6 Funciones exponenciales y logarítmicas

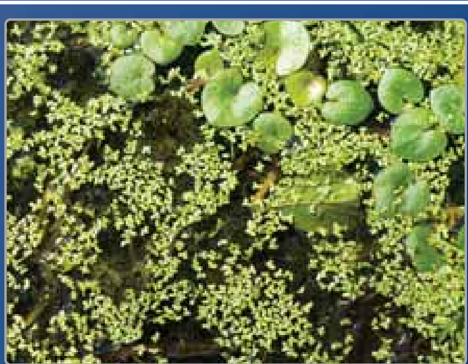
6.1 Funciones de crecimiento y decremento exponencial
6.2 La base natural *e*
6.3 Logaritmos y funciones logarítmicas
6.4 Transformaciones de funciones exponenciales y logarítmicas
6.5 Propiedades de los logaritmos
6.6 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas
6.7 Representar con funciones exponenciales y logarítmicas

La salud de un astronauta *(pág. 347)*

Cocinar *(pág. 335)*

Estudio de grabación *(pág. 330)*

Velocidad del viento en un tornado *(pág. 315)*



Crecimiento de la lenteja de agua *(pág. 301)*

Mantener el dominio de las matemáticas

Usar exponentes

Ejemplo 1 Evalúa $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$ Reescribe $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ como multiplicación repetida.

$$= \left(\frac{1}{9}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$ Multiplica.

$$= \left(-\frac{1}{27}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$ Multiplica.

$$= \frac{1}{81}$$ Multiplica.

Evalúa la expresión.

1. $3 \cdot 2^4$

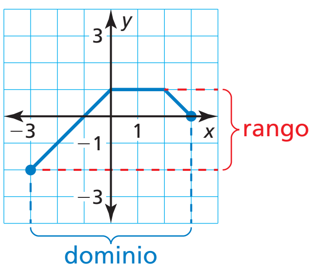
2. $(-2)^5$

3. $-\left(\frac{5}{6}\right)^2$

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

Hallar el dominio y rango de una función

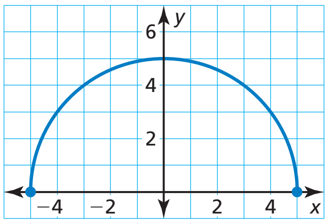
Ejemplo 2 Halla el dominio y el rango de la función que se representa en la gráfica.



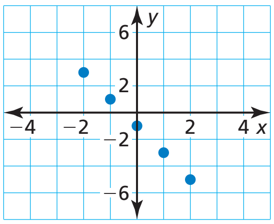
El dominio es $-3 \le x \le 3$.
El rango es $-2 \le y \le 1$.

Halla el dominio y el rango de la función que se representa en la gráfica.

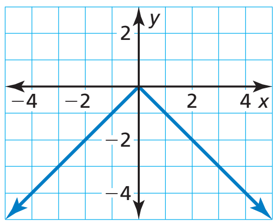
5.



6.



7.



8. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Considera las expresiones -4^n y $(-4)^n$, donde n es un entero. ¿Para qué valores de n es negativa cada expresión? ¿Y positiva? Explica tu razonamiento.

Prácticas matemáticas

Los estudiantes que dominan las matemáticas saben cuándo es apropiado usar métodos generales y métodos abreviados.

Modelos exponenciales

Concepto Esencial

Prueba de razones consecutivas para modelos exponenciales

Considera una tabla de valores de la forma dada.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9

Si las razones consecutivas de los valores y son todas iguales a un valor común r, entonces y se puede representar mediante una función exponencial. Si $r > 1$, el modelo representa un *crecimiento* exponencial.

$r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ Razón común

$y = a_0 r^x$ Modelo exponencial

EJEMPLO 1 **Representar datos de la vida real**

La tabla muestra la cantidad A (en dólares) en una cuenta de ahorros a lo largo del tiempo. Escribe un modelo para la cantidad en la cuenta en función del tiempo t (en años). Luego usa un modelo para hallar la cantidad después de 10 años.

Año, *t*	0	1	2	3	4	5
Cantidad, *A*	\$1000	\$1040	\$1081.60	\$1124.86	\$1169.86	\$1216.65

SOLUCIÓN

Comienza por determinar si las razones de las cantidades consecutivas son iguales.

$$\frac{1040}{1000} = 1.04,\quad \frac{1081.60}{1040} = 1.04,\quad \frac{1124.86}{1081.60} \approx 1.04,\quad \frac{1169.86}{1124.86} \approx 1.04,\quad \frac{1216.65}{1169.86} \approx 1.04$$

Las razones de las cantidades consecutivas son iguales, entonces la cantidad A después de t años se puede modelar mediante

$$A = 1000(1.04)^t.$$

Usando este modelo, la cantidad si $t = 10$ es $A = 1000(1.04)^{10} = \$1480.24$.

Monitoreo del progreso

Determina si los datos se pueden representar mediante una función exponencial o lineal. Explica tu razonamiento. Luego escribe el modelo apropiado y halla y si $x = 10$.

1.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	8	16

2.

x	0	1	2	3	4
y	0	4	8	12	16

3.

x	0	1	2	3	4
y	1	4	7	10	13

4.

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	27	81

6.1 Funciones de crecimiento y decremento exponencial

Pregunta esencial

¿Cuáles son algunas de las características de la gráfica de una función exponencial?

Puedes usar una calculadora gráfica para evaluar una función exponencial. Por ejemplo, considera la función exponencial $f(x) = 2^x$.

Valor de la función	Tecleo en la calculadora gráfica	Representación
$f(-3.1) = 2^{-3.1}$	2 [^] [(–)] 3.1 [INTRO]	0.1166291
$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2^{2/3}$	2 [^] [(] 2 [÷] 3 [)] [INTRO]	1.5574011

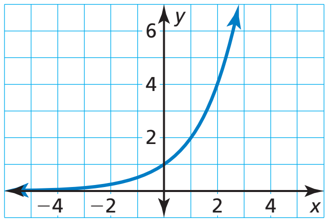
EXPLORACIÓN 1 Identificar gráficas de funciones exponenciales

Trabaja con un compañero. Une cada función exponencial con su gráfica. Usa una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función, si es necesario.

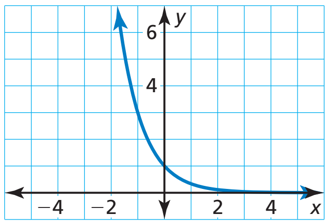
a. $f(x) = 2^x$ **b.** $f(x) = 3^x$ **c.** $f(x) = 4^x$

d. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e.** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **f.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

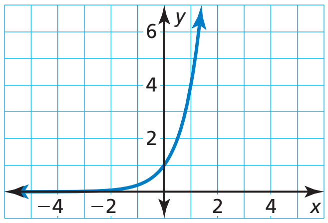
A.



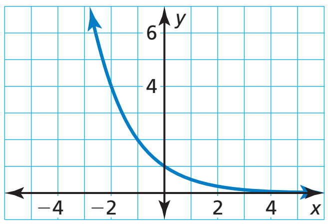
B.



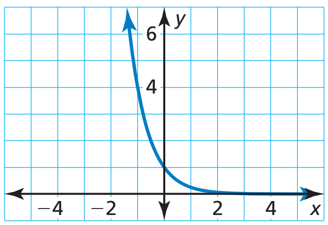
C.



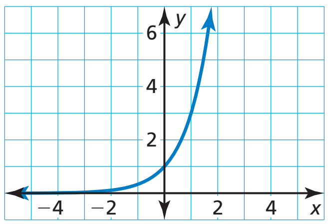
D.



E.



F.



CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas justificar tus conclusiones y comunicarlas a otras personas.

EXPLORACIÓN 2 Características de gráficas de funciones exponenciales

Trabaja con un compañero. Usa las gráficas en la exploración 1 para determinar el dominio, el rango y la intersección con el eje y de la gráfica de $f(x) = b^x$, donde b es un número real positivo distinto de 1. Explica tu razonamiento.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cuáles son algunas de las características de la gráfica de una función exponencial?

4. En la Exploración 2, ¿es posible que la gráfica de $f(x) = b^x$ tenga una intersección con el eje x? Explica tu razonamiento.

6.1 Lección

Vocabulario Esencial

función exponencial, *pág. 296*
función de crecimiento exponencial, *pág. 296*
factor de crecimiento, *pág. 296*
asíntota, *pág. 296*
función de decremento exponencial, *pág. 296*
factor de decremento, *pág. 296*

Anterior
propiedades de los exponentes

Qué aprenderás

- Hacer una gráfica de la función de crecimiento exponencial y la función de decremento
- Usar modelos exponenciales para resolver problemas de la vida real.

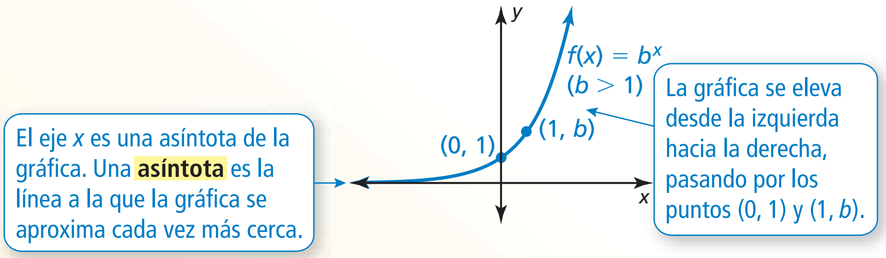
Funciones de crecimiento y decremento exponencial

Una **función exponencial** tiene la forma $y = ab^x$, donde $a \neq 0$ y la base b es un número real positivo distinto de 1. Si $a > 0$ y $b > 1$, entonces $y = ab^x$ es una **función de crecimiento exponencial**, y b se denomina **factor de crecimiento**. El tipo más sencillo de función de crecimiento exponencial tiene la forma $y = b^x$.

Concepto Esencial

Función madre para funciones de crecimiento exponencial

La función $f(x) = b^x$, donde $b > 1$, es la función madre para la familia de funciones de crecimiento exponencial en base b. La gráfica muestra la forma general de una función de crecimiento exponencial.



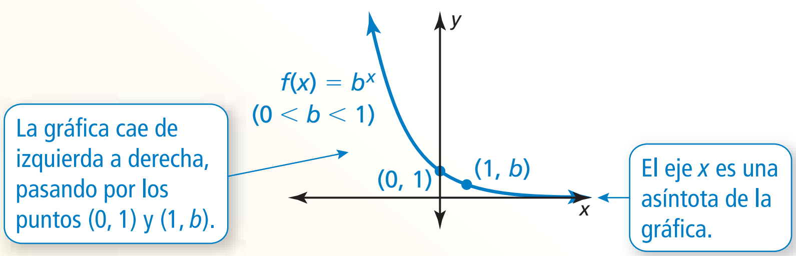
El dominio de $f(x) = b^x$ es todos los números reales. El rango es $y > 0$.

Si $a > 0$ y $0 < b < 1$, entonces $y = ab^x$ es una **función de decremento exponencial**, y b se denomina **factor de decremento**.

Concepto Esencial

Función madre para funciones de decremento exponencial

La función $f(x) = b^x$, donde $0 < b < 1$, es la función madre para la familia de las funciones de decremento exponencial en base b. La gráfica muestra la forma general de una función de decremento exponencial.



El dominio de $f(x) = b^x$ es todos los números reales. El rango es $y > 0$.

EJEMPLO 1 **Hacer gráficas de funciones de crecimiento y decremento exponencial**

Indica si cada función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego haz una gráfica de la función.

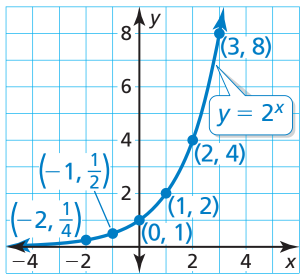
a. $y = 2^x$ **b.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

SOLUCIÓN

a. Paso 1 Identifica el valor de la base. La base, 2, es mayor que 1, entonces la función representa el crecimiento exponencial.

Paso 2 Haz una tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



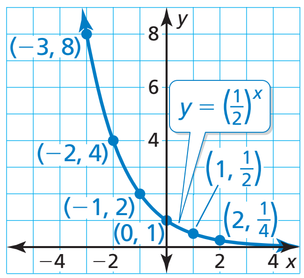
Paso 3 Marca los puntos de la tabla.

