 0$	$b^2 - 4ac$	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
a. $x^2 - 6x + 10 = 0$	$(-6)^2 - 4(1)(10) = -4$	Dos imaginarias: $3 \pm i$
b. $x^2 - 6x + 9 = 0$	$(-6)^2 - 4(1)(9) = 0$	Una real: 3
c. $x^2 - 6x + 8 = 0$	$(-6)^2 - 4(1)(8) = 4$	Dos reales: 2, 4

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla el discriminante de la ecuación cuadrática y describe el número y tipo de soluciones de la ecuación.

7. $4x^2 + 8x + 4 = 0$

8. $\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$

9. $5x^2 = 8x - 13$

10. $7x^2 - 3x = 6$

11. $4x^2 + 6x = -9$

12. $-5x^2 + 1 = 6 - 10x$

EJEMPLO 5 Escribir una ecuación

Halla el posible par de valores enteros para a y c de manera que la ecuación $ax^2 - 4x + c = 0$ tenga una solución real. Luego, escribe la ecuación.

SOLUCIÓN

Para que la ecuación tenga una solución real el discriminante deberá ser igual a 0.

$b^2 - 4ac = 0$	Escribe el discriminante.
$(-4)^2 - 4ac = 0$	Sustituye -4 por b.
$16 - 4ac = 0$	Evalúa la potencia.
$-4ac = -16$	Resta 16 de cada lado.
$ac = 4$	Divide cada lado entre -4.

Dado que $ac = 4$, elige dos enteros cuyo producto sea 4, tal como $a = 1$ y $c = 4$.

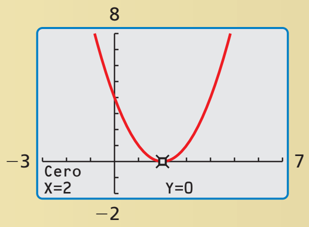
▶ Entonces, una posible ecuación es $x^2 - 4x + 4 = 0$.

OTRA MANERA

Otra posible ecuación en el Ejemplo 5 es $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Puedes obtener esta ecuación imaginando que $a = 4$ y $c = 1$.

Verifica Haz una gráfica para $y = x^2 - 4x + 4$. La única intersección con el eje x es 2. También puedes verificar factorizando.

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x - 2)^2 = 0$$
$$x = 2 \checkmark$$



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

13. Halla un posible par de valores enteros para a y c de manera que la ecuación $ax^2 + 3x + c = 0$ tenga dos soluciones reales. Luego, escribe la ecuación.

La tabla muestra cinco métodos para resolver ecuaciones cuadráticas. Para una ecuación dada podría ser más eficiente usar un método en vez de otro. A continuación se muestran sugerencias sobre cuándo usar cada método.

Resumen de conceptos

Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

Método	Cuándo usarlo
Hacer una gráfica	Usa cuando soluciones aproximadas son adecuadas.
Usar raíces cuadradas	Usa para resolver una ecuación que puede ser escrita en la forma $u^2 = d$, donde u es una expresión algebraica.
Factorizar	Usa cuando se puedan factorizar fácilmente las ecuaciones cuadráticas.
Completar el cuadrado	Puede usarse para cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pero es más fácil aplicarlo cuando $a = 1$ y b es un número par.
Fórmula cuadrática	Puede usarse para *cualquier* ecuación cuadrática.

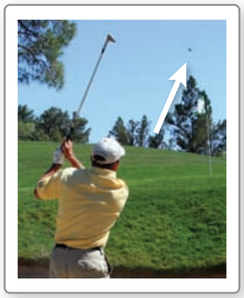
Resolver problemas de la vida real

Se usa la función $h = -16t^2 + h_0$ para representar la altura de un objeto que se deja *caer*. Para un objeto que se ha *lanzado* o *arrojado* se deberá sumar un término adicional v_0t al modelo para tener en cuenta la velocidad vertical inicial v_0 del objeto (en pies por segundo). Recuerda que h es la altura (en pies), t es el tiempo en movimiento (en segundos) y h_0 es la altura inicial (en pies).

$h = -16t^2 + h_0$ — El objeto se deja caer.

$h = -16t^2 + v_0t + h_0$ — El objeto se ha lanzado o arrojado

Tal como se muestra a continuación, el valor v_0 puede ser positivo, negativo o cero dependiendo de si el objeto es lanzado hacia arriba, hacia abajo o en paralelo al suelo.



$V_0 > 0$

$V_0 < 0$

$V_0 = 0$

EJEMPLO 6 **Representar un objeto lanzado**

Un malabarista lanza una pelota al aire. La pelota deja la mano del malabarista a 4 metros del suelo y tiene una velocidad vertical inicial de 30 pies por segundo. El malabarista atrapa la pelota cuando cae de regreso a una altura de 3 pies. ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

SOLUCIÓN

Dado que la pelota ha sido *arrojada*, usa la representación $h = -16t^2 + v_0t + h_0$. Para hallar cuánto tiempo permanece la pelota en el aire resuelve t cuando $h = 3$.

$h = -16t^2 + v_0t + h_0$ — Escribe la altura modelo.

$3 = -16t^2 + 30t + 4$ — Sustituye 3 por h, 30 por v_0, y 4 por h_0.

$0 = -16t^2 + 30t + 1$ — Escribe en forma estándar.

Esta ecuación no es factorizable, y completar el cuadrado resultaría en fracciones. Entonces, usa la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4(-16)(1)}}{2(-16)}$$ $a = -16,\ b = 30,\ c = 1$

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{964}}{-32}$$ Simplifica.

$t \approx -0.033$ o $t \approx 1.9$ — Usa una calculadora.

Rechaza la solución negativa, –0.033 porque el tiempo que permanece la pelota en el aire no puede ser negativo. Entonces, la pelota está en el aire por 1.9 segundos aproximadamente.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

14. **¿QUÉ PASA SI?** La pelota deja la mano del malabarista con una velocidad vertical inicial de 40 pies por segundo. ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

3.4 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETA LA ORACIÓN** Cuando a, b y c son números reales de manera que $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son $x =$ ____________.

2. **COMPLETA LA ORACIÓN** Puedes usar el(la) ____________ de la ecuación cuadrática para determinar el número y tipo de soluciones de la ecuación.

3. **ESCRIBIR** Describe el número y tipo de soluciones cuando el valor del discriminante es negativo.

4. **ESCRIBIR** ¿Qué dos métodos puedes usar para resolver *cualquier* ecuación cuadrática? Explica cuándo podrías preferir usar un método en vez del otro.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–18, resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática. Usa una calculadora gráfica para verificar tu(s) solución(es). *(Consulta los Ejemplos 1, 2, y 3).*

5. $x^2 - 4x + 3 = 0$
6. $3x^2 + 6x + 3 = 0$
7. $x^2 + 6x + 15 = 0$
8. $6x^2 - 2x + 1 = 0$
9. $x^2 - 14x = -49$
10. $2x^2 + 4x = 30$
11. $3x^2 + 5 = -2x$
12. $-3x = 2x^2 - 4$
13. $-10x = -25 - x^2$
14. $-5x^2 - 6 = -4x$
15. $-4x^2 + 3x = -5$
16. $x^2 + 121 = -22x$
17. $-z^2 = -12z + 6$
18. $-7w + 6 = -4w^2$

En los Ejercicios 19–26, halla el discriminante de la ecuación cuadrática y describe el número y tipo de soluciones de la ecuación. *(Consulta el Ejemplo 4).*

19. $x^2 + 12x + 36 = 0$
20. $x^2 - x + 6 = 0$
21. $4n^2 - 4n - 24 = 0$
22. $-x^2 + 2x + 12 = 0$
23. $4x^2 = 5x - 10$
24. $-18p = p^2 + 81$
25. $24x = -48 - 3x^2$
26. $-2x^2 - 6 = x$

27. **USAR ECUACIONES** ¿Cuáles son las soluciones complejas de la ecuación $2x^2 - 16x + 50 = 0$?

    (A) $4 + 3i, 4 - 3i$
    (B) $4 + 12i, 4 - 12i$
    (C) $16 + 3i, 16 - 3i$
    (D) $16 + 12i, 16 - 12i$

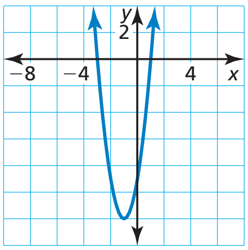
28. **USAR ECUACIONES** Determina el número y tipo de soluciones para la ecuación $x^2 + 7x = -11$.

    (A) dos soluciones reales
    (B) una solución real
    (C) dos soluciones imaginarias
    (D) una solución imaginaria

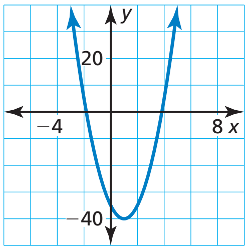
ANALIZAR ECUACIONES En los Ejercicios 29–32, usa el discriminante para unir cada ecuación cuadrática con la gráfica correcta de la función relacionada. Explica tu razonamiento.

29. $x^2 - 6x + 25 = 0$
30. $2x^2 - 20x + 50 = 0$
31. $3x^2 + 6x - 9 = 0$
32. $5x^2 - 10x - 35 = 0$

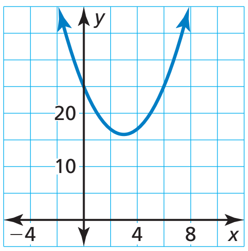
A.



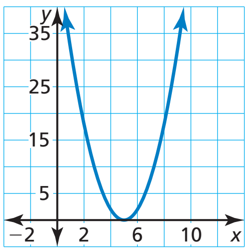
B.



C.



D.



ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 33 y 34, describe y corrige el error cometido al resolver la ecuación.**

33. ✗

$$x^2 + 10x + 74 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(74)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{-196}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 14}{2}$$

$$= -12 \text{ o } 2$$

34. ✗

$$x^2 + 6x + 8 = 2$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$$= -2 \text{ o } -4$$

FINAL ABIERTO **En los Ejercicios 35–40, halla el posible par de valores enteros para *a* y *c* de manera que la ecuación cuadrática tenga la(s) solución(es) dada(s). Luego, escribe la ecuación.** *(Consulta el Ejemplo 5).*

35. $ax^2 + 4x + c = 0$; dos soluciones imaginarias

36. $ax^2 + 6x + c = 0$; dos soluciones reales

37. $ax^2 - 8x + c = 0$; dos soluciones reales

38. $ax^2 - 6x + c = 0$; una solución real

39. $ax^2 + 10x = c$; una solución real

40. $-4x + c = -ax^2$; dos soluciones imaginarias

USAR LA ESTRUCTURA **En los Ejercicios 41–46, usa la fórmula cuadrática para escribir una ecuación cuadrática que tenga las soluciones dadas.**

41. $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{-176}}{-10}$

42. $x = \dfrac{15 \pm \sqrt{-215}}{22}$

43. $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-124}}{-14}$

44. $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{137}}{4}$

45. $x = \dfrac{-4 \pm 2}{6}$

46. $x = \dfrac{2 \pm 4}{-2}$

COMPARAR MÉTODOS **En los Ejercicios 47–58, resuelve las ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática. Luego, resuelve la ecuación usando otro método. ¿Qué método prefieres? Explica.**

47. $3x^2 - 21 = 3$

48. $5x^2 + 38 = 3$

49. $2x^2 - 54 = 12x$

50. $x^2 = 3x + 15$

51. $x^2 - 7x + 12 = 0$

52. $x^2 + 8x - 13 = 0$

53. $5x^2 - 50x = -135$

54. $8x^2 + 4x + 5 = 0$

55. $-3 = 4x^2 + 9x$

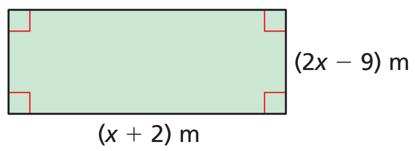
56. $-31x + 56 = -x^2$

57. $x^2 = 1 - x$

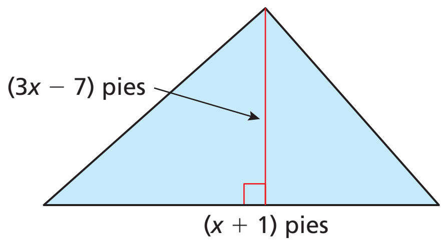
58. $9x^2 + 36x + 72 = 0$

CONEXIONES MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 59 y 60, halla el valor de *x*.**

59. Área del rectángulo $= 24 \text{ m}^2$



60. Área del triángulo $= 8 \text{ pies}^2$

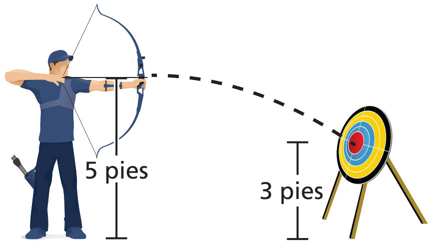


61. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un jugador de lacrosse arroja una pelota en el aire desde una altura inicial de 7 pies. La pelota tiene una velocidad vertical inicial de 90 pies por segundo. Otro jugador atrapa la pelota cuando está a 3 pies del suelo. ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire? *(Consulta el Ejemplo 6).*

62. **SENTIDO NUMÉRICO** Supón que la ecuación cuadrática $ax^2 + 5x + c = 0$ tiene una solución real. ¿Es posible que *a* y *c* sean enteros? ¿Números racionales? Explica tu razonamiento. Luego, describe los posibles valores de *a* y *c*.

63. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** En un partido de vóleibol un jugador de un equipo remata la pelota sobre la red cuando la pelota se encuentra a 10 pies por encima de la cancha. El remate impulsa la pelota hacia abajo con una velocidad vertical inicial de 55 pies por segundo. ¿Con cuánto tiempo cuenta el equipo contrario para devolver la pelota antes de que toque el suelo?

64. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un arquero está disparando a blancos. La flecha se encuentra a una altura de 5 pies del suelo. Debido a normas de seguridad, el arquero deberá apuntar la flecha en paralelo al suelo.



a. ¿Cuánto tiempo tarda la flecha en llegar al blanco que se encuentra a tres pies del suelo?

b. ¿Qué método usaste para resolver la ecuación cuadrática? Explica.

65. **RESOLVER PROBLEMAS** Un club de cohetes está por lanzar cohetes modelo. La plataforma de lanzamiento se encuentra a 30 pies del suelo. Tu cohete modelo tiene una velocidad vertical inicial de 105 pies por segundo. El cohete modelo de tu amigo tiene una velocidad vertical inicial de 100 pies por segundo.

a. Usa la calculadora gráfica para hacer una gráfica de las ecuaciones de ambos cohetes modelos. Compara las trayectorias.

b. ¿Después de cuántos segundos se encuentra tu cohete a 119 pies del suelo? Explica si su(s) respuesta(s) es(son) razonables.

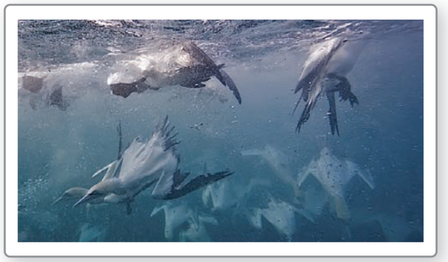
66. **RESOLVER PROBLEMAS** El número A de tabletas vendidas (en millones) puede ser representado por la función $A = 4.5t^2 + 43.5t + 17$, donde t representa el año siguiente a 2010.

a. ¿En qué año las ventas de tabletas alcanzaron 65 millones?

b. Halla la tasa promedio de cambio del 2010 al 2012 e interpreta el significado en el contexto de la situación.

c. ¿Crees que este modelo será preciso después que se desarrolle una computadora nueva e innovadora? Explica.

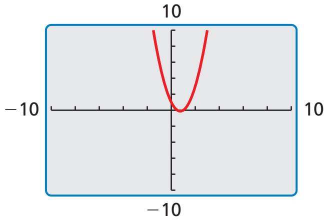
67. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El alcatraz es un ave que se alimenta de peces al zambullirse en el agua. Un alcatraz divisa un pez en la superficie del agua y se zambulle 100 pies para atraparlo. El ave se sumerge en el agua con una velocidad vertical inicial de -88 pies por segundo.



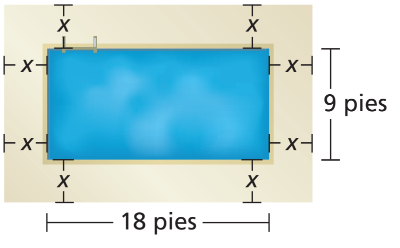
a. ¿Cuánto tiempo tiene el pez para escaparse?

b. Otro alcatraz divisa el mismo pez; se encuentra únicamente a 84 pies sobre el agua y tiene una velocidad vertical inicial de -70 pies por segundo. ¿Cuál de las dos aves alcanza al pez primero? Justifica tu respuesta.

68. **USAR HERRAMIENTAS** Se te pide hallar un posible par de valores enteros para a y c de manera que la ecuación $ax^2 - 3x + c = 0$ tenga dos soluciones reales. Cuando resuelves la desigualdad del discriminante obtienes $ac < 2.25$. Entonces, eliges los valores $a = 2$ y $c = 1$. Tu calculadora gráfica muestra la gráfica de tu ecuación en una ventana de visualización estándar. ¿La solución es la correcta? Explica.

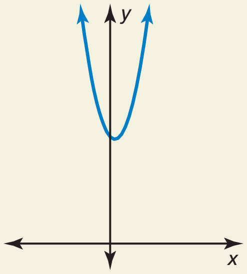


69. **RESOLVER PROBLEMAS** Tu familia tiene una piscina rectangular que mide 18 pies por 9 pies. Tu familia quiere instalar una terraza alrededor de la piscina pero no está segura qué tan ancha deba ser. Determina el ancho que deba tener la terraza cuando el área total de la piscina y la terraza sea de 400 pies cuadrados. ¿Cuál es el ancho de la terraza?

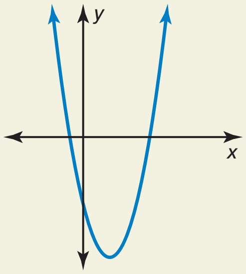


70. ¿CÓMO LO VES? A continuación se muestra la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Determina si cada discriminante de $ax^2 + bx + c = 0$ es positivo, negativo o cero. Luego, indica el número y tipo de soluciones para cada gráfica. Explica tu razonamiento.

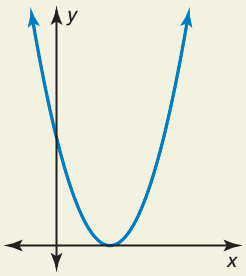
a.



b.



c.



71. PENSAMIENTO CRÍTICO Resuelve cada ecuación de valor absoluto.

a. $|x^2 - 3x - 14| = 4$ **b.** $x^2 = |x| + 6$

72. ARGUMENTAR Se le pide a la clase resolver la ecuación $4x^2 + 14x + 11 = 0$. Decides resolver la ecuación completando el cuadrado. Tu amigo decide usar la fórmula cuadrática. ¿El método de quién es más eficiente? Explica tu razonamiento.

73. RAZONAMIENTO ABSTRACTO Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con dos soluciones reales, demuestra que la media de las soluciones es $-\frac{b}{2a}$. ¿Cómo se relaciona este hecho con la simetría de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$?

74. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Describe una historia de la vida real que pueda representarse con $h = -16t^2 + v_0t + h_0$. Escribe el modelo de altura para tu historia y determina cuánto tiempo permanece el objeto en el aire.

75. RAZONAR Demuestra que no hay ninguna ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de manera que a, b y c son números reales y $3i$ y $-2i$ son soluciones.

76. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La Torre Stratosphere en Las Vegas mide 921 pies de alto y tiene una "aguja" en la parte superior que se extiende más hacia el cielo. Un juego mecánico llamado Big Shot catapulta a los pasajeros 160 pies hacia arriba a lo largo de la aguja y luego los deja caer de vuelta a la plataforma de lanzamiento.

a. La altura h (en pies) de un pasajero del Big Shot puede representarse con $h = -16t^2 + v_0t + 921$, donde t es el tiempo transcurrido (en segundos) después del lanzamiento y v_0 es la velocidad vertical inicial (en pies por segundo). Halla v_0 usando el hecho de que el valor máximo de h es $921 + 160 = 1081$ pies.

b. Un folleto del Big Shot indica que la subida hasta la aguja toma 2 segundos. Compara este tiempo con el tiempo dado en la representación $h = -16t^2 + v_0t + 921$, donde v_0 es el valor que encontraste en la parte (a). Comenta sobre la precisión de la representación.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales haciendo gráficas. *(Manual de revisión de destrezas)*

77. $-x + 2y = 6$
$x + 4y = 24$

78. $y = 2x - 1$
$y = x + 1$

79. $3x + y = 4$
$6x + 2y = -4$

80. $y = -x + 2$
$-5x + 5y = 10$

Haz una gráfica de la ecuación cuadrática. Rotula el vértice y el eje de simetría. *(Sección 2.2)*

81. $y = -x^2 + 2x + 1$

82. $y = 2x^2 - x + 3$

83. $y = 0.5x^2 + 2x + 5$

84. $y = -3x^2 - 2$

3.5 Resolver sistemas no lineales

Pregunta esencial ¿Cómo solucionas un sistema no lineal de ecuaciones?

EXPLORACIÓN 1 Resolver sistemas no lineales de ecuaciones

Trabaja con un compañero. Une cada sistema con su gráfica. Explica tu razonamiento. Luego, resuelve cada sistema haciendo una gráfica.

a. $y = x^2$
$y = x + 2$

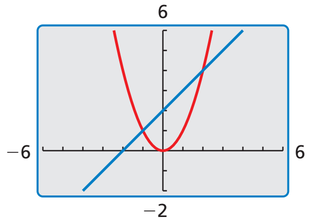
b. $y = x^2 + x - 2$
$y = x + 2$

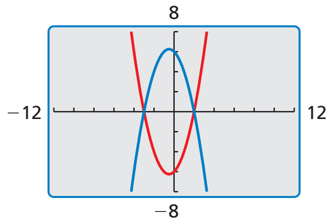
c. $y = x^2 - 2x - 5$
$y = -x + 1$

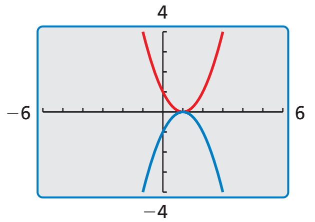
d. $y = x^2 + x - 6$
$y = -x^2 - x + 6$

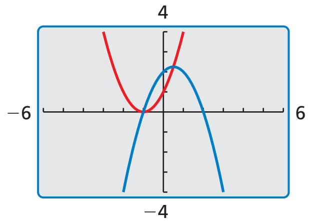
e. $y = x^2 - 2x + 1$
$y = -x^2 + 2x - 1$

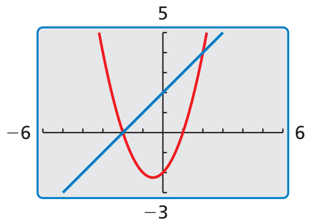
f. $y = x^2 + 2x + 1$
$y = -x^2 + x + 2$

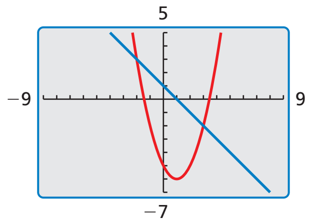
A.


B.


C.


D.


E.


F.


DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS

Para dominar las matemáticas, necesitas planear una secuencia de soluciones en lugar de simplemente lanzarte a tratar de solucionar problemas.

EXPLORACIÓN 2 Resolver sistemas no lineales de ecuaciones

Trabaja con un compañero. Verifica el sistema no lineal en la Exploración 1(f). Supón que quieres una forma más exacta de resolver el sistema que la del enfoque de gráficas.

a. Demuestra cómo se podría usar un *enfoque numérico* al crear una tabla. Por ejemplo, si usaras una hoja de cálculo para resolver el sistema.

b. Demuestra cómo se podría usar un enfoque analítico. Por ejemplo, podrías resolver el sistema mediante la sustitución o eliminación.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes resolver un sistema no lineal de ecuaciones?