Paso 4 Dibuja, *de izquierda a derecha*, una curva suave que comience justo sobre el eje x, pase por los puntos marcados y se desplace hacia arriba a la derecha.

b. Paso 1 Identifica el valor de la base. La base, $\frac{1}{2}$, es mayor que 0 y menor que 1, entonces la función representa el decremento exponencial.

Paso 2 Haz una tabla de valores.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Paso 3 Marca los puntos de la tabla.

Paso 4 Dibuja, *de derecha a izquierda*, una curva suave que comience justo sobre el eje x, pase por los puntos marcados y se desplace hacia arriba a la izquierda.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Indica si la función representa *crecimiento exponencial o decremento exponencial*. Luego haz una gráfica de la función.

1. $y = 4^x$

2. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

3. $f(x) = (0.25)^x$

4. $f(x) = (1.5)^x$

Modelos exponenciales

Algunas cantidades de la vida real aumentan o disminuyen en un porcentaje fijo cada año (o algún otro periodo de tiempo). El monto y de tal cantidad después de t años se puede representar mediante una de estas ecuaciones.

Modelo de crecimiento exponencial

$$y = a(1 + r)^t$$

Modelo de decremento exponencial

$$y = a(1 - r)^t$$

Observa que a es el monto inicial y r es el porcentaje de aumento o disminución escrito como decimal. La cantidad $1 + r$ es el factor de crecimiento, y $1 - r$ es el factor de decremento.

EJEMPLO 2 Resolver un problema de la vida real

El valor de un carro y (en miles de dólares) se puede aproximar mediante el modelo $y = 25(0.85)^t$, donde t es el número de años desde que el carro era nuevo.

a. Indica si el modelo representa el crecimiento exponencial o el decremento exponencial.

b. Identifica el porcentaje de aumento o disminución anual en el valor del carro.

c. Estima cuándo el valor del carro será de $8000.

RAZONAR CUANTITATIVAMENTE

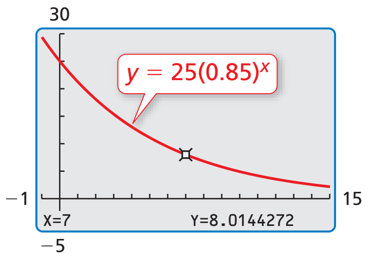
El porcentaje de disminución, 15%, te indica cuánto valor *pierde* el carro cada año. El factor de decremento, 0.85, te indica qué fracción del valor del carro *permanece* cada año.

SOLUCIÓN

a. La base, 0.85, es mayor que 0 y menor que 1, entonces el modelo representa un decremento exponencial.

b. Dado que t está dado en años y el factor de decremento $0.85 = 1 - 0.15$, el porcentaje de disminución es 0.15, o 15%.

c. Usa la función *trazar* en la calculadora gráfica para determinar que $y \approx 8$ si $t = 7$. Después de 7 años, el valor del carro será de aproximadamente $8000.



EJEMPLO 3 Escribir un modelo exponencial

En el año 2000, la población mundial era de aproximadamente 6.09 mil millones. Durante los siguientes 13 años, la población mundial aumentó aproximadamente 1.18% cada año.

a. Escribe un modelo de crecimiento exponencial que dé la población y (en miles de millones) t años después del año 2000. Estima la población mundial en 2005.

b. Estima el año en el que la población mundial fue de 7 mil millones.

SOLUCIÓN

a. La cantidad inicial es $a = 6.09$ y el aumento porcentual es $r = 0.0118$. Entonces, el modelo de crecimiento exponencial es

$$y = a(1 + r)^t \qquad \text{Escribe el modelo de crecimiento exponencial.}$$

$$= 6.09(1 + 0.0118)^t \qquad \text{Sustituye 6.09 por } a \text{ y 0.0118 por } r.$$

$$= 6.09(1.0118)^t. \qquad \text{Simplifica.}$$

Usando este modelo, puedes estimar que la población mundial en 2005 ($t = 5$) es $y = 6.09(1.0118)^5 \approx 6.46$ mil millones.

X	Y1
6	6.5341
7	6.6112
8	6.6892
9	6.7681
10	6.848
11	6.9288
12	7.0106

X=12

b. Usa la función *tabla* de una calculadora gráfica para determinar que $y \approx 7$ si $t = 12$. Entonces, la población mundial era de aproximadamente 7 mil millones en 2012.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

5. ¿QUÉ PASA SI? En el Ejemplo 2, el valor del carro se puede aproximar mediante el modelo $y = 25(0.9)^t$. Identifica la disminución porcentual anual en el valor del carro. Estima cuándo el valor del carro será de $8000.

6. ¿QUÉ PASA SI? En el Ejemplo 3, presupón que la población mundial aumentó en 1.5% cada año. Escribe una ecuación para representar esta situación. Estima el año en el que la población mundial fue de 7 mil millones.

EJEMPLO 4 Reescribir una función exponencial

La cantidad y (en gramos) de radioisótopo cromo 51 restante después de t días es $y = a(0.5)^{t/28}$, donde a es la cantidad inicial (en gramos). ¿Qué porcentaje de cromo 51 decrementa cada día?

SOLUCIÓN

$y = a(0.5)^{t/28}$	Escribe la función original.
$= a[(0.5)^{1/28}]^t$	Propiedad de la potencia de una potencia
$\approx a(0.9755)^t$	Evalúa la potencia.
$= a(1 - 0.0245)^t$	Reescribe en forma $y = a(1 - r)^t$.

▶ La tasa de decremento diaria es de aproximadamente 0.0245, o 2.45%.

El *interés compuesto* es el interés pagado sobre una inversión inicial, llamada *principal*, y sobre el interés anteriormente ganado. El interés ganado se expresa a menudo como un porcentaje *anual*, pero generalmente el interés se compone más de una vez por año. Entonces, el modelo de crecimiento exponencial $y = a(1 + r)^t$ debe modificarse para los problemas con interés compuesto.

Concepto Esencial

Interés compuesto

Considera un principal inicial P depositado en una cuenta que paga interés a una tasa anual r (expresada como decimal), compuesta n veces por año. La cantidad A en la cuenta después de t años está dada por

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

EJEMPLO 5 Hallar el balance de una cuenta

Depositas $9000 en una cuenta que paga 1.46% de interés anual. Halla el balance después de 3 años si el interés se compone trimestralmente.

SOLUCIÓN

Con el interés compuesto trimestralmente (4 veces por año), el balance después de tres años es

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	Escribe la fórmula de interés compuesto.
$= 9000\left(1 + \frac{0.0146}{4}\right)^{4 \cdot 3}$	$P = 9000$, $r = 0.0146$, $n = 4$, $t = 3$
$\approx 9402.21.$	Usa una calculadora.

▶ El balance al final del periodo de tres años es $9402.21.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

7. La cantidad y (en gramos) del radioisótopo yodo 123 restante después de t horas es de $y = a(0.5)^{t/13}$, donde a es la cantidad inicial (en gramos). ¿Qué porcentaje de yodo 123 decrementa cada hora?

8. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 5, halla el balance después de 3 años si el interés se compone diariamente.

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** En el modelo de crecimiento exponencial $y = 2.4(1.5)^x$, identifica la cantidad inicial, el factor de crecimiento y el aumento porcentual.

2. **¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Qué característica de una función de decremento exponencial *no* corresponde al grupo de las otras tres? Explica tu razonamiento.

base de 0.8	factor de decremento de 0.8
tasa de decremento de 20%	disminución de 80%

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

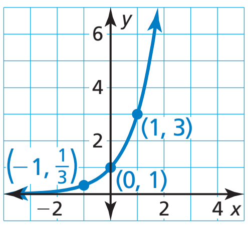
En los Ejercicios 3–8, evalúa la expresión para (a) $x = -2$ y (b) $x = 3$.

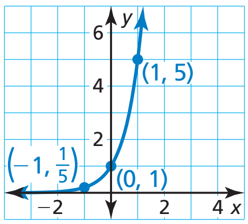
3. 2^x
4. 4^x
5. $8 \cdot 3^x$
6. $6 \cdot 2^x$
7. $5 + 3^x$
8. $2^x - 2$

En los Ejercicios 9–18, indica si la función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego haz una gráfica de la función. *(Consulta el Ejemplo 1).*

9. $y = 6^x$
10. $y = 7^x$
11. $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
12. $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
13. $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$
14. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$
15. $y = (1.2)^x$
16. $y = (0.75)^x$
17. $y = (0.6)^x$
18. $y = (1.8)^x$

ANALIZAR RELACIONES **En los Ejercicios 19 y 20, usa la gráfica de $f(x) = b^x$ para identificar el valor de la base b.**

19.


20.


21. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El valor de una bicicleta de montaña y (en dólares) se puede aproximar mediante el modelo $y = 200(0.75)^t$, donde t es el número de años desde que la bicicleta era nueva. *(Consulta el Ejemplo 2).*
   - **a.** Indica si el modelo representa crecimiento exponencial o decremento exponencial.
   - **b.** Identifica el aumento o disminución porcentual anual en el valor de la bicicleta.
   - **c.** Estima cuándo el valor de la bicicleta será de $50.

22. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La población P (en millares) de Austin, Texas, durante una década reciente, se puede aproximar mediante $y = 494.29(1.03)^t$, donde t es el número de años desde el inicio de la década.
   - **a.** Indica si el modelo representa crecimiento exponencial o decremento exponencial.
   - **b.** Identifica el aumento o disminución porcentual anual en la población.
   - **c.** Estima cuándo la población fue de aproximadamente 590,000.

23. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** En 2006, había aproximadamente 233 millones de suscriptores de telefonía celular en los Estados Unidos. Durante los 4 años siguientes, el número de suscriptores de telefonía celular aumento aproximadamente en un 6% cada año. *(Consulta el Ejemplo 3).*
   - **a.** Escribe un modelo de crecimiento exponencial dando el número de suscriptores de telefonía celular y (en millones) t años después de 2006. Estima el número de suscriptores de telefonía celular en 2008.
   - **b.** Estima el año en el que el número de suscriptores de telefonía celular fue de 278 millones.

24. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Tomas una dosis de 325 miligramos de ibuprofeno. Durante cada hora siguiente, la cantidad de medicamento en tu torrente sanguíneo disminuye en aproximadamente 29% cada hora.

a. Escribe un modelo de decremento exponencial que dé la cantidad y (en miligramos) de ibuprofeno en tu torrente sanguíneo t horas después de la dosis inicial.

b. Estima cuánto tiempo demorarás en tener 100 miligramos de ibuprofeno en tu torrente sanguíneo.

JUSTIFICAR LOS PASOS **En los Ejercicios 25 y 26, justifica cada paso al reescribir la función exponencial.**

25.
$$\begin{aligned} y &= a(3)^{t/14} && \text{Escribe la función original.} \\ &= a[(3)^{1/14}]^t && \\ &\approx a(1.0816)^t && \\ &= a(1 + 0.0816)^t && \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} y &= a(0.1)^{t/3} && \text{Escribe la función original.} \\ &= a[(0.1)^{1/3}]^t && \\ &\approx a(0.4642)^t && \\ &= a(1 - 0.5358)^t && \end{aligned}$$

27. **RESOLVER PROBLEMAS** Cuando muere una planta o un animal, deja de adquirir carbono 14 de la atmósfera. La cantidad y (en gramos) de carbono 14 en el cuerpo de un organismo después de t años es $y = a(0.5)^{t/5730}$, donde a es la cantidad inicial (en gramos). ¿Qué porcentaje de carbono 14 se libera cada año? *(Consulta el Ejemplo 4).*

28. **RESOLVER PROBLEMAS** El número de hojas de una lenteja de agua en un estanque después de t días es $y = a(1230.25)^{t/16}$, donde a es el número inicial de hojas. ¿En qué porcentaje crece la lenteja de agua por día?

En los Ejercicios 29–36, reescribe la función en la forma $y = a(1 + r)^t$ o $y = a(1 - r)^t$. Luego expresa la tasa de crecimiento o decremento.

29. $y = a(2)^{t/3}$

30. $y = a(4)^{t/6}$

31. $y = a(0.5)^{t/12}$

32. $y = a(0.25)^{t/9}$

33. $y = a\left(\frac{2}{3}\right)^{t/10}$

34. $y = a\left(\frac{5}{4}\right)^{t/22}$

35. $y = a(2)^{8t}$

36. $y = a\left(\frac{1}{3}\right)^{3t}$

37. **RESOLVER PROBLEMAS** Depositas $5000 en una cuenta que paga 2.25% de interés anual. Halla el balance después de 5 años, si el interés se compone trimestralmente. *(Consulta el Ejemplo 5).*

38. **SACAR CONCLUSIONES** Depositas $2200 en tres cuentas bancarias independientes, cada una de las cuales paga 3% de interés anual. ¿Cuánto interés gana cada cuenta después de 6 años?