4. ¿Preferirías usar un enfoque gráfico, numérico o analítico para resolver un sistema no lineal de ecuaciones dado? Explica tu razonamiento.

$$y = x^2 + 2x - 3$$
$$y = -x^2 - 2x + 4$$

3.5 Lección

Vocabulario Esencial

sistema de ecuaciones no lineales, *pág. 132*

Anterior

sistema de ecuaciones lineales

círculo

Qué aprenderás

- Resolver los sistemas de ecuaciones no lineales.
- Resolver ecuaciones cuadráticas haciendo gráficas.

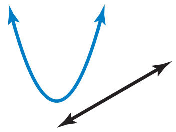
Sistemas de ecuaciones no lineales

Anteriormente, has resuelto sistemas de ecuaciones *lineales* haciendo gráficas, sustituyendo o eliminando. También puedes usar estos métodos para resolver un sistema de ecuaciones no lineales. En un **sistema de ecuaciones no lineales** por lo menos una de las ecuaciones no es lineal. Por ejemplo, el sistema no lineal que se muestra tiene una ecuación cuadrática y una ecuación lineal.

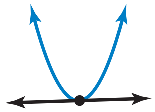
$y = x^2 + 2x - 4$ La ecuación 1 es no lineal.

$y = 2x + 5$ La ecuación 2 es lineal.

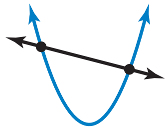
Cuando las gráficas de las ecuaciones en un sistema son una línea y una parábola, las gráficas pueden intersecarse en cero, uno o dos puntos. Entonces, el sistema puede tener cero, una o dos soluciones, como se muestra a continuación.



Sin solución

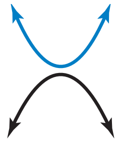


Una solución

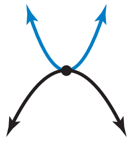


Dos soluciones

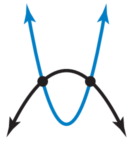
Cuando las gráficas de las ecuaciones en un sistema son una parábola que se abre hacia arriba y una parábola que se abre hacia abajo, las gráficas se pueden intersecar en cero, uno o dos puntos. Entonces, el sistema puede tener cero, una o dos soluciones, como se muestra a continuación.



Sin solución



Una solución



Dos soluciones

EJEMPLO 1 Resolver un sistema no lineal haciendo gráficas

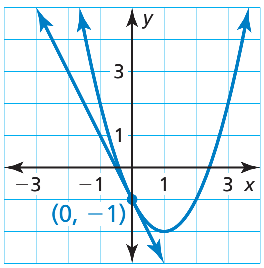
Resuelve el sistema haciendo gráficas.

$y = x^2 - 2x - 1$ Ecuación 1

$y = -2x - 1$ Ecuación 2

SOLUCIÓN

Haz una gráfica para cada ecuación. Luego, estima el punto de intersección. La parábola y la línea parecen intersecarse en el punto $(0, -1)$. Verifica el punto al sustituir las coordenadas en cada una de las ecuaciones originales.



Ecuación 1

$y = x^2 - 2x - 1$

$-1 \stackrel{?}{=} (0)^2 - 2(0) - 1$

$-1 = -1$ ✓

Ecuación 2

$y = -2x - 1$

$-1 \stackrel{?}{=} -2(0) - 1$

$-1 = -1$ ✓

- La solución es $(0, -1)$.

EJEMPLO 2 Resolver un sistema no lineal por sustitución

Resuelve el sistema por sustitución.

$x^2 + x - y = -1$ Ecuación 1

$x + y = 4$ Ecuación 2

SOLUCIÓN

Empieza resolviendo para hallar y en la Ecuación 2

$y = -x + 4$ Resuelve para hallar y en la Ecuación 2.

A continuación, sustituye $-x + 4$ para y en la Ecuación 1 y resuelve para hallar x.

$x^2 + x - y = -1$ Escribe la Ecuación 1.

$x^2 + x - (-x + 4) = -1$ Sustituye $-x + 4$ por y.

$x^2 + 2x - 4 = -1$ Simplifica.

$x^2 + 2x - 3 = 0$ Escribe en forma estándar.

$(x + 3)(x - 1) = 0$ Factoriza.

$x + 3 = 0$ or $x - 1 = 0$ Propiedad del producto cero

$x = -3$ or $x = 1$ Resuelve para hallar x.

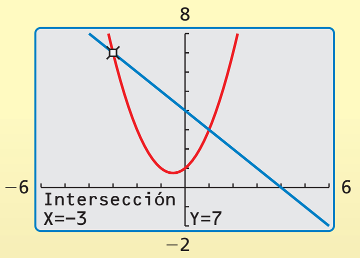
Para resolver para hallar y, sustituye $x = -3$ y $x = 1$ en la ecuación $y = -x + 4$.

$y = -x + 4 = -(-3) + 4 = 7$ Sustituye -3 por x.

$y = -x + 4 = -1 + 4 = 3$ Sustituye 1 por x.

▶ Las soluciones son $(-3, 7)$ y $(1, 3)$. Verifica las soluciones haciendo gráficas del sistema.

Verifica



EJEMPLO 3 Resolver un sistema no lineal por eliminación

Resuelve el sistema por eliminación.

$2x^2 - 5x - y = -2$ Ecuación 1

$x^2 + 2x + y = 0$ Ecuación 2

SOLUCIÓN

Suma las ecuaciones para eliminar el término y y obtener una ecuación cuadrática en x

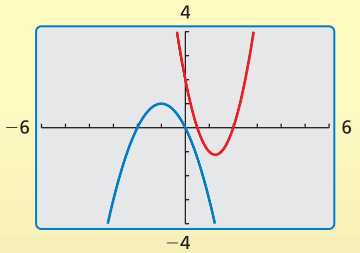
$$\begin{array}{r}2x^2 - 5x - y = -2\\ \underline{x^2 + 2x + y = 0}\\ 3x^2 - 3x = -2\end{array}$$ Suma las ecuaciones.

$3x^2 - 3x + 2 = 0$ Escribe en forma estándar.

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{-15}}{6}$ Usa la fórmula cuadrática.

▶ Debido a que el discriminante es negativo, la ecuación $3x^2 - 3x + 2 = 0$ no tiene solución real. Entonces, el sistema original no tiene solución real. Puedes verificarlo haciendo graficas del sistema y observando que las gráficas no parecen intersecarse.

Verifica



Monitoreo del progreso

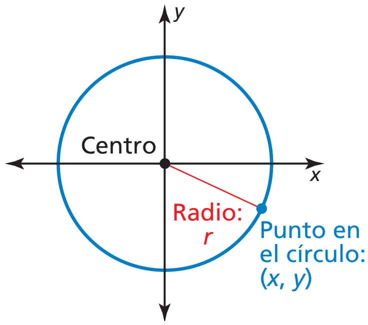
Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve el sistema usando cualquier método. Explica por qué elegiste ese método.

1. $y = -x^2 + 4$
$y = -4x + 8$

2. $x^2 + 3x + y = 0$
$2x + y = 5$

3. $2x^2 + 4x - y = -2$
$x^2 + y = 2$

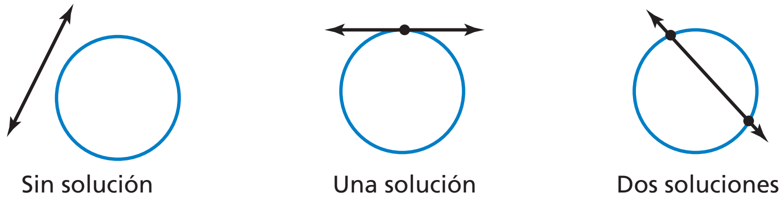


Algunos sistemas no lineales tienen ecuaciones en la forma de

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Esta ecuación es la forma estándar de un círculo con centro (0, 0) y radio r.

Cuando las gráficas de las ecuaciones en un sistema son una línea y un círculo, las gráficas pueden intersecarse en cero, uno o dos puntos. Entonces, el sistema puede tener cero, uno o dos soluciones, como se muestra a continuación.



EJEMPLO 4 Resolver un sistema no lineal por sustitución

Resuelve el sistema por sustitución.

$x^2 + y^2 = 10$ — Ecuación 1

$y = -3x + 10$ — Ecuación 2

SOLUCIÓN

Sustituye $-3x + 10$ para y en la Ecuación 1 y resuelve para hallar x.

$x^2 + y^2 = 10$	Escribe la Ecuación 1.
$x^2 + (-3x + 10)^2 = 10$	Sustituye $-3x + 10$ por y.
$x^2 + 9x^2 - 60x + 100 = 10$	Desarrolla la potencia.
$10x^2 - 60x + 90 = 0$	Escribe en forma estándar.
$x^2 - 6x + 9 = 0$	Divide cada lado entre 10.
$(x - 3)^2 = 0$	Patrón de trinomio cuadrado perfecto
$x = 3$	Propiedad del producto cero

ERROR COMÚN

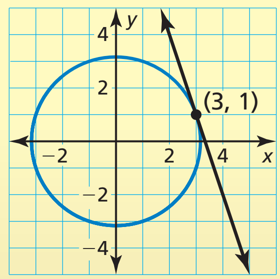
También puedes sustituir $x = 3$ en la Ecuación 1 para hallar y. Esto produce dos soluciones aparentes, (3, 1) y (3, −1). Sin embargo, (3, −1) *no* es una solución porque no satisface la Ecuación 2. En la gráfica también puedes ver que (3, −1) no es una solución.

Para hallar la coordenada y de la solución, sustituye $x = 3$ en la Ecuación 2.

$$y = -3(3) + 10 = 1$$

▶ La solución es (3, 1). Verifica la solución haciendo una gráfica del sistema. Puedes ver que la línea y el círculo se intersecan únicamente en el punto (3, 1).

Verifica



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve el sistema.

4. $x^2 + y^2 = 16$
$y = -x + 4$

5. $x^2 + y^2 = 4$
$y = x + 4$

6. $x^2 + y^2 = 1$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Resolver ecuaciones haciendo gráficas

Puedes resolver una ecuación al reescribirla como un sistema de ecuaciones y luego resolver el sistema haciendo gráficas.

Concepto Esencial

Resolver ecuaciones haciendo gráficas

Paso 1 Para resolver la ecuación $f(x) = g(x)$, escribe un sistema de dos ecuaciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$.

Paso 2 Haz una gráfica del sistema de ecuaciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$. El valor de x de cada solución del sistema es una solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

OTRA MANERA

En el Ejemplo 5(a) también puedes hallar las soluciones al escribir la ecuación dada como $4x^2 + 3x - 2 = 0$ y resolver esta ecuación usando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 5 Resolver ecuaciones cuadráticas haciendo gráficas

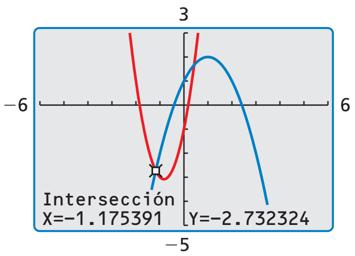
Resuelve (a) $3x^2 + 5x - 1 = -x^2 + 2x + 1$ y (b) $-(x - 1.5)^2 + 2.25 = 2x(x + 1.5)$ haciendo gráficas.

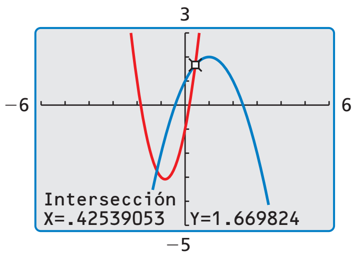
SOLUCIÓN

a. Paso 1 Escribe un sistema de ecuaciones usando cada lado de la ecuación original.