Cuenta	Capitalización	Balance después de 6 años
1	trimestral	
2	mensual	
3	diario	

39. **ANÁLISIS DE ERRORES** Inviertes $500 en las acciones de una compañía. El valor de las acciones disminuye 2% cada año. Describe y corrige el error al escribir un modelo para el valor de las acciones después de t años.

$$y = \left(\begin{matrix}\text{cantidad}\\ \text{inicial}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{Factor de}\\ \text{decremento}\end{matrix}\right)^t$$

$$y = 500(0.02)^t$$

40. **ANÁLISIS DE ERRORES** Depositas $250 en una cuenta que paga 1.25% de interés anual. Describe y corrige el error al hallar el balance después de 3 años, si el interés se compone trimestralmente.

$$A = 250\left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4 \cdot 3}$$

$$A = \$6533.29$$

En los Ejercicios 41–44, usa la información dada para hallar la cantidad A en la cuenta que gana interés compuesto después de 6 años, si el principal es de $3500.

41. $r = 2.16\%$, compuesta trimestralmente.

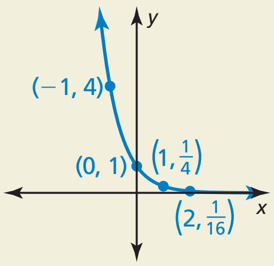
42. $r = 2.29\%$, compuesta mensualmente

43. $r = 1.83\%$, compuesta diariamente

44. $r = 1.26\%$, compuesta mensualmente

45. **USAR LA ESTRUCTURA** Un sitio web registró el número de referidos y que recibió de los sitios web de los medios sociales durante un periodo de 10 años. Los resultados se pueden representar mediante $y = 2500(1.50)^t$, donde t es el año y $0 \leq t \leq 9$. Interpreta los valores de a y b en esta situación. ¿Cuál es el porcentaje de aumento anual? Explica.

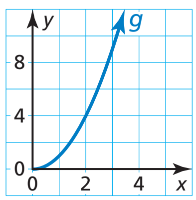
46. **¿CÓMO LO VES?** Considera la gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = ab^x$.



a. Determina si la gráfica de f representa crecimiento exponencial o decremento exponencial.

b. ¿Cuál es el dominio y el rango de la función? Explica.

47. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que la gráfica de $f(x) = 2^x$ aumenta a mayor velocidad que la gráfica de $g(x) = x^2$ si $x \geq 0$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.



48. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** La función $f(x) = b^x$ representa una función de decremento exponencial. Escribe una segunda función de decremento exponencial en términos de b y x.

49. **RESOLVER PROBLEMAS** La población p de una pequeña ciudad después de x años se puede representar mediante la función $p = 6850(1.03)^x$. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio en la población durante los primeros 6 años? Justifica tu respuesta.

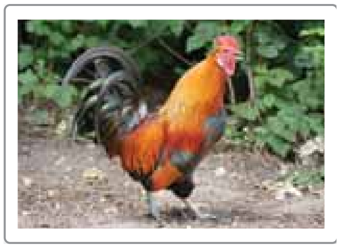
50. **RAZONAR** Considera la función exponencial $f(x) = ab^x$.

a. Demuestra que $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

b. Usa la ecuación en la parte (a) para explicar por qué no hay función exponencial de la forma $f(x) = ab^x$ cuya gráfica pase por los puntos en la tabla a continuación.

x	0	1	2	3	4
y	4	4	8	24	72

51. **RESOLVER PROBLEMAS** El número E de huevos que produce una gallina Leghorn por año se puede representar mediante la ecuación $E = 179.2(0.89)^{w/52}$, donde w es la edad (en semanas) de las gallinas y $w \geq 22$.



a. Identifica el factor de decremento y el porcentaje de disminución.

b. Haz una gráfica del modelo.

c. Estima la producción de huevos de una gallina de 2.5 años de edad.

d. Explica cómo puedes reescribir la ecuación dada de manera que el tiempo se mida en años en lugar de semanas.

52. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Compras un nuevo sistema estereofónico por \$1300 y 4 años después logras venderlo por \$275. Presupón que el valor de reventa del sistema estereofónico decrementa exponencialmente con el tiempo. Escribe una ecuación que dé el valor de reventa V (en dólares) del sistema estereofónico como función del tiempo t (en años) desde que lo compraste.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Simplifica la expresión. *(Manual de revisión de destrezas)*

53. $x^9 \cdot x^2$

54. $\dfrac{x^4}{x^3}$

55. $4x \cdot 6x$

56. $\left(\dfrac{4x^8}{2x^6}\right)^4$

57. $\dfrac{x + 3x}{2}$

58. $\dfrac{6x}{2} + 4x$

59. $\dfrac{12x}{4x} + 5x$

60. $(2x \cdot 3x^5)^3$

6.2 La base natural e

Pregunta esencial ¿Qué es la base natural e?

Hasta ahora, en tus estudios de matemáticas, has trabajado con números especiales como π e i. Otro número especial se denomina *base natural* y se denota mediante e. La base natural e es irracional, entonces no puedes hallar su valor exacto.

EXPLORACIÓN 1 Aproximar la base natural e

Trabaja con un compañero. Una manera de aproximar la base natural e es aproximar la suma

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots .$$

Usa una hoja de cálculo o una calculadora gráfica para aproximar esta suma. Explica los pasos que usaste. ¿Cuántos lugares decimales usaste en tu aproximación?

USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas usar herramientas tecnológicas para explorar y profundizar tu comprensión de los conceptos.

EXPLORACIÓN 2 Aproximar la base natural e

Trabaja con un compañero. Otra manera de aproximar la base natural e es considerar la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Al aumentar x, el valor de esta expresión se acerca al valor de e. Copia y completa la tabla. Luego usa los resultados en la tabla para aproximar e. Compara esta aproximación con la que obtuviste en la Exploración 1.

x	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$						

EXPLORACIÓN 3 Hacer una gráfica de una función de base natural

Trabaja con un compañero. Usa tu valor aproximado de e en la Exploración 1 o 2 para completar la tabla. Luego dibuja la gráfica de la *función exponencial de la base natural* $y = e^x$. Puedes usar una calculadora gráfica y la tecla e^x para verificar tu gráfica. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $y = e^x$? Justifica tu respuesta.

x	-2	-1	0	1	2
$y = e^x$					

Comunicar tu respuesta

4. ¿Cuál es la base natural e?

5. Repite la Exploración 3 para la función exponencial de la base natural $y = e^{-x}$. Luego compara la gráfica de $y = e^x$ con la gráfica de $y = e^{-x}$.

6. La base natural e se usa en una amplia gama de aplicaciones en la vida real. Consulta en Internet u otra referencia para investigar algunas de las aplicaciones de e en la vida real.

6.2 Lección

Qué aprenderás

- Definir y usar la base natural e.
- Hacer una gráfica de las funciones de base natural.
- Resolver problemas de la vida real.

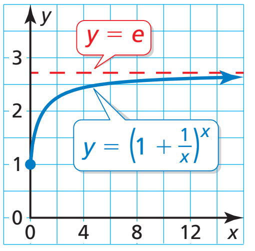
Vocabulario Esencial

base natural e, *pág. 304*

Anterior
número irracional
propiedades de los exponentes
porcentaje de aumento
porcentaje de disminución
interés compuesto

La base natural e

La historia de las matemáticas está marcada por el descubrimiento de números especiales, tales como π e i. Otro número especial se denota mediante la letra e. El número se denomina **base natural *e***. La expresión $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ se acerca a e al aumentar x, tal como se muestra en la gráfica y en la tabla.



x	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828

Concepto Esencial

La base natural e

La base natural e es irracional. Se define de la siguiente manera:

Al aproximarse x a $+\infty$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ se aproxima a $e \approx 2.71828182846$.

EJEMPLO 1 Simplificar expresiones de base natural

Simplifica cada expresión.

a. $e^3 \cdot e^6$ **b.** $\dfrac{16e^5}{4e^4}$ **c.** $(3e^{-4x})^2$

SOLUCIÓN

a. $e^3 \cdot e^6 = e^{3+6}$
$= e^9$

b. $\dfrac{16e^5}{4e^4} = 4e^{5-4}$
$= 4e$

c. $(3e^{-4x})^2 = 3^2(e^{-4x})^2$
$= 9e^{-8x}$
$= \dfrac{9}{e^{8x}}$

Verifica

Puedes usar una calculadora para verificar la equivalencia de las expresiones numéricas que incluyen e.

```
e^(3)*e^(6)
     8103.083928
e^(9)
     8103.083928
```

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Simplifica la expresión.

1. $e^7 \cdot e^4$ **2.** $\dfrac{24e^8}{8e^5}$ **3.** $(10e^{-3x})^3$

Hacer una gráfica de las funciones de base natural

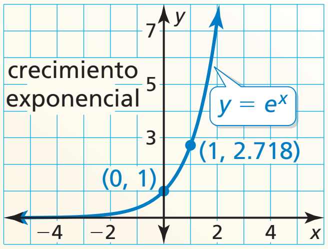
Concepto Esencial

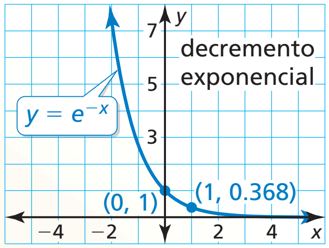
Funciones de base natural

A una función de la forma $y = ae^{rx}$ se le denomina *función exponencial de base natural.*

- Cuando $a > 0$ y $r > 0$, la función es una función de crecimiento exponencial.
- Cuando $a > 0$ y $r < 0$, la función es una función de decremento exponencial.

Se muestran las gráficas de las funciones básicas $y = e^x$ y $y = e^{-x}$.





EJEMPLO 2 Hacer una gráfica de las funciones de base natural

Indica si cada función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego grafica la función.

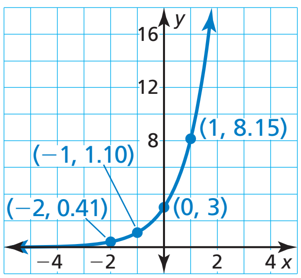
a. $y = 3e^x$

b. $f(x) = e^{-0.5x}$

SOLUCIÓN

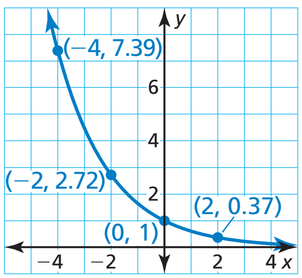
a. Dado que $a = 3$ es positiva y $r = 1$ es positiva, la función es una función de crecimiento exponencial. Usa una tabla para hacer la gráfica de la función.

x	-2	-1	0	1
y	0.41	1.10	3	8.15



b. Dado que $a = 1$ es positiva y $r = -0.5$ es negativa, la función es una función de decremento exponencial. Usa una tabla para hacer la gráfica de la función.

x	-4	-2	0	2
y	7.39	2.72	1	0.37



BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Puedes reescribir las funciones exponenciales de base natural para hallar porcentajes de tasas de cambio. En el Ejemplo 2(b),

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-0.5x} \\ &= (e^{-0.5})^x \\ &\approx (0.6065)^x \\ &= (1 - 0.3935)^x. \end{aligned}$$

Entonces, el porcentaje de disminución es de aproximadamente 39.35%.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Indica si la función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego, grafica la función.

4. $y = \frac{1}{2}e^x$

5. $y = 4e^{-x}$

6. $f(x) = 2e^{2x}$

Resolver problemas de la vida real

Has aprendido que el balance de una cuenta que gana interés compuesto está dado por $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. Al acercarse la frecuencia n de composición al infinito positivo, la fórmula del interés compuesto se aproxima a la fórmula siguiente.

Concepto Esencial

Interés compuesto continuamente

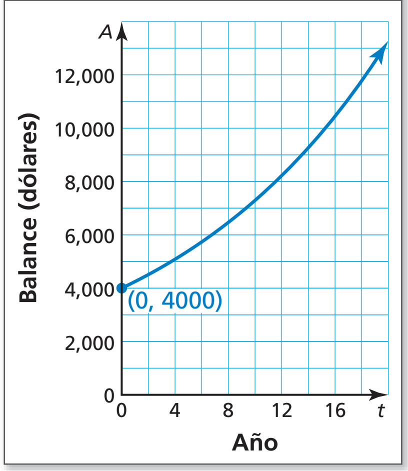
Cuando el interés se compone *continuamente* la cantidad A en una cuenta después de t años está dada por la fórmula

$$A = Pe^{rt}$$

Donde P es el principal r es la tasa de interés anual expresada como decimal.

EJEMPLO 3 Representar con matemáticas

La cuenta de tu amigo



Tu amigo y tú tienen cada uno una cuenta que gana interés anual compuesto continuamente. El balance A (en dólares) de tu cuenta después de t años se puede representar mediante $A = 4500e^{0.04t}$. La gráfica muestra el balance de la cuenta de tu amigo en el tiempo. ¿Qué cuenta tiene un principal mayor? ¿Cuál de ellas tiene un mayor balance después de 10 años?

SOLUCIÓN

1. **Entiende el Problema** Te dan una gráfica y una ecuación que representa balances de cuenta. Te piden que identifiques la cuenta que tiene el mayor principal y la cuenta que tiene el mayor balance después de 10 años.

2. **Haz un Plan** Usa la ecuación para hallar tu principal y tu balance de cuenta después de 10 años. Luego compara estos valores con la gráfica de la cuenta de tu amigo.

3. **Resuelve el Problema** La ecuación $A = 4500e^{0.04t}$ es de la forma $A = Pe^{rt}$, donde $P = 4500$. Entonces, tu principal es \$4500. Tu balance A si $t = 10$ es

$$A = 4500e^{0.04(10)} = \$6713.21.$$

Dado que la gráfica pasa por (0, 4000), el principal de tu amigo es \$4000. La gráfica muestra también que el balance es de aproximadamente \$7250 si $t = 10$.

▶ Entonces, tu cuenta tiene un mayor principal, pero la cuenta de tu amigo tiene un mayor balance después de 10 años.

4. **Verifícalo** Dado que la cuenta de tu amigo tiene un menor principal pero un mayor balance después de 10 años, la tasa de cambio promedio de $t = 0$ hasta $t = 10$ debería ser mayor para la cuenta de tu amigo que para tu cuenta.

Tu cuenta: $\dfrac{A(10) - A(0)}{10 - 0} = \dfrac{6713.21 - 4500}{10} = 221.321$

La cuenta de tu amigo: $\dfrac{A(10) - A(0)}{10 - 0} \approx \dfrac{7250 - 4000}{10} = 325$ ✓

HACER CONJETURAS

También puedes usar este razonamiento para llegar a la conclusión de que la cuenta de tu amigo tiene una tasa de interés anual mayor que tu cuenta.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

7. Depositas \$4250 en una cuenta que gana 5% de interés anual compuesto continuamente. Compara el balance después de 10 años con la cuenta en el Ejemplo 3.

6.2 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** ¿Qué es la base natural e?

2. **ESCRIBIR** Indica si la función $f(x) = \frac{1}{3}e^{4x}$ representa crecimiento exponencial o decremento exponencial. Explica.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–12, simplifica la expresión. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $e^3 \cdot e^5$

4. $e^{-4} \cdot e^6$

5. $\dfrac{11e^9}{22e^{10}}$

6. $\dfrac{27e^7}{3e^4}$

7. $(5e^{7x})^4$

8. $(4e^{-2x})^3$

9. $\sqrt{9e^{6x}}$

10. $\sqrt[3]{8e^{12x}}$

11. $e^x \cdot e^{-6x} \cdot e^8$

12. $e^x \cdot e^4 \cdot e^{x+3}$

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 13 y 14, describe y corrige el error al simplificar la expresión.

13. ✗
$$(4e^{3x})^2 = 4e^{(3x)(2)}$$
$$= 4e^{6x}$$

14. ✗
$$\frac{e^{5x}}{e^{-2x}} = e^{5x-2x}$$
$$= e^{3x}$$

En los Ejercicios 15–22, indica si la función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego haz una gráfica de la función. *(Consulta el Ejemplo 2).*

15. $y = e^{3x}$

16. $y = e^{-2x}$

17. $y = 2e^{-x}$

18. $y = 3e^{2x}$

19. $y = 0.5e^x$

20. $y = 0.25e^{-3x}$

21. $y = 0.4e^{-0.25x}$

22. $y = 0.6e^{0.5x}$

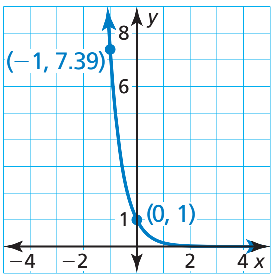
ANALIZAR ECUACIONES En los Ejercicios 23–26, une la función con su gráfica. Explica tu razonamiento.

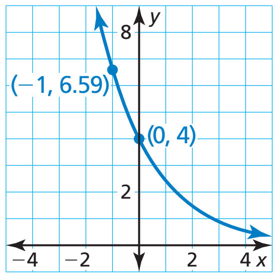
23. $y = e^{2x}$

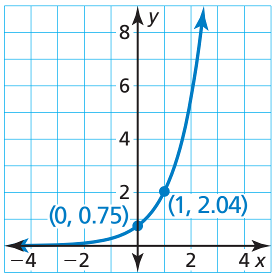
24. $y = e^{-2x}$

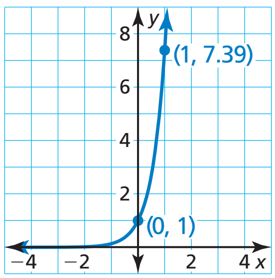
25. $y = 4e^{-0.5x}$

26. $y = 0.75e^x$

A.


B.


C.


D.


USAR LA ESTRUCTURA En los Ejercicios 27–30, usa las propiedades de los exponentes para reescribir la función en la forma $y = a(1 + r)^t$ o $y = a(1 - r)^t$. Luego halla la tasa promedio de cambio.

27. $y = e^{-0.25t}$

28. $y = e^{-0.75t}$

29. $y = 2e^{0.4t}$

30. $y = 0.5e^{0.8t}$

USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 31–34, usa la tabla de valores o una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función. Luego identifica el dominio y el rango.

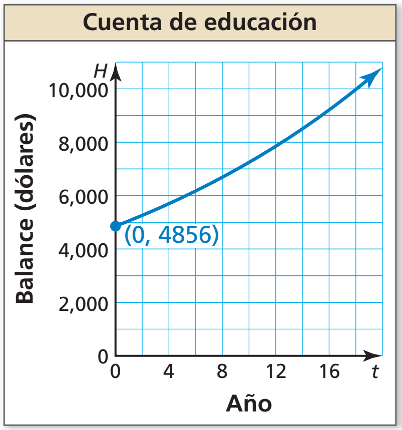
31. $y = e^{x-2}$

32. $y = e^{x+1}$

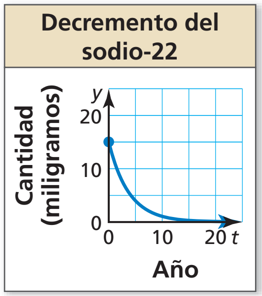
33. $y = 2e^x + 1$

34. $y = 3e^x - 5$

35. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Las cuentas de inversión para una casa y educación ganan interés anual compuesto continuamente. El balance H (en dólares) de fondos para una casa después de t años, se representa por $H = 3224e^{0.05t}$. La gráfica muestra el balance en el fondo educativo en el tiempo. ¿Qué cuenta tiene el mayor principal? ¿Qué cuenta tiene un mayor balance después de 10 años? *(Consulta el Ejemplo 3).*



36. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El tritio y el sodio 22 decrementan con el tiempo. En una muestra de tritio, la cantidad y (en miligramos) restante después de t años, está dada por $y = 10e^{-0.0562t}$. La gráfica muestra la cantidad de sodio 22 en una muestra en el tiempo. ¿Qué muestra comenzó con una cantidad mayor? ¿Cuál tiene una cantidad mayor después de 10 años?



37. **FINAL ABIERTO** Halla valores de a, b, r, y q tales que $f(x) = ae^{rx}$ y $g(x) = be^{qx}$ sean funciones de decremento exponencial, pero $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ represente crecimiento exponencial.

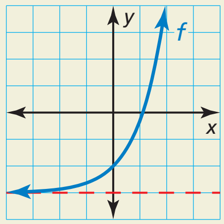
38. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Explica por qué $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$ se aproxima a $A = Pe^{rt}$ cuando n se aproxima al infinito positivo.

39. **ESCRIBIR** ¿Se puede escribir la base natural e como la razón de dos enteros? Explica.

40. **ARGUMENTAR** Tu amigo evalúa $f(x) = e^{-x}$ si $x = 1000$ y llega a la conclusión de que la gráfica de $y = f(x)$ tiene una intersección con el eje x en $(1000, 0)$. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

41. **SACAR CONCLUSIONES** Inviertes \$2500 en una cuenta para ahorrar para la universidad. La cuenta 1 paga 6% de interés anual compuesto trimestralmente. La cuenta 2 paga 4% de interés anual compuesto continuamente. ¿Qué cuenta deberías elegir para obtener la mayor cantidad de dinero en 10 años? Justifica tu respuesta.

42. **¿CÓMO LO VES?** Usa la gráfica para completar cada enunciado.



a. $f(x)$ se aproxima a _____ cuando x se acerca a $+\infty$.

b. $f(x)$ se aproxima a _____ como x se aproxima a $-\infty$.

43. **RESOLVER PROBLEMAS** El crecimiento de bacterias de *Mycobacterium tuberculosis* se puede representar mediante la función $N(t) = ae^{0.166t}$, donde N es el número de células después de t horas y a es el número de células si $t = 0$.

a. A la 1:00 P.M., hay 30 bacterias *M. tuberculosis* en una muestra. Escribe una función que dé el número de bacterias después de la 1:00 P.M.

b. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función en la parte (a).

c. Describe cómo hallar el número de células en la muestra a las 3:45 P.M.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Escribe el número en notación científica. *(Manual de revisión de destrezas)*

44. 0.006 **45.** 5000 **46.** 26,000,000 **47.** 0.000000047

Halla el inverso de la función. Luego haz una gráfica de la función y su inverso. *(Sección 5.6)*

48. $y = 3x + 5$ **49.** $y = x^2 - 1, x \leq 0$

50. $y = \sqrt{x + 6}$ **51.** $y = x^3 - 2$

6.3 Logaritmos y funciones logarítmicas

Pregunta esencial

¿Cuáles son algunas de las características de la gráfica de una función logarítmica?

Toda función exponencial de la forma $f(x) = b^x$, donde b es un número real positivo distinto de 1, tiene una función inversa que puedes denotar mediante $g(x) = \log_b x$. Esta función inversa se denomina *función logarítmica en base b*.

EXPLORACIÓN 1 Reescribir ecuaciones exponenciales

Trabaja con un compañero. Halla el valor de x en cada ecuación exponencial. Explica tu razonamiento. Luego usa el valor de x para reescribir la ecuación exponencial en su forma logarítmica equivalente, $x = \log_b y$.

a. $2^x = 8$ **b.** $3^x = 9$ **c.** $4^x = 2$

d. $5^x = 1$ **e.** $5^x = \frac{1}{5}$ **f.** $8^x = 4$

EXPLORACIÓN 2 Hacer gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

Trabaja con un compañero. Completa cada tabla para la función exponencial dada. Usa los resultados para completar la tabla para la función logarítmica dada. Explica tu razonamiento. Luego dibuja las gráficas para f y g en el mismo plano de coordenadas.

a.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = 2^x$					

x					
$g(x) = \log_2 x$	−2	−1	0	1	2

b.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = 10^x$					

x					
$g(x) = \log_{10} x$	−2	−1	0	1	2

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas justificar tus conclusiones y comunicarlas a otros.

EXPLORACIÓN 3 Características de las gráficas de funciones logarítmicas

Trabaja con un compañero. Usa las gráficas que dibujaste en la Exploración 2 para determinar el dominio, el rango, la intersección con el eje x y la asíntota de la gráfica de $g(x) = \log_b x$, donde b es un número real positivo distinto de 1. Explica tu razonamiento.

Comunicar tu respuesta

4. ¿Cuáles son algunas de las características de la gráfica de una función logarítmica?

5. ¿Cómo puedes usar la gráfica de una función exponencial para obtener la gráfica de una función logarítmica?