Ecuación	*Sistema*
$3x^2 + 5x - 1 = -x^2 + 2x + 1$	$y = 3x^2 + 5x - 1$ $y = -x^2 + 2x + 1$

Paso 2 Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica del sistema. Luego, usa la función de intersecar para hallar el valor de x de cada solución del sistema.



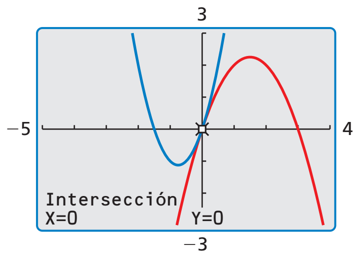


Las gráficas se intersecan cuando $x \approx -1.18$ y $x \approx 0.43$.

▶ Las soluciones de la ecuación son $x \approx -1.18$ y $x \approx 0.43$.

b. Paso 1 Escribe un sistema de ecuaciones usando cada lado de la ecuación original.

Ecuación	*Sistema*
$-(x - 1.5)^2 + 2.25 = 2x(x + 1.5)$	$y = -(x - 1.5)^2 + 2.25$ $y = 2x(x + 1.5)$



Paso 2 Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica del sistema, como se muestra a la izquierda. Luego, usa la función de *intersecar* para hallar el valor de x para cada solución del sistema. Las gráficas se intersecan cuando $x = 0$.

▶ La solución de la ecuación es $x = 0$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación haciendo una gráfica.

7. $x^2 - 6x + 15 = -(x - 3)^2 + 6$

8. $(x + 4)(x - 1) = -x^2 + 3x + 4$

 Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Describe las posibles soluciones de un sistema que consiste en dos ecuaciones cuadráticas.

2. **¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Cuál de los siguientes sistemas *no* corresponde al grupo de las otras tres? Explica.

$y = 3x + 4$ $y = x^2 + 1$	$y = 2x - 1$ $y = -3x + 6$	$y = 3x^2 + 4x + 1$ $y = -5x^2 - 3x + 1$	$x^2 + y^2 = 4$ $y = -x + 1$

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–10, resuelve el sistema haciendo una gráfica. Revisa tu(s) solución(es). *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $y = x + 2$
$y = 0.5(x + 2)^2$

4. $y = (x - 3)^2 + 5$
$y = 5$

5. $y = \frac{1}{3}x + 2$
$y = -3x^2 - 5x - 4$

6. $y = -3x^2 - 30x - 71$
$y = -3x - 17$

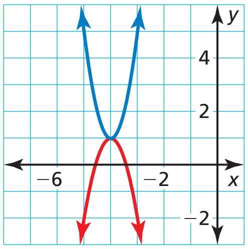
7. $y = x^2 + 8x + 18$
$y = -2x^2 - 16x - 30$

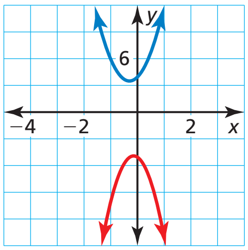
8. $y = -2x^2 - 9$
$y = -4x - 1$

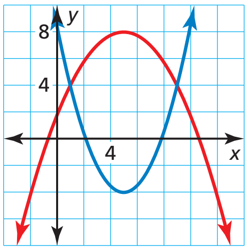
9. $y = (x - 2)^2$
$y = -x^2 + 4x - 2$

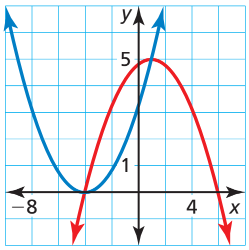
10. $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

En los Ejercicios 11–14 resuelve el sistema de ecuaciones no lineales usando la gráfica.

11.


12.


13.


14.


En los Ejercicios 15–24, resuelve el sistema por sustitución *(Consulta los Ejemplos 2 y 4).*

15. $y = x + 5$
$y = x^2 - x + 2$

16. $x^2 + y^2 = 49$
$y = 7 - x$

17. $x^2 + y^2 = 64$
$y = -8$

18. $x = 3$
$-3x^2 + 4x - y = 8$

19. $2x^2 + 4x - y = -3$
$-2x + y = -4$

20. $2x - 3 = y + 5x^2$
$y = -3x - 3$

21. $y = x^2 - 1$
$-7 = -x^2 - y$

22. $y + 16x - 22 = 4x^2$
$4x^2 - 24x + 26 + y = 0$

23. $x^2 + y^2 = 7$
$x + 3y = 21$

24. $x^2 + y^2 = 5$
$-x + y = -1$

25. **USAR ECUACIONES** ¿Qué pares ordenados son soluciones del sistema no lineal?

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{21}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$$

Ⓐ (1, 6) Ⓑ (3, 0)
Ⓒ (8, 2.5) Ⓓ (7, 0)

26. **USAR ECUACIONES** ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Explica tu razonamiento.

$$y = 7x^2 - 11x + 9$$
$$y = -7x^2 + 5x - 3$$

Ⓐ 0 Ⓑ 1
Ⓒ 2 Ⓓ 4

En los Ejercicios 27–34, resuelve el sistema por eliminación. *(Consulta el Ejemplo 3).*

27. $2x^2 - 3x - y = -5$
$-x + y = 5$

28. $-3x^2 + 2x - 5 = y$
$-x + 2 = -y$

29. $-3x^2 + y = -18x + 29$
$-3x^2 - y = 18x - 25$

30. $y = -x^2 - 6x - 10$
$y = 3x^2 + 18x + 22$

31. $y + 2x = -14$
$-x^2 - y - 6x = 11$

32. $y = x^2 + 4x + 7$
$-y = 4x + 7$

33. $y = -3x^2 - 30x - 76$
$y = 2x^2 + 20x + 44$

34. $-10x^2 + y = -80x + 155$
$5x^2 + y = 40x - 85$

35. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al usar la eliminación para resolver un sistema.

✗

$$\begin{array}{r} y = -2x^2 + 32x - 126 \\ \underline{-y = 2x - 14} \\ 0 = 18x - 126 \\ 126 = 18x \\ x = 7 \end{array}$$

36. **SENTIDO NUMÉRICO** La tabla muestra los valores de entrada y de salida de dos ecuaciones cuadráticas. Identifica la(s) solución(es) del sistema. Explica tu razonamiento.

x	y_1	y_2
−3	29	−11
−1	9	9
1	−3	21
3	−7	25
7	9	9
11	57	−39

En los Ejercicios 37–42, resuelve el sistema usando cualquier método. Explica por qué elegiste ese método.

37. $y = x^2 - 1$
$-y = 2x^2 + 1$

38. $y = -4x^2 - 16x - 13$
$-3x^2 + y + 12x = 17$

39. $-2x + 10 + y = \frac{1}{3}x^2$
$y = 10$

40. $y = 0.5x^2 - 10$
$y = -x^2 + 14$

41. $y = -3(x - 4)^2 + 6$
$(x - 4)^2 + 2 - y = 0$

42. $-x^2 + y^2 = 100$
$y = -x + 14$

USAR HERRAMIENTAS **En los Ejercicios 43–48, resuelve las ecuaciones haciendo una gráfica.** *(Consulta el Ejemplo 5).*

43. $x^2 + 2x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

44. $2x^2 - 12x - 16 = -6x^2 + 60x - 144$

45. $(x + 2)(x - 2) = -x^2 + 6x - 7$

46. $-2x^2 - 16x - 25 = 6x^2 + 48x + 95$

47. $(x - 2)^2 - 3 = (x + 3)(-x + 9) - 38$

48. $(-x + 4)(x + 8) - 42 = (x + 3)(x + 1) - 1$

49. **RAZONAR** Un sistema no lineal contiene las ecuaciones de una función constante y una función cuadrática. El sistema tiene una solución. Describe la relación entre las gráficas.

50. **RESOLVER PROBLEMAS** El rango (en millas) de la señal de transmisión desde una torre de radio está limitada por un círculo dado por la ecuación

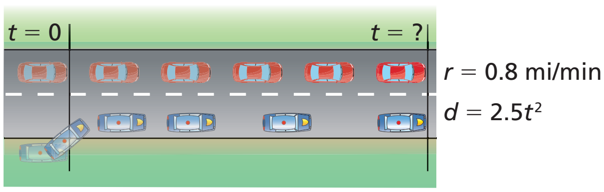
$$x^2 + y^2 = 1620.$$

Una carretera recta puede ser representada por la ecuación

$$y = -\frac{1}{3}x + 30.$$

¿A qué longitudes de la carretera pueden recibir los vehículos la señal de transmisión?

51. **RESOLVER PROBLEMAS** Un vehículo pasa a un lado de un carro de policía estacionado y continúa a una velocidad constante de r. El carro policial empieza a acelerar a una velocidad constante cuando es rebasado. El diagrama indica la distancia d (en millas) que viaja el carro de policía como una función de tiempo t (en millas) luego de haber sido rebasado. Escribe y resuelve un sistema de ecuaciones para hallar cuánto tiempo le tomará al carro de policía alcanzar al otro vehículo.



52. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Escribe un sistema no lineal que tenga dos soluciones distintas con la misma coordenada de y. Haz un dibujo de una gráfica para tu sistema. Luego, resuelve el sistema.

53. FINAL ABIERTO Halla tres valores para m de manera que el sistema no tenga solución, tenga una solución o dos soluciones. Justifica tu respuesta usando una gráfica.

$$3y = -x^2 + 8x - 7$$
$$y = mx + 3$$

54. ARGUMENTAR Tú y un amigo resuelven el sistema que se muestra a continuación y determinan que $x = 3$ y $x = -3$. Tú usas la Ecuación 1 para obtener las soluciones $(3, 3)$, $(3, -3)$, $(-3, 3)$ y $(-3, -3)$. Tu amigo usa la Ecuación 2 para obtener las soluciones $(3, 3)$ y $(-3, -3)$. ¿Quién tiene la razón? Explica tu razonamiento.

$x^2 + y^2 = 18$ Ecuación 1

$x - y = 0$ Ecuación 2

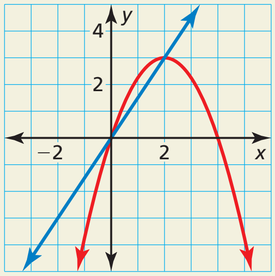
55. COMPARAR MÉTODOS Describe dos maneras diferentes en las que podrías resolver una ecuación cuadrática. ¿Qué manera prefieres? Explica tu razonamiento.

$$-2x^2 + 12x - 17 = 2x^2 - 16x + 31$$

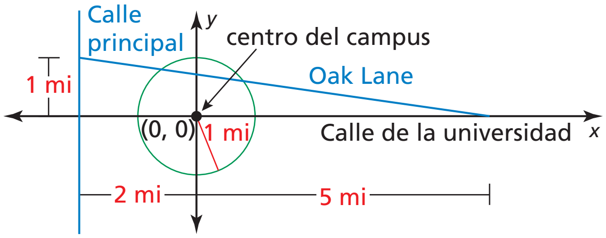
56. ANALIZAR RELACIONES Supón que la gráfica de una línea que pasa por el origen, interseca la gráfica de un circulo que tiene su centro en el origen. Cuando conoces uno de los puntos de intersección, explica cómo puedes hallar el otro punto de intersección sin hacer ningún cálculo.

57. ESCRIBIR Describe las posibles soluciones de un sistema que contiene (a) una ecuación cuadrática y una ecuación de un círculo, y (b) dos ecuaciones de círculos. Haz un dibujo de las gráficas para justificar tus respuestas.

58. ¿CÓMO LO VES? A continuación se muestra la gráfica de un sistema no lineal. Estima la(s) solución(es). Luego, describe la transformación de una gráfica de una función lineal que resulta en un sistema sin solución.



59. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Para ser elegible para un pase de estacionamiento en el campus de la universidad, un estudiante deberá vivir por lo menos a 1 milla del centro del campus.



a. Escribe ecuaciones que representen el círculo y Oak Lane.

b. Resuelve el sistema que consiste en las ecuaciones de la parte (a).

c. ¿A qué longitud de Oak Lane *no* se permite a los estudiantes ser elegibles para el pase de estacionamiento?