6.3 Lección

Qué aprenderás

- Definir y evaluar logaritmos
- Usar las propiedades inversas de las funciones logarítmicas y exponenciales.
- Hacer gráficas de funciones logarítmicas.

Vocabulario Esencial

logaritmo de *y* en base *b*, *pág. 310*
logaritmo común, *pág. 311*
logaritmo natural, *pág. 311*

Anterior
funciones inversas

Logaritmos

Sabes que $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$. Sin embargo, ¿para qué valor de x, $2^x = 6$? Los matemáticos definen este valor de x con un *logaritmo* y escriben $x = \log_2 6$. La definición de un logaritmo se puede generalizar de la siguiente manera.

Concepto Esencial

Definición de logaritmo en base *b*

Imagina que b y y son números reales positivos con $b \neq 1$. **El logaritmo de *y* en base *b*** se denota mediante $\log_b y$ y se define como

$$\log_b y = x \qquad \text{si y solo si} \qquad b^x = y.$$

La expresión $\log_b y$ se lee como "logaritmo base b de y."

Esta definición te indica que las ecuaciones $\log_b y = x$ y $b^x = y$ son equivalentes. La primera está en *forma logarítmica* y la segunda está en *forma exponencial*.

EJEMPLO 1 Reescribir ecuaciones logarítmicas

Reescribe cada ecuación en forma exponencial.

a. $\log_2 16 = 4$ **b.** $\log_4 1 = 0$ **c.** $\log_{12} 12 = 1$ **d.** $\log_{1/4} 4 = -1$

SOLUCIÓN

Forma logarítmica	Forma exponencial
a. $\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
b. $\log_4 1 = 0$	$4^0 = 1$
c. $\log_{12} 12 = 1$	$12^1 = 12$
d. $\log_{1/4} 4 = -1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

EJEMPLO 2 Reescribir ecuaciones exponenciales

Reescribe cada ecuación en forma logarítmica

a. $5^2 = 25$ **b.** $10^{-1} = 0.1$ **c.** $8^{2/3} = 4$ **d.** $6^{-3} = \frac{1}{216}$

SOLUCIÓN

Forma exponencial	Forma logarítmica
a. $5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
b. $10^{-1} = 0.1$	$\log_{10} 0.1 = -1$
c. $8^{2/3} = 4$	$\log_8 4 = \frac{2}{3}$
d. $6^{-3} = \frac{1}{216}$	$\log_6 \frac{1}{216} = -3$

Las partes (b) y (c) del Ejemplo 1 ejemplifican dos valores de logaritmos especiales que deberías aprender a reconocer. Imagina que b es un número real positivo tal que $b \neq 1$.

Logaritmo de 1

$\log_b 1 = 0$ dado que $b^0 = 1$.

Logaritmo de b en base b

$\log_b b = 1$ dado que $b^1 = b$.

EJEMPLO 3 Evaluar expresiones logarítmicas

Evalúa cada logaritmo.

a. $\log_4 64$ **b.** $\log_5 0.2$ **c.** $\log_{1/5} 125$ **d.** $\log_{36} 6$

SOLUCIÓN

Para ayudarte a hallar el valor de $\log_b y$, pregúntate qué potencia de b te da y.

a. ¿Qué potencia de 4 te da 64? $4^3 = 64$, entonces $\log_4 64 = 3$.

b. ¿Qué potencia de 5 te da 0.2? $5^{-1} = 0.2$, entonces $\log_5 0.2 = -1$.

c. ¿Qué potencia de $\frac{1}{5}$ te da 125? $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125$, entonces $\log_{1/5} 125 = -3$.

d. ¿Qué potencia de 36 te da 6? $36^{1/2} = 6$, entonces $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

Un **logaritmo común** es un logaritmo en base 10. Se denota mediante $\log_{10}$ o simplemente mediante log. Un **logaritmo natural** es un logaritmo en base e. Se puede denotar mediante $\log_e$ pero generalmente se denota mediante ln.

Logaritmo común

$\log_{10} x = \log x$

Logaritmo natural

$\log_e x = \ln x$

EJEMPLO 4 Evaluar logaritmos comunes y naturales

Evalúa (a) log 8 (b) ln 0.3 usando una calculadora. Redondea tu respuesta a tres lugares decimales.

SOLUCIÓN

La mayoría de calculadoras tienen teclas para evaluar logaritmos comunes y naturales.

```
log(8)
      .903089987
ln(0.3)
    -1.203972804
```

a. $\log 8 \approx 0.903$

b. $\ln 0.3 \approx -1.204$

Verifica tus respuestas reescribiendo cada logaritmo en forma exponencial y evaluando.

Verifica

```
10^(0.903)
       7.99834255
e^(-1.204)
      .2999918414
```

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Reescribe la ecuación en forma exponencial.

1. $\log_3 81 = 4$ **2.** $\log_7 7 = 1$ **3.** $\log_{14} 1 = 0$ **4.** $\log_{1/2} 32 = -5$

Reescribe la ecuación en forma logarítmica.

5. $7^2 = 49$ **6.** $50^0 = 1$ **7.** $4^{-1} = \frac{1}{4}$ **8.** $256^{1/8} = 2$

Evalúa el logaritmo. Si es necesario, usa una calculadora y redondea tu respuesta a tres lugares decimales.

9. $\log_2 32$ **10.** $\log_{27} 3$ **11.** $\log 12$ **12.** $\ln 0.75$

Usar las propiedades inversas

Por la definición de un logaritmo, se deduce que la función logarítmica $g(x) = \log_b x$ es el inverso de la función exponencial $f(x) = b^x$. Esto significa que

$$g(f(x)) = \log_b b^x = x \qquad \text{y} \qquad f(g(x)) = b^{\log_b x} = x.$$

En otras palabras, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas "se cancelan" entre sí.

EJEMPLO 5 Usar las propiedades inversas

Simplifica (a) $10^{\log 4}$ y (b) $\log_5 25^x$.

SOLUCIÓN

a. $10^{\log 4} = 4$ — $b^{\log_b x} = x$

b. $\log_5 25^x = \log_5(5^2)^x$ — Expresa 25 como potencia de base 5.

$= \log_5 5^{2x}$ — Propiedad de la potencia de una potencia

$= 2x$ — $\log_b b^x = x$

EJEMPLO 6 Hallar las funciones inversas

Halla el inverso de cada función.

a. $f(x) = 6^x$ **b.** $y = \ln(x + 3)$

SOLUCIÓN

a. Basándose en la definición de logaritmo, el inverso de $f(x) = 6^x$ es $g(x) = \log_6 x$.

b. $y = \ln(x + 3)$ — Escribe la función original.

$x = \ln(y + 3)$ — Intercambia x por y.

$e^x = y + 3$ — Escribe en forma exponencial.

$e^x - 3 = y$ — Resta 3 de cada lado.

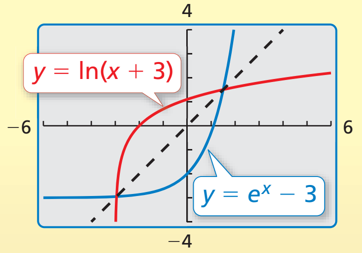
▶ El inverso de $y = \ln(x + 3)$ es $y = e^x - 3$.

Verifica

a. $f(g(x)) = 6^{\log_6 x} = x$ ✓

$g(f(x)) = \log_6 6^x = x$ ✓

b.



Las gráficas parecen ser reflexiones una de otra en la línea $y = x$. ✓

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Simplifica la expresión.

13. $8^{\log_8 x}$ **14.** $\log_7 7^{-3x}$ **15.** $\log_2 64^x$ **16.** $e^{\ln 20}$

17. Halla el inverso de $y = 4^x$. **18.** Halla el inverso de $y = \ln(x - 5)$.

Hacer gráficas de funciones logarítmicas

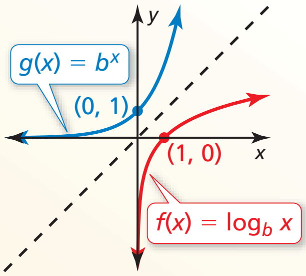
Puedes usar la relación inversa entre las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas para hacer la gráfica de las funciones logarítmicas.

Concepto Esencial

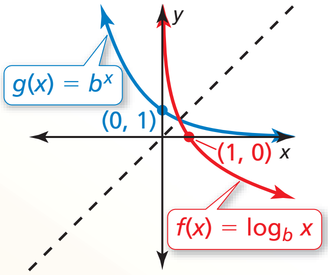
Gráficas madre de funciones logarítmicas

La gráfica de $f(x) = \log_b x$ se muestra a continuación para $b > 1$ y para $0 < b < 1$. Dado que $f(x) = \log_b x$ y $g(x) = b^x$ son funciones inversas, la gráfica de $f(x) = \log_b x$ es la reflexión de la gráfica $g(x) = b^x$ en la línea $y = x$.

Haz una gráfica de $f(x) = \log_b x$ para $b > 1$.



Haz una gráfica de $f(x) = \log_b x$ para $0 < b < 1$.



Observa que el eje y es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x) = \log_b x$. El dominio de $f(x) = \log_b x$ es $x > 0$, y el rango es todos los números reales.

EJEMPLO 7 Hacer una gráfica de una función logarítmica

Haz una gráfica de $f(x) = \log_3 x$.

SOLUCIÓN

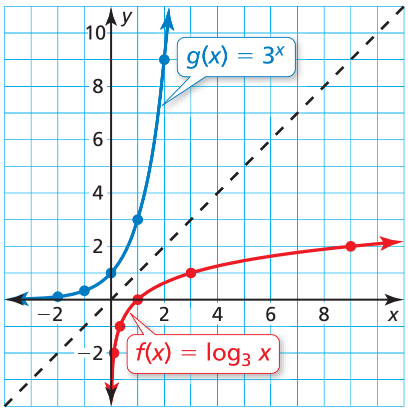
Paso 1 Halla el inverso de f. Basándote en la definición de logaritmo, el inverso de $f(x) = \log_3 x$ es $g(x) = 3^x$.

Paso 2 Haz una tabla de valores para $g(x) = 3^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

Paso 3 Marca los puntos de la tabla y conéctalos con una curva suave.

Paso 4 Dado que $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 3^x$ son funciones inversas, la gráfica de f se obtiene al reflejar la gráfica de g en la línea $y = x$. Para hacer esto, invierte las coordenadas de los puntos en g y marca estos puntos nuevos en la gráfica de f.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Haz una gráfica de la función.

19. $y = \log_2 x$ **20.** $f(x) = \log_5 x$ **21.** $y = \log_{1/2} x$

6.3 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Un logaritmo en base 10 se llama logaritmo ___________.

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La expresión $\log_3 9$ se lee como ______________.

3. **ESCRIBIR** Describe la relación entre $y = 7^x$ y $y = \log_7 x$.

4. **DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** ¿Cuál es diferente? Halla "ambas" respuestas.

¿Qué potencia de 4 te da 16?	¿Cuál es el logaritmo en base 4 de 16?
Evalúa 4^2.	Evalúa $\log_4 16$.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–10, reescribe la ecuación en forma exponencial. *(Consulta el Ejemplo 1).*

5. $\log_3 9 = 2$
6. $\log_4 4 = 1$
7. $\log_6 1 = 0$
8. $\log_7 343 = 3$
9. $\log_{1/2} 16 = -4$
10. $\log_3 \frac{1}{3} = -1$

En los Ejercicios 11–16, reescribe la ecuación en forma logarítmica. *(Consulta el Ejemplo 2).*

11. $6^2 = 36$
12. $12^0 = 1$
13. $16^{-1} = \frac{1}{16}$
14. $5^{-2} = \frac{1}{25}$
15. $125^{2/3} = 25$
16. $49^{1/2} = 7$

En los Ejercicios 17–24, evalúa el logaritmo. *(Consulta el Ejemplo 3).*

17. $\log_3 81$
18. $\log_7 49$
19. $\log_3 3$
20. $\log_{1/2} 1$
21. $\log_5 \frac{1}{625}$
22. $\log_8 \frac{1}{512}$
23. $\log_4 0.25$
24. $\log_{10} 0.001$

25. **SENTIDO NUMÉRICO** Ordena los logaritmos de menor valor a mayor valor.

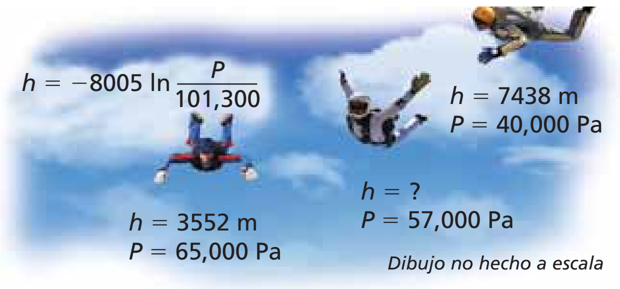
$\log_5 23$	$\log_6 38$	$\log_7 8$	$\log_2 10$

26. **ESCRIBIR** Explica por qué las expresiones $\log_2(-1)$ y $\log_1 1$ son indefinidas.

En los Ejercicios 27–32, evalúa el logaritmo usando una calculadora. Redondea tu respuesta a tres lugares decimales. *(Consulta el Ejemplo 4).*

27. $\log 6$
28. $\ln 12$
29. $\ln \frac{1}{3}$
30. $\log \frac{2}{7}$
31. $3 \ln 0.5$
32. $\log 0.6 + 1$

33. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Los paracaidistas usan un instrumento llamado *altímetro* para hacer seguimiento de su altitud al caer. El altímetro determina la altitud midiendo la presión del aire. La altitud h (en metros) sobre el nivel del mar está relacionada con la presión P (en pascales) por la función que se muestra en el diagrama. ¿Cuál es la altitud sobre el nivel del mar cuando la presión del aire es 57,000 pascales?



34. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El valor pH de una sustancia mide qué tan ácida o alcalina es la sustancia. Está dado mediante la fórmula $\text{pH} = -\log[H^+]$, donde H^+ es la concentración de iones de hidrógeno (en moles por litro). Halla el pH de cada sustancia.

 a. bicarbonato de sodio: $[H^+] = 10^{-8}$ moles por litro

 b. vinagre: $[H^+] = 10^{-3}$ moles por litro

En los Ejercicios 35–40, simplifica la expresión. *(Consulta el Ejemplo 5).*

35. $7^{\log_7 x}$ **36.** $3^{\log_3 5x}$

37. $e^{\ln 4}$ **38.** $10^{\log 15}$

39. $\log_3 3^{2x}$ **40.** $\ln e^{x+1}$

41. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error al reescribir $4^{-3} = \frac{1}{64}$ en forma logarítmica.

$$\log_4(-3) = \frac{1}{64}$$

42. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error al simplificar la expresión $\log_4 64^x$.

$$\begin{aligned}\log_4 64^x &= \log_4(16 \cdot 4^x)\\ &= \log_4(4^2 \cdot 4^x)\\ &= \log_4 4^{2+x}\\ &= 2 + x\end{aligned}$$

En los Ejercicios 43–52, halla el inverso de la función. *(Consulta el Ejemplo 6).*

43. $y = 0.3^x$ **44.** $y = 11^x$

45. $y = \log_2 x$ **46.** $y = \log_{1/5} x$

47. $y = \ln(x - 1)$ **48.** $y = \ln 2x$

49. $y = e^{3x}$ **50.** $y = e^{x-4}$

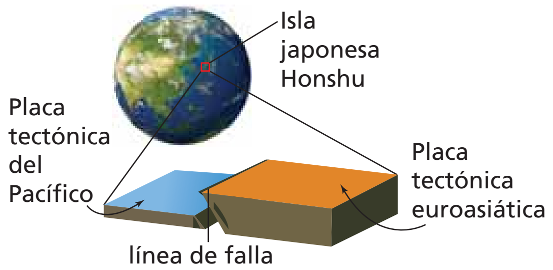
51. $y = 5^x - 9$ **52.** $y = 13 + \log x$

53. RESOLVER PROBLEMAS La velocidad del viento s (en millas por hora) cerca del centro de un tornado se puede representar mediante $s = 93 \log d + 65$, donde d es la distancia (en millas) que recorre el tornado.

a. En 1925, un tornado recorrió 220 millas a través de tres estados. Estima la velocidad del viento cerca del centro del tornado.

b. Halla el inverso de la función dada. Describe lo que representa el inverso.

54. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La magnitud de energía M de un terremoto se puede representar mediante $M = \frac{2}{3} \log E - 9.9$, donde E es la cantidad de energía liberada (en ergios).



a. En 2011, un fuerte terremoto en Japón causado por el deslizamiento de dos placas tectónicas a lo largo de una falla, liberó 2.24×10^{28} ergios. ¿Cuál fue la magnitud de energía del terremoto?

b. Halla el inverso de la función dada. Describe lo que representa el inverso.

En los Ejercicios 55–60, haz una gráfica de la función. *(Consulta el Ejemplo 7).*

55. $y = \log_4 x$ **56.** $y = \log_6 x$

57. $y = \log_{1/3} x$ **58.** $y = \log_{1/4} x$

59. $y = \log_2 x - 1$ **60.** $y = \log_3(x + 2)$

USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 61–64, usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función. Determina el dominio, el rango y la asíntota de la función.

61. $y = \log(x + 2)$ **62.** $y = -\ln x$

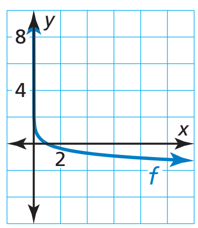
63. $y = \ln(-x)$ **64.** $y = 3 - \log x$

65. ARGUMENTAR Tu amigo dice que toda función logarítmica pasará por el punto (1, 0). ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

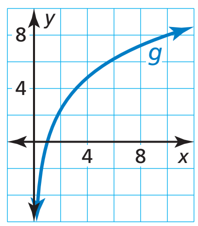
66. ANALIZAR RELACIONES Clasifica las funciones en orden desde la menor tasa de cambio promedio hasta la mayor tasa de cambio promedio sobre el intervalo $1 \leq x \leq 10$.

a. $y = \log_6 x$ **b.** $y = \log_{3/5} x$

c.



d.



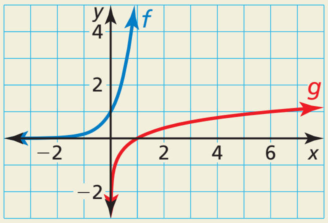
67. RESOLVER PROBLEMAS Los biólogos han hallado que la longitud ℓ (en pulgadas) de un caimán y su peso w (en libras) están relacionados mediante la función $\ell = 27.1 \ln w - 32.8$.

a. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función.

b. Usa tu gráfica para estimar el peso de un caimán de 10 pies de longitud.

c. Usa la función *cero* para hallar la intersección con el eje x de la gráfica de una función. ¿Este valor x tiene sentido en el contexto de la situación? Explica.

68. ¿CÓMO LO VES? La figura muestra las gráficas de las dos funciones f y g.



a. Compara el comportamiento final de la función logarítmica g con el de la función exponencial f.

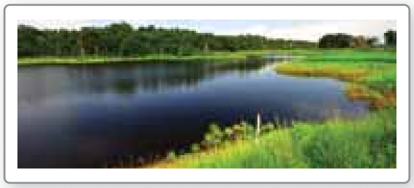
b. Determina si las funciones son funciones inversas. Explica.

c. ¿Cuál es la base de cada función? Explica.

69. RESOLVER PROBLEMAS Un estudio en Florida halló que el número s de especies de peces en un estanque o lago se puede modelar mediante la función

$$s = 30.6 - 20.5 \log A + 3.8(\log A)^2$$

donde A es el área (en metros cuadrados) del estanque o lago.



a. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función en el dominio $200 \leq A \leq 35{,}000$.

b. Usa tu gráfica para estimar el número de especies en un lago con un área de 30,000 metros cuadrados.

c. Usa tu gráfica para estimar el área de un lago que contiene seis especies de peces.

d. Describe lo que pasa con el número de especies de peces cuando el área de un estanque o lago aumenta. Explica por qué tiene sentido tu respuesta.

70. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Escribe una función logarítmica que tenga un valor de salida de −4. Luego dibuja la gráfica de tu función.

71. PENSAMIENTO CRÍTICO Evalúa cada logaritmo. (*Consejo*: para cada $\log_b x$, reescribe b y x como potencias de la misma base.)

a. $\log_{125} 25$ b. $\log_8 32$

c. $\log_{27} 81$ d. $\log_4 128$

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Imagina que $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Escribe una regla para g que represente la transformación indicada en la gráfica de f. *(Sección 5.3)*

72. $g(x) = -f(x)$

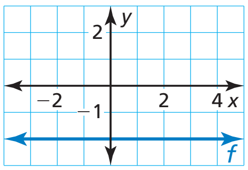
73. $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

74. $g(x) = f(-x) + 3$

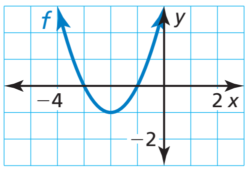
75. $g(x) = f(x + 2)$

Identifica la familia de funciones a la que pertenece f. Compara la gráfica de f con la gráfica de su función madre. *(Sección 1.1)*

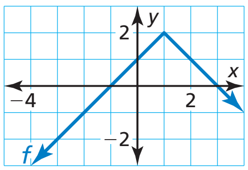
76.



77.



78.



6.4 Transformaciones de funciones exponenciales y logarítmicas

Pregunta esencial ¿Cómo puedes transformar las gráficas de las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas?

EXPLORACIÓN 1 Identificar transformaciones

Trabaja con un compañero. Cada gráfica que se muestra es una transformación de la función madre

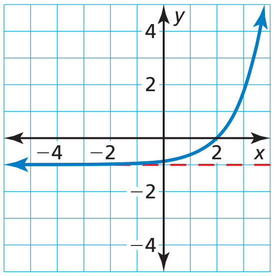
$f(x) = e^x$ o $f(x) = \ln x$.

Une cada función con su gráfica. Explica tu razonamiento. Luego describe la transformación de f representada por g.

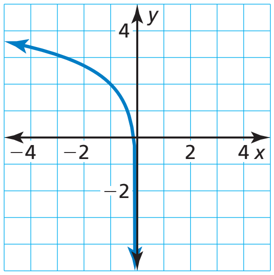
a. $g(x) = e^{x+2} - 3$ **b.** $g(x) = -e^{x+2} + 1$ **c.** $g(x) = e^{x-2} - 1$

d. $g(x) = \ln(x + 2)$ **e.** $g(x) = 2 + \ln x$ **f.** $g(x) = 2 + \ln(-x)$

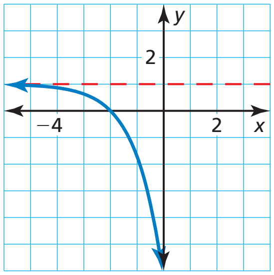
A.



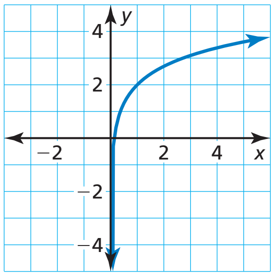
B.



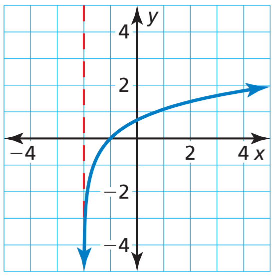
C.



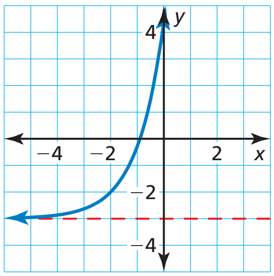
D.



E.



F.



EXPLORACIÓN 2 Características de las gráficas

Trabaja con un compañero. Determina el dominio, el rango y la asíntota de cada función en la Exploración 1. Justifica tus respuestas.

RAZONAR CUANTITATIVAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas ver si las cantidades y sus relaciones en las situaciones de los problemas tienen sentido.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes transformar las gráficas de las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas?

4. Halla el inverso de cada función en la función en la Exploración 1. Luego verifica tu respuesta usando una calculadora gráfica para hacer la gráfica de cada función y su inverso en la misma ventana de visualización.

6.4 Lección

Vocabulario Esencial

Anterior
función exponencial
función logarítmica
transformaciones

Qué aprenderás

- Transformar gráficas de funciones exponenciales.
- Transformar gráficas de funciones logarítmicas.
- Escribir transformaciones de gráficas de funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

Transformar gráficas de funciones exponenciales

Puedes transformar gráficas de funciones logarítmicas y funciones exponenciales de la misma manera en la que transformaste gráficas de funciones en capítulos anteriores. A continuación se muestran ejemplos de transformaciones de la gráfica de $f(x) = 4^x$.