60. PENSAMIENTO CRÍTICO Resuelve el sistema de tres ecuaciones que se muestran a continuación.

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$2y = x^2 - 2x + 4$$
$$y = -x + 2$$

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Resuelve la desigualdad. Haz una gráfica de la solución en una recta numérica. *(Manual de revisión de destrezas)*

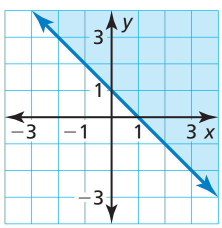
61. $4x - 4 > 8$

62. $-x + 7 \le 4 - 2x$

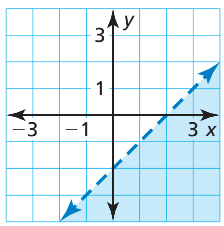
63. $-3(x - 4) \ge 24$

Escribe una desigualdad que represente la gráfica. *(Manual de revisión de destrezas)*

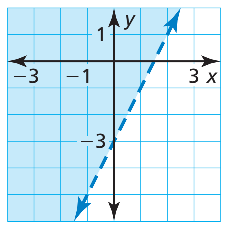
64.



65.



66.



3.6 Desigualdades cuadráticas

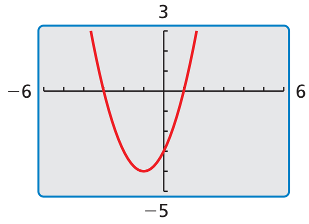
Pregunta esencial

¿Cómo puedes resolver una desigualdad cuadrática?

EXPLORACIÓN 1 Resolver una desigualdad cuadrática

Trabaja con un compañero. La pantalla de la calculadora gráfica muestra la gráfica de

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$



Explica cómo puedes usar la gráfica para resolver la desigualdad

$$x^2 + 2x - 3 \le 0.$$

Luego resuelve la desigualdad.

USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas usar las herramientas tecnológicas para explorar tu comprensión de los conceptos.

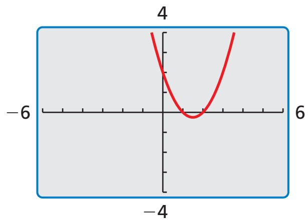
EXPLORACIÓN 2 Resolver desigualdades cuadráticas

Trabaja con un compañero. Une cada desigualdad con la gráfica de su función cuadrática relacionada. Luego usa la gráfica para resolver la desigualdad.

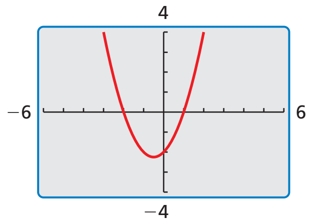
a. $x^2 - 3x + 2 > 0$ **b.** $x^2 - 4x + 3 \le 0$ **c.** $x^2 - 2x - 3 < 0$

d. $x^2 + x - 2 \ge 0$ **e.** $x^2 - x - 2 < 0$ **f.** $x^2 - 4 > 0$

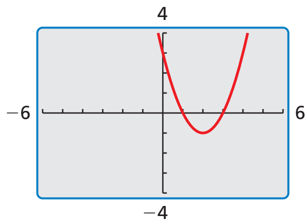
A.



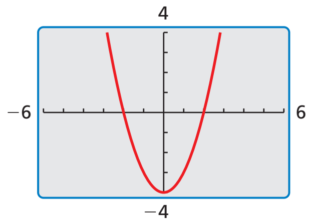
B.



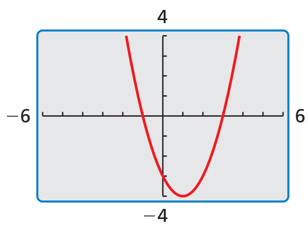
C.



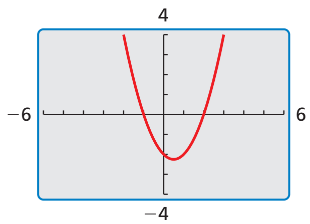
D.



E.



F.



Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes resolver una desigualdad cuadrática?

4. Explica cómo puedes usar la gráfica de la Exploración 1 para resolver cada desigualdad. Luego resuelve cada desigualdad.

a. $x^2 + 2x - 3 > 0$ **b.** $x^2 + 2x - 3 < 0$ **c.** $x^2 + 2x - 3 \ge 0$

3.6 Lección

Vocabulario Esencial

desigualdad cuadrática en dos variables, *pág. 140*
desigualdad cuadrática en una variable, *pág. 142*

Anterior
desigualdad lineal en dos variables

Qué aprenderás

- Hacer una gráfica de desigualdades cuadráticas en dos variables.
- Resolver desigualdades cuadráticas en una variable.

Hacer una gráfica de desigualdades cuadráticas en dos variables

Una **desigualdad cuadrática en dos variables** puede escribirse en una de las siguientes formas, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

$$y < ax^2 + bx + c \qquad y > ax^2 + bx + c$$

$$y \leq ax^2 + bx + c \qquad y \geq ax^2 + bx + c$$

La gráfica de una desigualdad cualquiera consiste en todas las soluciones (x, y) de la desigualdad.

Anteriormente, has hecho las gráficas de desigualdades lineales en dos variables. Puedes usar un procedimiento semejante para hacer una gráfica de desigualdades cuadráticas en dos variables.

Concepto Esencial

Hacer una gráfica de una desigualdad cuadrática en dos variables

Para hacer una gráfica de una desigualdad cuadrática en una de las formas anteriores, sigue estos pasos.

Paso 1 Haz una gráfica de la parábola con la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Haz la parábola con línea *discontinua* para las desigualdades con $<$ o $>$ y con línea *continua* para las desigualdades con $\leq$ o $\geq$.

Paso 2 Prueba un punto (x, y) dentro de la parábola para determinar si el punto es una solución de la desigualdad.

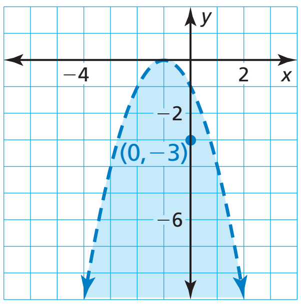
Paso 3 Sombrea la región dentro de la parábola si el punto del Paso 2 es una solución. Sombrea la región fuera de la parábola si no es una solución.

EJEMPLO 1 Hacer una gráfica de desigualdades cuadráticas en dos variables

Haz una gráfica de $y < -x^2 - 2x - 1$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Haz una gráfica de $y = -x^2 - 2x - 1$. Dado que el símbolo de desigualdad es $<$, haz la parábola discontinua.



Paso 2 Prueba un punto dentro de la parábola, tal como $(0, -3)$.

$$y < -x^2 - 2x - 1$$

$$-3 \stackrel{?}{<} -0^2 - 2(0) - 1$$

$$-3 < -1 \checkmark$$

Entonces, $(0, -3)$ es una solución de la desigualdad.

Paso 3 Sombrea la región dentro de la parábola.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Nota que probar un punto es menos complicado cuando el valor de x es 0 (el punto está en el eje y).

EJEMPLO 2 Usar una desigualdad cuadrática en la vida real

Una cuerda gruesa usada para descenso en rappel por un acantilado puede soportar con seguridad un peso W (en libras) siempre y cuando

$$W \le 1480d^2$$

donde d es el diámetro (en pulgadas) de la cuerda. Haz una gráfica de la desigualdad e interpreta la solución.

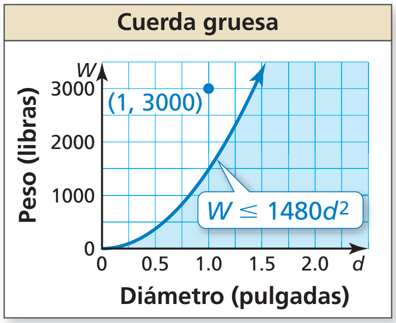
SOLUCIÓN

Haz una gráfica de $W = 1480d^2$ para valores no negativos de d. Dado que el símbolo de desigualdad es $\le$, haz la parábola continua. Prueba un punto dentro de la parábola, tal como (1, 3000).

$$W \le 1480d^2$$

$$3000 \overset{?}{\le} 1480(1)^2$$

$$3000 \not\le 1480$$



▶ Dado que (1, 3000) no es una solución, sombrea la región fuera de la parábola. La región sombreada representa los pesos que pueden ser soportados por cuerdas de diversos diámetros.

Hacer una gráfica de un *sistema* de desigualdades cuadráticas es semejante a hacer una gráfica de un sistema de desigualdades lineales. Primero haz una gráfica de cada desigualdad en el sistema. Luego identifica la región en el plano de coordenadas común a todas las gráficas. Esta región se conoce como la *gráfica del sistema*.

EJEMPLO 3 Hacer una gráfica de un sistema de desigualdades cuadráticas

Haz la gráfica del sistema de desigualdades cuadráticas.

$y < -x^2 + 3$ Desigualdad 1

$y \ge x^2 + 2x - 3$ Desigualdad 2

Verifica

Verifica que un punto en la región de la solución como (0, 0), sea una solución del sistema.

$$y < -x^2 + 3$$

$$0 \overset{?}{<} -0^2 + 3$$

$$0 < 3 \ \checkmark$$

$$y \ge x^2 + 2x - 3$$

$$0 \overset{?}{\ge} 0^2 + 2(0) - 3$$

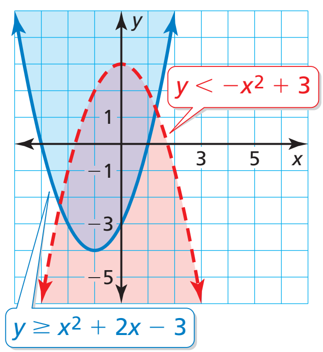
$$0 \ge -3 \ \checkmark$$

SOLUCIÓN

Paso 1 Haz la gráfica de $y < -x^2 + 3$. La gráfica es la región roja dentro (pero no incluyendo) la parábola $y = -x^2 + 3$.

Paso 2 Haz la gráfica de $y \ge x^2 + 2x - 3$. La gráfica es la región azul dentro e incluyendo la parábola $y = x^2 + 2x - 3$.

Paso 3 Identifica la región morada donde las dos gráficas se superponen. Esta región es la gráfica del sistema.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Haz una gráfica de la desigualdad.

1. $y \ge x^2 + 2x - 8$ **2.** $y \le 2x^2 - x - 1$ **3.** $y > -x^2 + 2x + 4$

4. Haz una gráfica del sistema de desigualdades que consista en $y \le -x^2$ y $y > x^2 - 3$.

Resolver desigualdades cuadráticas en una variable

Una **desigualdad cuadrática en una variable** puede escribirse en una de las siguientes formas, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$$

Puedes resolver desigualdades cuadráticas usando métodos algebraicos o gráficas.

EJEMPLO 4 Resolver una desigualdad cuadrática de forma algebraica

Resuelve $x^2 - 3x - 4 < 0$ de forma algebraica.

SOLUCIÓN

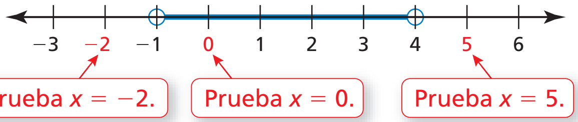
Primero, escribe y resuelve la ecuación obtenida reemplazando $<$ con $=$.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad \text{Escribe la ecuación relacionada.}$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factoriza.}$$

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -1 \qquad \text{Propiedad del producto cero}$$

Los números -1 y 4 son los *valores críticos* de la desigualdad original. Marca -1 y 4 en una recta numérica, usando puntos vacíos porque los valores no satisfacen la desigualdad. Los valores críticos de x dividen la recta numérica en tres intervalos. Prueba un valor de x en cada intervalo para determinar si satisface la desigualdad.



$(-2)^2 - 3(-2) - 4 = 6 \nless 0 \qquad 0^2 - 3(0) - 4 = -4 < 0 \; ✓ \qquad 5^2 - 3(5) - 4 = 6 \nless 0$

▶ Entonces, la solución es $-1 < x < 4$.