Concepto Esencial

Transformaciones	Notación $f(x)$	Ejemplos	
Traslación horizontal La gráfica se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha.	$f(x - h)$	$g(x) = 4^{x-3}$ $g(x) = 4^{x+2}$	3 unidades hacia la derecha 2 unidades hacia la izquierda
Traslación vertical La gráfica se desplaza hacia arriba o hacia abajo.	$f(x) + k$	$g(x) = 4^x + 5$ $g(x) = 4^x - 1$	5 unidades hacia arriba 1 unidad hacia abajo
Reflexión La gráfica se invierte en el eje x o en el eje y.	$f(-x)$ $-f(x)$	$g(x) = 4^{-x}$ $g(x) = -4^x$	en el eje y en el eje x
Alargamiento o encogimiento horizontal La gráfica se alarga desde o se encoge hacia el eje y.	$f(ax)$	$g(x) = 4^{2x}$ $g(x) = 4^{x/2}$	se encoge por un factor de $\frac{1}{2}$ se alarga por un factor de 2
Alargamiento o encogimiento vertical La gráfica se alarga desde o se encoge hacia el eje x.	$a \cdot f(x)$	$g(x) = 3(4^x)$ $g(x) = \frac{1}{4}(4^x)$	se alarga por un factor de 3 se encoge por un factor de $\frac{1}{4}$

EJEMPLO 1 Trasladar una función exponencial

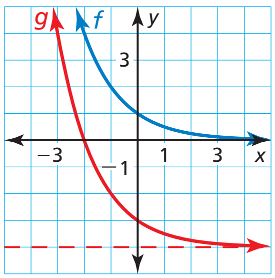
Describe la transformación de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ representada mediante $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$. Luego haz una gráfica de cada función.

SOLUCIÓN

Observa que la función es de la forma $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + k$.

Reescribe la función para identificar k.

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \underbrace{(-4)}_{k}$$



- Dado que $k = -4$, la gráfica de g es una traslación 4 unidades hacia debajo de la gráfica de f.

CONSEJO DE ESTUDIO

Observa en la gráfica que la traslación vertical también desplazó la asíntota 4 unidades hacia abajo, entonces el rango de g es $y > -4$.

EJEMPLO 2 Trasladar una función exponencial de base natural

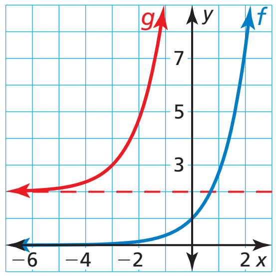
Describe la transformación de $f(x) = e^x$ representada mediante $g(x) = e^{x+3} + 2$. Luego haz una gráfica de cada función.

SOLUCIÓN

Observa que la función es de la forma $g(x) = e^{x-h} + k$. Reescribe la función para identificar h y k.

$$g(x) = e^{x - (-3)} + 2$$

h k



▶ Dado que $h = -3$ y $k = 2$, la gráfica de g es una traslación 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba de la gráfica de f.

CONSEJO DE ESTUDIO

Observa en la gráfica que la traslación vertical también desplazó la asíntota 2 unidades hacia arriba, entonces el rango de g es $y > 2$.

EJEMPLO 3 Transformar funciones exponenciales

Describe la transformación de f representada por g. Luego haz una gráfica de cada función.

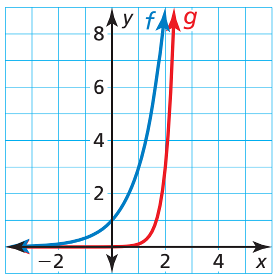
a. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{3x-5}$

b. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -\frac{1}{8}e^{-x}$

SOLUCIÓN

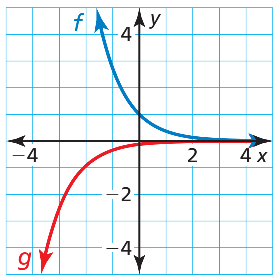
a. Observa que la función es de la forma $g(x) = 3^{ax-h}$, donde $a = 3$ y $h = 5$.

▶ Entonces, la gráfica de g es una traslación 5 unidades hacia la derecha, seguida de un encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{3}$ de la gráfica de f.



b. Observa que la función es de la forma $g(x) = ae^{-x}$, donde $a = -\frac{1}{8}$.

▶ Entonces, la gráfica de g es una reflexión en el eje x y un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{8}$ de la gráfica de f.



BUSCAR UNA ESTRUCTURA

En el Ejemplo 3(a), un encogimiento horizontal sigue a la traslación. En la función $h(x) = 3^{3(x-5)}$, la traslación 5 unidades hacia la derecha sigue un encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{3}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Describe la transformación de f representada por g. Luego haz una gráfica de cada función.

1. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-3} + 1$

2. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^{-x} - 5$

3. $f(x) = 0.4^x$, $g(x) = 0.4^{-2x}$

4. $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^{x+6}$

Transformar gráficas de funciones logarítmicas

A continuación, se muestran ejemplos de transformaciones de la gráfica de $f(x) = \log x$.

Concepto Esencial

Transformaciones	Notación $f(x)$	Ejemplos	
Traslación horizontal La gráfica se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha.	$f(x - h)$	$g(x) = \log(x - 4)$ $g(x) = \log(x + 7)$	4 unidades hacia la derecha 7 unidades hacia la izquierda
Traslación vertical La gráfica se desplaza hacia arriba o hacia abajo.	$f(x) + k$	$g(x) = \log x + 3$ $g(x) = \log x - 1$	3 unidades hacia arriba 1 unidad hacia abajo
Reflexión La gráfica se invierte en el eje x o en el eje y.	$f(-x)$ $-f(x)$	$g(x) = \log(-x)$ $g(x) = -\log x$	en el eje y en el eje x
Alargamiento o encogimiento horizontal La gráfica se alarga desde o se encoge hacia el eje y.	$f(ax)$	$g(x) = \log(4x)$ $g(x) = \log\left(\frac{1}{3}x\right)$	se encoge por un factor de $\frac{1}{4}$ se alarga por un factor de 3
Alargamiento o encogimiento vertical La gráfica se alarga desde o se encoge hacia el eje x.	$a \cdot f(x)$	$g(x) = 5 \log x$ $g(x) = \frac{2}{3} \log x$	se alarga por un factor de 5 se encoge por un factor de $\frac{2}{3}$

EJEMPLO 4 Transformar funciones logarítmicas

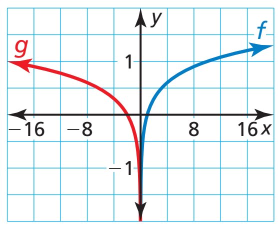
Describe la transformación de f representada por g. Luego haz una gráfica de cada función.

a. $f(x) = \log x$, $g(x) = \log\left(-\frac{1}{2}x\right)$ **b.** $f(x) = \log_{1/2} x$, $g(x) = 2 \log_{1/2}(x + 4)$

SOLUCIÓN

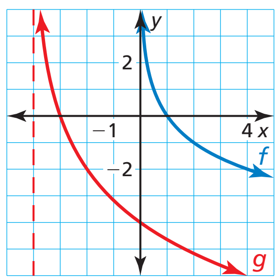
a. Observa que la función es de la forma $g(x) = \log(ax)$, donde $a = -\frac{1}{2}$.

▶ Entonces, la gráfica de g es una reflexión en el eje y y un alargamiento horizontal por un factor de 2 en la gráfica de f.



b. Observa que la función es de la forma $g(x) = a \log_{1/2}(x - h)$, donde $a = 2$ y $h = -4$.

▶ Entonces, la gráfica de g es una traslación horizontal 4 unidades hacia la izquierda y un alargamiento vertical por un factor de 2 de la gráfica de f.



CONSEJO DE ESTUDIO

En el Ejemplo 4(b), observa en la gráfica que la traslación horizontal también desplazó la asíntota 4 unidades hacia la izquierda, entonces el dominio de g es $x > -4$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Describe la transformación de *f* representada por *g*. Luego haz una gráfica de cada función.

5. $f(x) = \log_2 x,\ g(x) = -3 \log_2 x$

6. $f(x) = \log_{1/4} x,\ g(x) = \log_{1/4}(4x) - 5$

Escribir transformaciones de gráficas de funciones

EJEMPLO 5 Escribir una función exponencial transformada

Imagina que la gráfica de g es una reflexión en el eje x seguida de una traslación 4 unidades hacia la derecha de la gráfica de $f(x) = 2^x$. Escribe una regla para g.

SOLUCIÓN

Paso 1 Primero escribe una función h que represente la reflexión de f.

$h(x) = -f(x)$ — Multiplica el valor de salida por -1.

$= -2^x$ — Sustituye 2^x por $f(x)$.

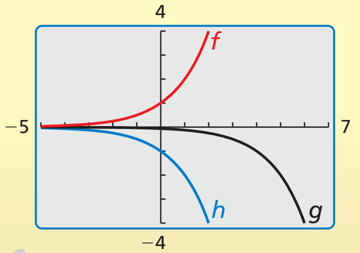
Paso 2 Luego escribe la función g que represente la traslación de h.

$g(x) = h(x - 4)$ — Resta 4 del valor de entrada.

$= -2^{x-4}$ — Reemplaza x por $x - 4$ en $h(x)$.

▶ La función transformada es $g(x) = -2^{x-4}$.

Verifica



EJEMPLO 6 Escribir una función logarítmica transformada

Imagina que la gráfica de g es una traslación 2 unidades hacia arriba seguida de un alargamiento vertical por un factor de 2 de la gráfica de $f(x) = \log_{1/3} x$. Escribe una regla para g.

SOLUCIÓN

Paso 1 Primero escribe una función h que represente la traslación de f.

$h(x) = f(x) + 2$ — Suma 2 al valor de salida.

$= \log_{1/3} x + 2$ — Sustituye $\log_{1/3} x$ por $f(x)$.

Paso 2 Luego escribe la función g que represente el alargamiento vertical de h.

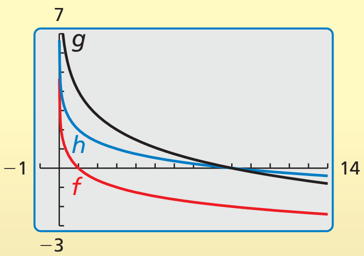
$g(x) = 2 \cdot h(x)$ — Multiplica el valor de salida por 2.

$= 2 \cdot (\log_{1/3} x + 2)$ — Sustituye $\log_{1/3} x + 2$ por $h(x)$.

$= 2 \log_{1/3} x + 4$ — Propiedad distributiva

▶ La función transformada es $g(x) = 2 \log_{1/3} x + 4$.

Verifica



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

7. Imagina que la gráfica de g es un alargamiento horizontal por un factor de 3, seguido de una traslación 2 unidades hacia arriba de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$. Escribe una regla para g.

8. Imagina que la gráfica de g es una reflexión en el eje y, seguida de una traslación 4 unidades hacia la izquierda de la gráfica de $f(x) = \log x$. Escribe una regla para g.

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **ESCRIBIR** Dada la función $f(x) = ab^{x-h} + k$, describe los efectos de a, h, y k en la gráfica de la función.

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La gráfica de $g(x) = \log_4(-x)$ es una reflexión en __________ de la gráfica de $f(x) = \log_4 x$.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, une la función con su gráfica. Explica tu razonamiento.

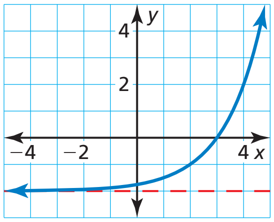
3. $f(x) = 2^{x+2} - 2$

4. $g(x) = 2^{x+2} + 2$

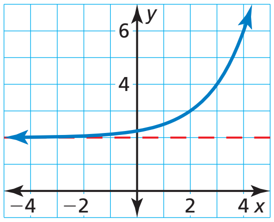
5. $h(x) = 2^{x-2} - 2$

6. $k(x) = 2^{x-2} + 2$

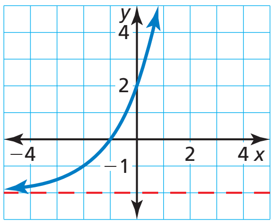
A.



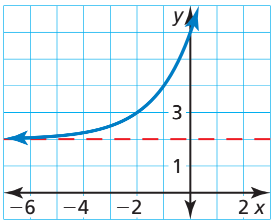
B.



C.



D.