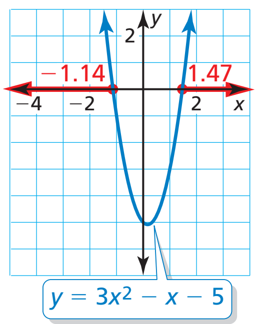
Otra forma de resolver $ax^2 + bx + c < 0$ es haciendo primero la gráfica de la función relacionada $y = ax^2 + bx + c$. Luego, dado que el símbolo de la desigualdad es $<$, identifica los valores de x para los cuales la gráfica está por *debajo* del eje x. Puedes usar un procedimiento similar para resolver desigualdades cuadráticas que incluyan $\leq$, $>$, o $\geq$.

EJEMPLO 5 Resolver una desigualdad cuadrática haciendo una gráfica

Resuelve $3x^2 - x - 5 \geq 0$ haciendo una gráfica.

SOLUCIÓN

La solución consiste en los valores de x para los cuales la gráfica de $y = 3x^2 - x - 5$ está en el eje x o por encima de él. Halla las intersecciones con el eje x de la gráfica imaginando que $y = 0$ y usando la fórmula cuadrática para resolver $0 = 3x^2 - x - 5$ para hallar x.



$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} \qquad a = 3, b = -1, c = -5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{6} \qquad \text{Simplifica.}$$

Las soluciones son $x \approx -1.14$ y $x \approx 1.47$. Dibuja una parábola que se abre hacia arriba y que tenga a -1.14 y 1.47 como intersecciones con el eje x. La gráfica está en o por encima del eje x hacia la izquierda de (e incluyendo) $x = -1.14$ y hacia la derecha de (e incluyendo) $x \approx 1.47$.

▶ La solución de la desigualdad es aproximadamente $x \leq -1.14$ o $x \geq 1.47$.

EJEMPLO 6 Representar con matemáticas

Un estacionamiento rectangular debe tener un perímetro de 440 pies y un área de por lo menos 8000 pies cuadrados. Describe las posibles dimensiones del estacionamiento.

SOLUCIÓN

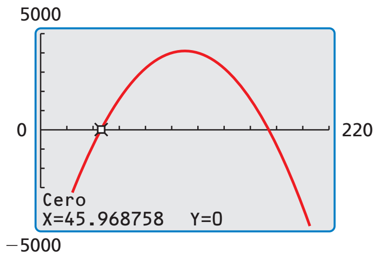
1. **Comprende el problema** Te dan el perímetro y el área mínima de un estacionamiento. Te piden determinar las posibles dimensiones del estacionamiento.
2. **Haz un plan** Usa las fórmulas de perímetro y de área para escribir una desigualdad cuadrática describiendo las posibles dimensiones del estacionamiento. Luego resuelve la desigualdad.
3. **Resuelve el problema** Imagina que ℓ representa la longitud (en pies) y w el ancho (en pies) de estacionamiento.

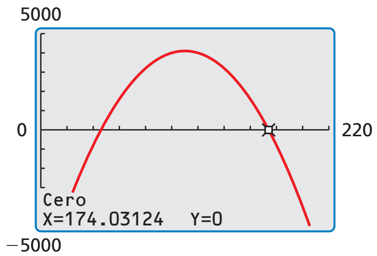
Perímetro $= 440$	Área ≥ 8000
$2\ell + 2w = 440$	$\ell w \geq 8000$

Resuelve la ecuación del perímetro w para hallar $w = 220 - \ell$. Sustituye esto en la desigualdad del área para obtener una desigualdad cuadrática en una variable.

$\ell w \geq 8000$	Escribe la desigualdad del área.
$\ell(220 - \ell) \geq 8000$	Sustituye $220 - \ell$ por w.
$220\ell - \ell^2 \geq 8000$	Propiedad distributiva
$-\ell^2 + 220\ell - 8000 \geq 0$	Escribe en forma estándar.

Usa una calculadora gráfica para hallar las intersecciones con el eje ℓ de $y = -\ell^2 + 220\ell - 8000$.





Las intersecciones con el eje ℓ son $\ell \approx 45.97$ y $\ell \approx 174.03$. La solución consiste en los valores de ℓ para los cuales la gráfica pertenece en el eje ℓ o por encima de él. La gráfica pertenece en el eje ℓ o por encima del eje ℓ cuando $45.97 \leq \ell \leq 174.03$.

▶ Entonces, la dimensión aproximada del estacionamiento es como mínimo 46 pies y como máximo 174 pies.

4. **Verifícalo** Elige una longitud en la región de la solución, tal como $\ell = 100$ y halla el ancho. Luego verifica que las dimensiones satisfagan la desigualdad del área original.

$2\ell + 2w = 440$	$\ell w \geq 8000$
$2(100) + 2w = 440$	$100(120) \overset{?}{\geq} 8000$
$w = 120$	$12{,}000 \geq 8000$ ✓

OTRA MANERA

Puedes hacer la gráfica de cada lado de $220\ell - \ell^2 = 8000$ y usa los puntos de intersección para determinar cuándo $220\ell - \ell^2$ es mayor que o igual a 8000.

USAR LA TECNOLOGÍA

Las variables mostradas cuando se usa la tecnología pueden no unirse a las variables usadas en las aplicaciones. En las gráficas mostradas, la longitud ℓ corresponde a la variable independiente x.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la desigualdad.

5. $2x^2 + 3x \leq 2$
6. $-3x^2 - 4x + 1 < 0$
7. $2x^2 + 2 > -5x$
8. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 6, el área debe ser por lo menos 8500 pies cuadrados. Describe las posibles dimensiones del estacionamiento.

3.6 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Compara las gráficas de una desigualdad cuadrática en una variable con la gráfica de una desigualdad cuadrática en dos variables.

2. **ESCRIBIR** Explica cómo resolver $x^2 + 6x - 8 < 0$ usando métodos algebraicos y usando gráficas.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, une la desigualdad con su gráfica. Explica tu razonamiento.

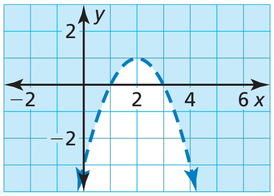
3. $y \leq x^2 + 4x + 3$

4. $y > -x^2 + 4x - 3$

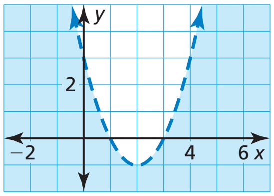
5. $y < x^2 - 4x + 3$

6. $y \geq x^2 + 4x + 3$

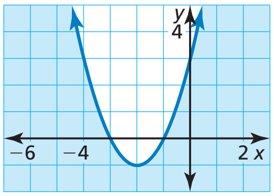
A.



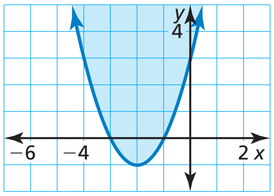
B.



C.



D.



En los Ejercicios 7–14, haz una gráfica de la desigualdad. *(Consulta el Ejemplo 1).*

7. $y < -x^2$

8. $y \geq 4x^2$

9. $y > x^2 - 9$

10. $y < x^2 + 5$

11. $y \leq x^2 + 5x$

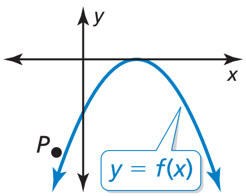
12. $y \geq -2x^2 + 9x - 4$

13. $y > 2(x + 3)^2 - 1$

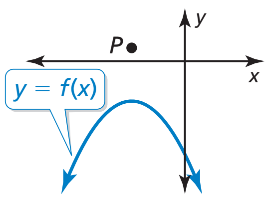
14. $y \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

ANALIZAR RELACIONES **En los Ejercicios 15 y 16, usa la gráfica para escribir una desigualdad en términos de $f(x)$ para que el punto P sea una solución.**

15.

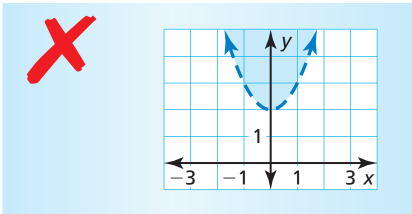


16.

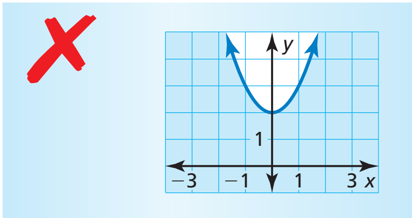


ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 17 y 18, describe y corrige el error cometido al hacer la gráfica de $y \geq x^2 + 2$.**

17.



18.



19. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Una repisa de madera en un librero puede soportar de forma segura un peso W (en libras) siempre y cuando $W \leq 115x^2$, donde x es el grosor (en pulgadas) de la repisa. Haz una gráfica de la desigualdad e interpreta la solución. *(Consulta el Ejemplo 2).*

20. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Una cuerda de alambre puede soportar de forma segura un peso W (en libras) siempre y cuando $W \leq 8000d^2$, donde d es el diámetro (en pulgadas) de la cuerda. Haz una gráfica de la desigualdad e interpreta la solución.

En los Ejercicios 21–26, haz una gráfica del sistema de desigualdades cuadráticas. *(Consulta el Ejemplo 3).*

21. $y \geq 2x^2$
 $y < -x^2 + 1$

22. $y > -5x^2$
 $y > 3x^2 - 2$

23. $y \leq -x^2 + 4x - 4$
 $y < x^2 + 2x - 8$

24. $y \geq x^2 - 4$
 $y \leq -2x^2 + 7x + 4$

25. $y \geq 2x^2 + x - 5$
 $y < -x^2 + 5x + 10$

26. $y \geq x^2 - 3x - 6$
 $y \geq x^2 + 7x + 6$

En los Ejercicios 27–34, resuelve la desigualdad de forma algebraica. ***(Consulta el Ejemplo 4).***

27. $4x^2 < 25$

28. $x^2 + 10x + 9 < 0$

29. $x^2 - 11x \geq -28$

30. $3x^2 - 13x > -10$

31. $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

32. $4x^2 + 8x - 21 \geq 0$

33. $\frac{1}{2}x^2 - x > 4$

34. $-\frac{1}{2}x^2 + 4x \leq 1$

En los Ejercicios 35–42, resuelve la desigualdad haciendo una gráfica. ***(Consulta el Ejemplo 5).***

35. $x^2 - 3x + 1 < 0$

36. $x^2 - 4x + 2 > 0$

37. $x^2 + 8x > -7$

38. $x^2 + 6x < -3$

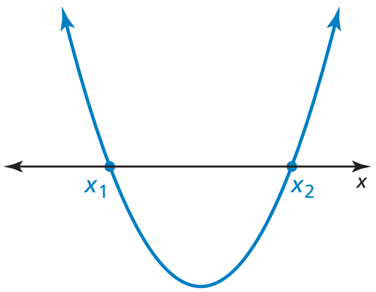
39. $3x^2 - 8 \leq -2x$

40. $3x^2 + 5x - 3 < 1$

41. $\frac{1}{3}x^2 + 2x \geq 2$

42. $\frac{3}{4}x^2 + 4x \geq 3$

43. SACAR CONCLUSIONES Considera la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$.



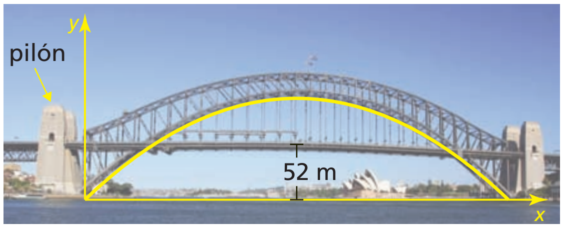
a. ¿Cuáles son las soluciones de $ax^2 + bx + c < 0$?

b. ¿Cuáles son las soluciones de $ax^2 + bx + c > 0$?

c. La gráfica de g representa una reflexión en el eje x de la gráfica de f. ¿Para qué valores de x es $g(x)$ positivo?

44. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Una fuente rectangular tiene un perímetro de 400 pies y un área de por lo menos 9100 pies. Describe los posibles anchos de la fuente. ***(Consulta el Ejemplo 6).***

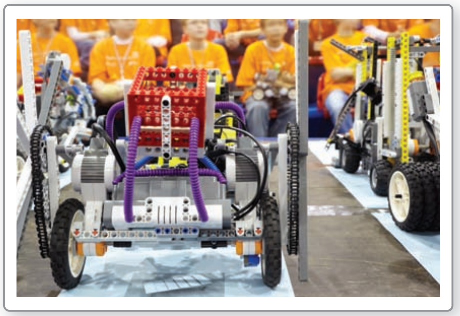
45. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS El arco del puente Harbor Bridge en Sydney, Australia, puede representarse mediante $y = -0.00211x^2 + 1.06x$, donde x es la distancia (en metros) de los pilones del lado izquierdo y y es la altura (en metros) del arco por encima del agua. ¿Para qué distancias x está el arco por encima del camino?



46. RESOLVER PROBLEMAS El número T de equipos que han participado en una competencia de construcción de robots para alumnos de secundaria durante un período de tiempo reciente x (en años) puede representarse mediante

$$T(x) = 17.155x^2 + 193.68x + 235.81,\ 0 \leq x \leq 6.$$

¿Después de cuántos años el número de equipos es mayor que 1000? Justifica tu respuesta.



47. RESOLVER PROBLEMAS Un estudio halló que el tiempo de reacción $A(x)$ de un conductor a los estímulos auditivos y su tiempo de reacción $V(x)$ a los estímulos visuales (ambos en milisegundos) puede representare mediante

$$A(x) = 0.0051x^2 - 0.319x + 15,\ 16 \leq x \leq 70$$

$$V(x) = 0.005x^2 - 0.23x + 22,\ 16 \leq x \leq 70$$

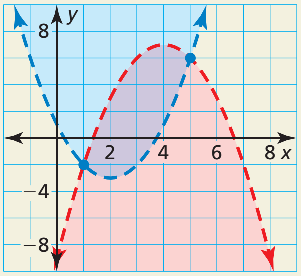
donde x es la edad (en años) del conductor.

a. Escribe una desigualdad que puedes usar para hallar los valores de x para los cuales $A(x)$ es menor que $V(x)$.

b. Usa una calculadora gráfica para resolver la desigualdad $A(x) < V(x)$. Describe cómo usaste el dominio $16 \leq x \leq 70$ para determinar una solución razonable.

c. En base a tus resultados de las partes (a) y (b), ¿crees que un conductor reaccionaría más rápidamente a una luz de semáforo que está cambiando de verde a amarillo o a la sirena de una ambulancia que se está acercando? Explica.

48. **¿CÓMO LO VES?** La gráfica muestra un sistema de desigualdades cuadráticas.



a. Identifica dos soluciones del sistema.

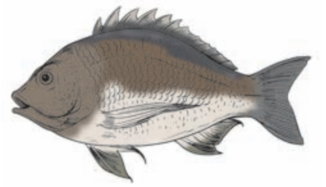
b. ¿Los puntos $(1, -2)$ y $(5, 6)$ son soluciones del sistema? Explica.

c. ¿Es posible cambiar el(los) símbolo(s) de la desigualdad para que uno, no ambos puntos en la parte (b), sea una solución del sistema? Explica.

49. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La longitud L (en milímetros) de las larvas de un pez pargo negro puede representarse mediante

$$L(x) = 0.00170x^2 + 0.145x + 2.35,\ 0 \le x \le 40$$

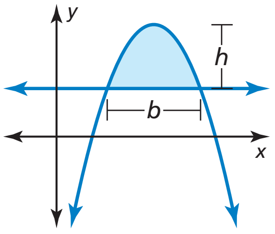
donde x es la edad (en días) de las larvas. Escribe y resuelve una desigualdad para hallar a qué edades la longitud de una larva tiende a ser mayor que 10 milímetros. Explica cómo el dominio dado afecta la solución.



50. **ARGUMENTAR** Afirmas que el sistema de desigualdades a continuación, donde a y b son números reales, no tienen ninguna solución. Tu amigo afirma que el sistema siempre tendrá al menos una solución. ¿Quién tiene razón? Explica.

$$y < (x + a)^2$$
$$y < (x + b)^2$$

51. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** El área A de la región encerrada por una parábola y una línea horizontal puede representarse mediante $A = \frac{2}{3}bh$, donde b y h son como las define el diagrama. Halla el área de la región determinada por cada par de desigualdades.



a. $y \le -x^2 + 4x$
$y \ge 0$

b. $y \ge x^2 - 4x - 5$
$y \le 7$

52. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Dibuja el logo de una compañía que esté creado por la intersección de dos desigualdades cuadráticas. Justifica tu respuesta.

53. **RAZONAR** Un camión de 11 pies de alto y 7 pies de ancho está viajando por debajo de un arco. El arco puede representarse mediante $y = -0.0625x^2 + 1.25x + 5.75$, donde x y y se miden en pies.

a. ¿El camión cabrá bajo el arco? Explica.

b. ¿Cuál es el ancho máximo que puede tener un camión de 11 pies de alto y aún así poder pasar bajo el arco?

c. ¿Cuál es la altura máxima que puede tener un camión de 7 pies de ancho y aún así poder pasar bajo el arco?

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Haz una gráfica de la función. Rotula la(s) intersección(es) con el eje x y la intersección con el eje y. *(Sección 2.2)*

54. $f(x) = (x + 7)(x - 9)$

55. $g(x) = (x - 2)^2 - 4$

56. $h(x) = -x^2 + 5x - 6$

Halla el valor mínimo o el valor máximo de la función. Luego describe dónde está aumentando y disminuyendo la función. *(Sección 2.2)*

57. $f(x) = -x^2 - 6x - 10$

58. $h(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$

59. $f(x) = -(x - 3)(x + 7)$

60. $h(x) = x^2 + 3x - 18$

3.4–3.6 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

fórmula cuadrática, *pág. 122*
discriminante, *pág. 124*
sistema de ecuaciones no lineales, *pág. 132*
desigualdad cuadrática en dos variables, *pág. 140*
desigualdad cuadrática en una variable, *pág. 142*

Conceptos Esenciales

Sección 3.4

Resolver ecuaciones usando la fórmula cuadrática, *pág. 122*
Analizar el discriminante de $ax^2 + bx + c = 0$, *pág. 124*
Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, *pág. 125*
Representar objetos lanzados, *pág. 126*

Sección 3.5

Resolver sistemas de ecuaciones no lineales, *pág. 132*
Resolver ecuaciones haciendo gráficas, *pág. 135*

Sección 3.6

Hacer una gráfica de una desigualdad cuadrática de dos variables, *pág. 140*
Resolver desigualdades cuadráticas en una variable, *pág. 142*

Prácticas matemáticas

1. ¿Cómo puedes usar la tecnología para determinar cuál de los cohetes aterriza primero en la parte (b) del Ejercicio 65 de la página 129?
2. ¿Qué pregunta puedes hacer para ayudar a la persona evitar cometer el error del Ejercicio 54 de la página 138?
3. Explica tu plan para hallar los anchos posibles de la fuente del Ejercicio 44 de la página 145.

Tarea de desempeño

Álgebra en genética: La Ley de Hardy-Weinberg

Algunas personas tienen el lóbulo de la oreja pegado, que es el rasgo recesivo. Otras lo tienen colgando, que es el rasgo dominante. ¿Qué porcentaje de personas llevan ambos rasgos?

Para explorar las respuestas a estas preguntas y más, visita ***BigIdeasMath.com***.

3 Repaso del capítulo

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

3.1 Resolver ecuaciones cuadráticas *(págs. 93–102)*

En una clase de física, los alumnos deben construir una máquina de Rube Goldberg que deja caer una bola de una mesa de 3 pies de alto. Escribe una función *h* (en pies) de la bola después de *t* segundos. ¿Cuánto tiempo está la bola en el aire?

La altura inicial es 3, entonces la representación es $h = -16t^2 + 3$. Halla los ceros de la función.

$$h = -16t^2 + 3 \qquad \text{Escribe la función.}$$

$$0 = -16t^2 + 3 \qquad \text{Sustituye 0 por } h.$$

$$-3 = -16t^2 \qquad \text{Resta 3 de cada lado.}$$

$$\frac{-3}{-16} = t^2 \qquad \text{Divide cada lado entre } -16.$$

$$\pm\sqrt{\frac{3}{16}} = t \qquad \text{Saca la raíz cuadrada de cada lado.}$$

$$\pm 0.3 \approx t \qquad \text{Usa una calculadora.}$$

▶ Rechaza la solución negativa, –0.3 porque el tiempo tiene que ser positivo. La bola caerá por unos 0.3 segundos antes de tocar el suelo.

1. Resuelve $x^2 - 2x - 8 = 0$ haciendo una gráfica.

Resuelve la ecuación usando raíces cuadradas o mediante la factorización.

2. $3x^2 - 4 = 8$ **3.** $x^2 + 6x - 16 = 0$ **4.** $2x^2 - 17x = -30$

5. Un cercado rectangular en el zoológico tiene 35 pies de largo por 18 pies de ancho. El zoológico desea duplicar el área del cercado añadiendo la misma distancia *x* a la longitud y al ancho. Escribe y resuelve una ecuación para hallar el valor de *x*. ¿Cuáles son las dimensiones del cercado?

3.2 Números complejos *(págs. 103–110)*

Realiza cada operación. Escribe la respuesta en forma estándar.

a. $(3 - 6i) - (7 + 2i) = (3 - 7) + (-6 - 2)i$
$= -4 - 8i$

b. $5i(4 + 5i) = 20i + 25i^2$
$= 20i + 25(-1)$
$= -25 + 20i$

6. Halla los valores de *x* y *y* que satisfagan la ecuación $36 - yi = 4x + 3i$.

Realiza la operación. Escribe la respuesta en forma estándar.

7. $(-2 + 3i) + (7 - 6i)$ **8.** $(9 + 3i) - (-2 - 7i)$ **9.** $(5 + 6i)(-4 + 7i)$

10. Resuelve $7x^2 + 21 = 0$.

11. Halla los ceros de $f(x) = 2x^2 + 32$.

3.3 Completar el cuadrado (págs 111–118)

Resuelve $x^2 + 12x + 8 = 0$ completando el cuadrado.

$x^2 + 12x + 8 = 0$	Escribe la ecuación.
$x^2 + 12x = -8$	Escribe el lado izquierdo en la forma de $x^2 + bx$.
$x^2 + 12x + 36 = -8 + 36$	Suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 36$ a cada lado.
$(x + 6)^2 = 28$	Escribe el lado izquierdo como un binomio al cuadrado.
$x + 6 = \pm\sqrt{28}$	Saca la raíz cuadrada de cada lado.
$x = -6 \pm \sqrt{28}$	Resta 6 de cada lado.
$x = -6 \pm 2\sqrt{7}$	Simplifica el radical.

▶ Las soluciones son $x = -6 + 2\sqrt{7}$ y $x = -6 - 2\sqrt{7}$.

12. Un empleado en el estadio local está lanzando camisetas desde un cañón para lanzar camisetas a la multitud durante un intermedio de un partido de futbol americano. La altura h (en pies) de la camiseta después de t segundos puede representarse mediante $h = -16t^2 + 96t + 4$. Halla la altura máxima de la camiseta.

Resuelve la ecuación completando el cuadrado.

13. $x^2 + 16x + 17 = 0$ **14.** $4x^2 + 16x + 25 = 0$ **15.** $9x(x - 6) = 81$

16. Escribe $y = x^2 - 2x + 20$ en forma en vértice. Luego identifica el vértice.

3.4 Usar la fórmula cuadrática (págs. 121–130)

Resuelve $-x^2 + 4x = 5$ usando la fórmula cuadrática.

$-x^2 + 4x = 5$	Escribe la ecuación.
$-x^2 + 4x - 5 = 0$	Escribe en forma estándar.
$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-5)}}{2(-1)}$	$a = -1$, $b = 4$, $c = -5$
$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$	Simplifica.
$x = \dfrac{-4 \pm 2i}{-2}$	Escribe en términos de i.
$x = 2 \pm i$	Simplifica.

▶ Las soluciones son $2 + i$ y $2 - i$.

Resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática.

17. $-x^2 + 5x = 2$ **18.** $2x^2 + 5x = 3$ **19.** $3x^2 - 12x + 13 = 0$

Halla el discriminante de la ecuación cuadrática y describe el número y tipo de soluciones de la ecuación.

20. $-x^2 - 6x - 9 = 0$ **21.** $x^2 - 2x - 9 = 0$ **22.** $x^2 + 6x + 5 = 0$

3.5 Resolver sistemas no lineales (págs. 131–138)

Resuelve el sistema por eliminación. $2x^2 - 8x + y = -5$ Ecuación 1
$2x^2 - 16x - y = -31$ Ecuación 2

Suma las ecuaciones para eliminar el término y y obtener una ecuación cuadrática en x.

$$\begin{array}{rll} 2x^2 - 8x + y &= -5 & \\ \underline{2x^2 - 16x - y} &\underline{= -31} & \\ 4x^2 - 24x \quad &= -36 & \text{Suma las ecuaciones.} \\ 4x^2 - 24x + 36 &= 0 & \text{Escribe en forma estándar.} \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 & \text{Divide cada lado entre 4.} \\ (x - 3)^2 &= 0 & \text{Patrón de trinomio cuadrado perfecto} \\ x &= 3 & \text{Propiedad del producto cero} \end{array}$$

Para resolver para hallar y, sustituye $x = 3$ en la Ecuación 1 para obtener $y = 1$.

▶ Entonces, la solución es (3, 1).

Resuelve el sistema mediante cualquier método. Explica tu elección del método.

23. $2x^2 - 2 = y$
$-2x + 2 = y$

24. $x^2 - 6x + 13 = y$
$-y = -2x + 3$

25. $x^2 + y^2 = 4$
$-15x + 5 = 5y$

26. Resuelve $-3x^2 + 5x - 1 = 5x^2 - 8x - 3$ haciendo una gráfica.

3.6 Desigualdades cuadráticas (págs. 139–146)

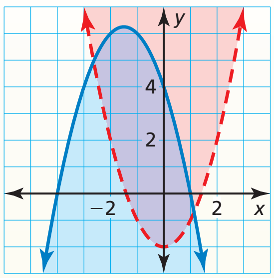
Haz una gráfica de las desigualdades cuadráticas.

$y > x^2 - 2$ Desigualdad 1
$y \leq -x^2 - 3x + 4$ Desigualdad 2

Paso 1 Haz una gráfica de $y > x^2 - 2$. La gráfica es la región roja dentro (pero no incluyendo) de la parábola $y = x^2 - 2$.

Paso 2 Haz una gráfica de $y \leq -x^2 - 3x + 4$. La gráfica es la región azul dentro e incluyendo la parábola $y = -x^2 - 3x + 4$.

Paso 3 Identifica la región morada donde las dos gráficas se superponen. Esta región es la gráfica del sistema.



Haz una gráfica de la desigualdad.

27. $y > x^2 + 8x + 16$

28. $y \geq x^2 + 6x + 8$

29. $x^2 + y \leq 7x - 12$

Haz una gráfica del sistema de desigualdades cuadráticas.

30. $x^2 - 4x + 8 > y$
$-x^2 + 4x + 2 \leq y$

31. $2x^2 - x \geq y - 5$
$0.5x^2 > y - 2x - 1$

32. $-3x^2 - 2x \leq y + 1$
$-2x^2 + x - 5 > -y$

Resuelve la desigualdad.

33. $3x^2 + 3x - 60 \geq 0$

34. $-x^2 - 10x < 21$

35. $3x^2 + 2 \leq 5x$

3 Prueba del capítulo

Resuelve la ecuación usando cualquier método. Explica tu elección de método.

1. $0 = x^2 + 2x + 3$

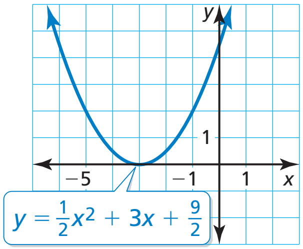
2. $6x = x^2 + 7$

3. $x^2 + 49 = 85$

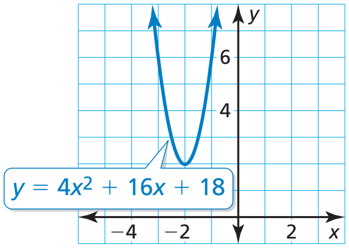
4. $(x + 4)(x - 1) = -x^2 + 3x + 4$

Explica cómo usar la gráfica para hallar el número y el tipo de soluciones de la ecuación cuadrática. Justifica tu respuesta usando el discriminante.

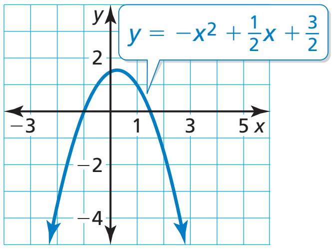
5. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = 0$



6. $4x^2 + 16x + 18 = 0$



7. $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$



Resuelve el sistema de ecuaciones o desigualdades.

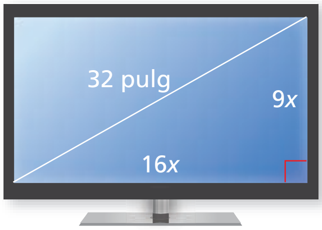
8. $x^2 + 66 = 16x - y$
$2x - y = 18$

9. $y \geq \frac{1}{4}x^2 - 2$
$y < -(x + 3)^2 + 4$

10. $0 = x^2 + y^2 - 40$
$y = x + 4$

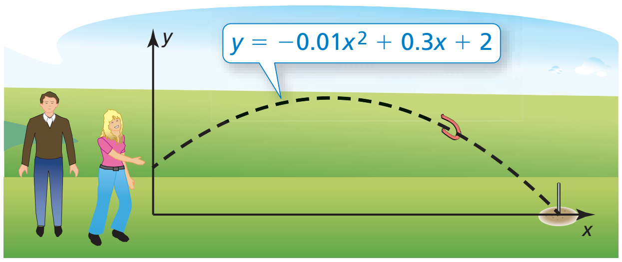
11. Escribe $(3 + 4i)(4 - 6i)$ como un número complejo en forma estándar.

12. La *razón de aspecto* de un TV de pantalla ancha es la razón del ancho de la pantalla con relación a su altura, o 16 : 9. ¿Cuál es el ancho y la altura de una TV de pantalla ancha de 32 pulgadas? Justifica tu respuesta. (*Pista:* Usa el Teorema de Pitágoras y el hecho de que los tamaños de los TV se refieren a la longitud diagonal de la pantalla)



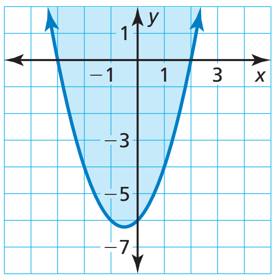
13. La forma del arco Gateway en San Luis, Missouri, puede representarse mediante $y = -0.0063x^2 + 4x$, donde x es la distancia (en pies) desde el pie izquierdo del arco y y es la altura (en pies) del arco por encima del suelo. ¿Para qué distancias de x está el arco a más de 200 pies por encima del suelo? Justifica tu respuesta.

14. Estás jugando un juego de lanzamiento de herraduras. Uno de tus tiros está representado mediante el diagrama, donde x es la posición horizontal de la herradura (en pies) y y es la altura correspondiente (en pies). Halla la altura máxima de la herradura. Luego halla la distancia que recorre la herradura. Justifica tu respuesta.



3 Evaluación acumulativa

1. ¿Se muestra la gráfica de cuál desigualdad?



Ⓐ $y > x^2 + x - 6$

Ⓑ $y \geq x^2 + x - 6$

Ⓒ $y > x^2 - x - 6$

Ⓓ $y \geq x^2 - x - 6$

2. Clasifica cada función según su familia de funciones. Luego describe la transformación de la función madre.

a. $g(x) = x + 4$

b. $h(x) = 5$

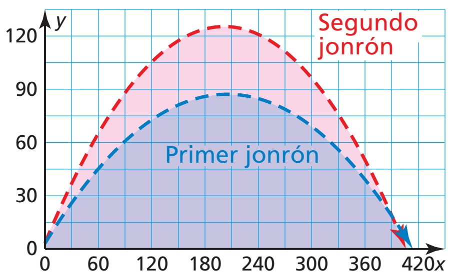
c. $h(x) = x^2 - 7$

d. $g(x) = -|x + 3| - 9$

e. $g(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 1$

f. $h(x) = 6x + 11$

3. Dos jugadores de béisbol hacen jonrones consecutivos. El recorrido de cada jonrón está representado por las parábolas a continuación, donde x es la distancia horizontal (en pies) desde el *home* y y es la altura (en pies) por encima del suelo. Elige el símbolo correcto para cada desigualdad para representar las posibles ubicaciones de la parte superior de la pared exterior.



Primer jonrón: $y \;\boxed{}\; -0.002x^2 + 0.82x + 3.1$

Segundo jonrón: $y \;\boxed{}\; 0.003x^2 + 1.21x + 3.3$

4. Tú afirmas que es posible hacer una función a partir de los valores dados que tenga un eje de simetría en $x = 2$. Tu amigo afirma que es posible hacer una función a partir de los valores dados que tenga un eje de simetría en $x = -2$. ¿Qué valores puedes usar para respaldar tu afirmación? ¿Qué valores respaldan la afirmación de tu amigo?

Tu afirmación
$f(x) = \boxed{}\,x^2 + \boxed{}\,x + 8$

La afirmación de tu amigo
$f(x) = \boxed{}\,x^2 + \boxed{}\,x + 8$

8	−6	−2	0
1	3	5	12

5. ¿Cuáles de los siguientes valores son coordenadas x de las soluciones del sistema?

$$y = x^2 - 6x + 14$$
$$y = 2x + 7$$

-9	-7	-5	-3	-1
1	3	5	7	9

6. La tabla muestra las altitudes de un parapente que desciende a una tasa constante. ¿Cuánto le tomará al parapente descender a una altitud de 100 pies? Justifica tu respuesta.

Tiempo (segundos), t	Altitud (pies), y
0	450
10	350
20	250
30	150

Ⓐ 25 segundos

Ⓑ 35 segundos

Ⓒ 45 segundos

Ⓓ 55 segundos

7. Usa los números y símbolos para escribir la expresión $x^2 + 16$ como el producto de dos binomios. Algunos pueden usarse más de unas vez. Justifica tu respuesta.

$+$	$-$	16	x	)
4	i	2	8	(

8. Elige valores para las constantes h y k en la ecuación $x = \frac{1}{4}(y - k)^2 + h$ para que cada enunciado sea verdadero.

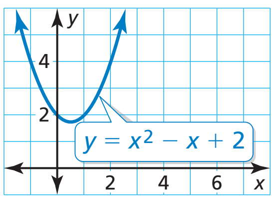
a. La gráfica de $x = \frac{1}{4}\left(y - \square\right)^2 + \square$ es una parábola con su vértice en el segundo cuadrante.

b. La gráfica de $x = \frac{1}{4}\left(y - \square\right)^2 + \square$ es una parábola con su foco en el primer cuadrante.

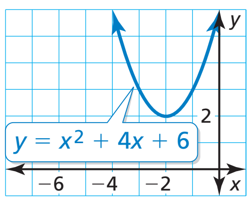
c. La gráfica de $x = \frac{1}{4}\left(y - \square\right)^2 + \square$ es una parábola con su foco en el tercer cuadrante.

9. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan un trinomio cuadrado perfecto? Escribe cada función en forma en vértice completando el cuadrado.

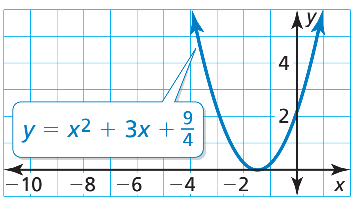
a.



b.



c.



d.