En los Ejercicios 7–16, describe la transformación de *f* representada por *g*. Luego grafica cada función. *(Consulta los Ejemplos 1 y 2).*

7. $f(x) = 3^x,\ g(x) = 3^x + 5$

8. $f(x) = 4^x,\ g(x) = 4^x - 8$

9. $f(x) = e^x,\ g(x) = e^x - 1$

10. $f(x) = e^x,\ g(x) = e^x + 4$

11. $f(x) = 2^x,\ g(x) = 2^{x-7}$

12. $f(x) = 5^x,\ g(x) = 5^{x+1}$

13. $f(x) = e^{-x},\ g(x) = e^{-x} + 6$

14. $f(x) = e^{-x},\ g(x) = e^{-x} - 9$

15. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} + 12$

16. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - \frac{2}{3}$

En los Ejercicios 17–24, describe la transformación de *f* representada por *g*. Luego, grafica cada función. *(Consulta el Ejemplo 3).*

17. $f(x) = e^x,\ g(x) = e^{2x}$

18. $f(x) = e^x,\ g(x) = \frac{4}{3}e^x$

19. $f(x) = 2^x,\ g(x) = -2^{x-3}$

20. $f(x) = 4^x,\ g(x) = 4^{0.5x-5}$

21. $f(x) = e^{-x},\ g(x) = 3e^{-6x}$

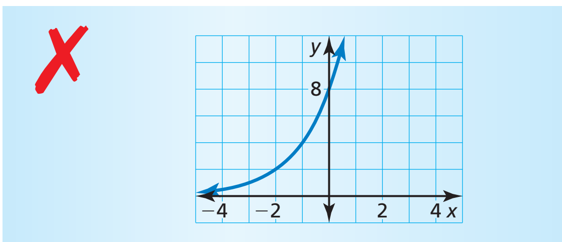
22. $f(x) = e^{-x},\ g(x) = e^{-5x} + 2$

23. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ g(x) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} - 2$

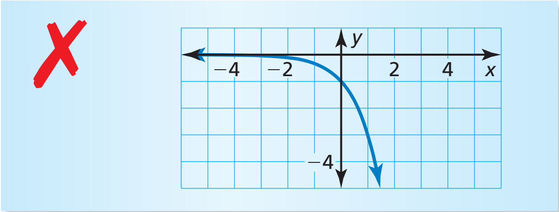
24. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x,\ g(x) = -\left(\frac{3}{4}\right)^{x-7} + 1$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 25 y 26, describe y corrige el error al hacer la gráfica de la función.**

25. $f(x) = 2^x + 3$



26. $f(x) = 3^{-x}$



En los Ejercicios 27–30, describe la transformación de *f* representada por *g*. Luego haz una gráfica de cada función. *(Consulta el Ejemplo 4).*

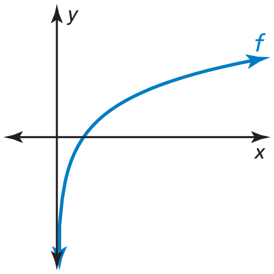
27. $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = 3 \log_4 x - 5$

28. $f(x) = \log_{1/3} x$, $g(x) = \log_{1/3}(-x) + 6$

29. $f(x) = \log_{1/5} x$, $g(x) = -\log_{1/5}(x - 7)$

30. $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x + 2) - 3$

ANALIZAR RELACIONES **En los Ejercicios 31–34, une la función con la transformación correcta de la gráfica de *f*. Explica tu razonamiento.**



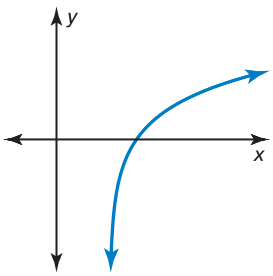
31. $y = f(x - 2)$

32. $y = f(x + 2)$

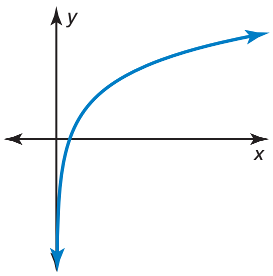
33. $y = 2f(x)$

34. $y = f(2x)$

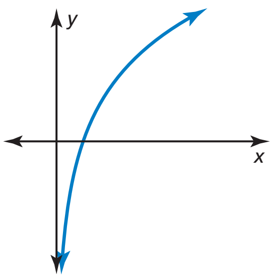
A.



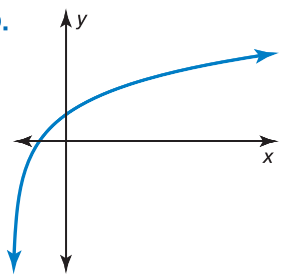
B.



C.



D.



En los Ejercicios 35–38, escribe una regla para *g* que represente las transformaciones indicadas de la gráfica de *f*. *(Consulta el Ejemplo 5).*

35. $f(x) = 5^x$; traslación 2 unidades hacia abajo, seguida de una reflexión en el eje *y*.

36. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; reflexión en el eje *x*, seguida de un alargamiento vertical por un factor de 6 y una traslación 4 unidades hacia la izquierda.

37. $f(x) = e^x$; encogimiento horizontal por un factor de $\frac{1}{2}$, seguida de una traslación 5 unidades hacia arriba.

38. $f(x) = e^{-x}$; traslación 4 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo, seguida por un encogimiento vertical por un factor de $\frac{1}{3}$.

En los Ejercicios 39–42, escribe una regla para *g* que represente la transformación de la gráfica de *f*. *(Consulta el Ejemplo 6).*

39. $f(x) = \log_6 x$; alargamiento vertical por un factor de 6, seguido de una traslación 5 unidades hacia abajo.

40. $f(x) = \log_5 x$; reflexión sobre el eje *x* seguido por una traslación 9 unidades hacia la izquierda.

41. $f(x) = \log_{1/2} x$; traslación 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba, seguida de una reflexión en el eje *y*.

42. $f(x) = \ln x$; traslación 3 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba, seguida por un alargamiento horizontal por un factor de 8.

JUSTIFICAR LOS PASOS **En los Ejercicios 43 y 44, justifica cada paso al escribir una regla de *g* que represente las transformaciones indicadas de la gráfica de *f*.**

43. $f(x) = \log_7 x$; reflexión en el eje *x*, seguida de una traslación 6 unidades hacia abajo.

$$\begin{aligned} h(x) &= -f(x) \\ &= -\log_7 x \\ g(x) &= h(x) - 6 \\ &= -\log_7 x - 6 \end{aligned}$$

44. $f(x) = 8^x$; alargamiento vertical por un factor de 4, seguido de una traslación 1 unidad hacia arriba y 3 unidades hacia la izquierda.

$$\begin{aligned} h(x) &= 4 \cdot f(x) \\ &= 4 \cdot 8^x \\ g(x) &= h(x + 3) + 1 \\ &= 4 \cdot 8^{x+3} + 1 \end{aligned}$$

USAR LA ESTRUCTURA **En los Ejercicios 45–48, describe la transformación de la gráfica de f representada por la gráfica de g. Luego, da una ecuación de la asíntota.**

45. $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x + 4$

46. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x-9}$

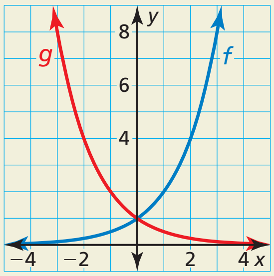
47. $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x + 6)$

48. $f(x) = \log_{1/5} x$, $g(x) = \log_{1/5} x + 13$

49. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La pendiente S de una playa está relacionada con el diámetro promedio d en milímetros de las partículas de arena en la playa por la ecuación $S = 0.159 + 0.118 \log d$. Describe la transformación de $f(d) = \log d$ representada por S. Luego usa la función para determinar la pendiente de una playa por cada tipo de arena mencionado a continuación.

Partícula de arena	Diámetro (mm), d
arena fina	0.125
arena mediana	0.25
arena gruesa	0.5
arena muy gruesa	1

50. **¿CÓMO LO VES?** Las gráficas de $f(x) = b^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ se muestran para $b = 2$.



a. Usa la gráfica para describir una transformación de la gráfica de f que genera la gráfica de g.

b. ¿Tu respuesta en la parte (a) cambia si $0 < b < 1$? Explica.

51. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que una transformación de $f(x) = \log x$ puede generar una función g cuya gráfica nunca interseca la gráfica de f. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

52. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** ¿Es posible transformar la gráfica de $f(x) = e^x$ para obtener la gráfica de $g(x) = \ln x$? Explica tu razonamiento.

53. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Determina si cada enunciado es verdadero *siempre, a veces* o *nunca*. Explica tu razonamiento.

a. Una traslación vertical de la gráfica de $f(x) = \log x$ cambia la ecuación de la asíntota.

b. Una traslación vertical de la gráfica de $f(x) = e^x$ cambia la ecuación de la asíntota.

c. Una reducción horizontal de la gráfica de $f(x) = \log x$ no cambia el dominio.

d. La gráfica de $g(x) = ab^{x-h} + k$ no interseca el eje x.

54. **RESOLVER PROBLEMAS** La cantidad P (en gramos) de 100 gramos de plutonio 239 que permanece después de t años se puede representar mediante $P = 100(0.99997)^t$.

a. Describe el domino y el rango de la función.

b. ¿Cuánto plutonio 239 está presente después de 12,000 años?

c. Describe la transformación de la función si la cantidad inicial de plutonio fuese 550 gramos.

d. ¿La transformación en la parte (c) afecta el dominio y el rango de la función? Explica tu razonamiento.

55. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Considera la gráfica de la función $h(x) = e^{-x-2}$. Describe la transformación de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ representada por la gráfica de h. Luego describe la transformación de la gráfica de $g(x) = e^x$ representada por la gráfica de h. Justifica tus respuestas.

56. **FINAL ABIERTO** Escribe una función de la forma $y = ab^{x-h} + k$ cuya gráfica tenga una intersección con el eje y de 5 y una asíntota de $y = 2$.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Haz las operaciones indicadas. *(Sección 5.5)*

57. Imagina que $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^2$. Halla $(fg)(x)$. Luego evalúa el producto si $x = 3$.

58. Imagina que $f(x) = 4x^6$ y $g(x) = 2x^3$. Halla $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$. Luego evalúa el cociente si $x = 5$.

59. Imagina que $f(x) = 6x^3$ y $g(x) = 8x^3$. Halla $(f + g)(x)$. Luego evalúa la suma si $x = 2$.

60. Imagina que $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 3x^2$. Halla $(f - g)(x)$. Luego evalúa la diferencia si $x = 6$.

6.1–6.4 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

función exponencial, *pág. 296*
función de crecimiento exponencial, *pág. 296*
factor de crecimiento, *pág. 296*
asíntota, *pág. 296*
función de decremento exponencial, *pág. 296*
factor de decremento, *pág. 296*
base natural e, *pág. 304*
logaritmo de y en base b, *pág. 310*
logaritmo común, *pág. 311*
logaritmo natural, *pág. 311*

Conceptos Esenciales

Sección 6.1

Función madre para funciones de crecimiento exponencial, *pág. 296*
Función madre para funciones de decremento exponencial, *pág. 296*
Modelos de crecimiento y decremento exponencial, *pág*. 297
Interés compuesto, *pág. 299*

Sección 6.2

La base natural e, pág. *304*
Funciones de base natural, *pág. 305*
Interés compuesto continuamente, *pág. 306*

Sección 6.3

Definición de logaritmo en base b, *pág. 310*
Gráficas madre de funciones logarítmicas, *pág. 313*

Sección 6.4

Transformar gráficas de funciones exponenciales, *pág*. 318
Transformar gráficas de funciones logarítmicas, *pág*. 320

Prácticas matemáticas

1. ¿Cómo verificaste para asegurarte de que tu respuesta fuera razonable en el Ejercicio 23 de la página 300?

2. ¿Cómo puedes justificar tus conclusiones en los Ejercicios 23–26 de la página 307?

3. ¿Cómo supervisaste y evaluaste tu progreso en el Ejercicio 66 de la página 315?

Destrezas de estudio

Formar un grupo de estudio semanal

- Selecciona estudiantes que pongan tanto empeño como tú en que les vaya bien en la clase de matemática.
- Encuentra un lugar habitual para reunirse que tenga un mínimo de distracciones.
- Comparen horarios y planifiquen por lo menos una vez a la semana para reunirse, teniendo por lo menos 1.5 horas de tiempo para estudiar.

6.1–6.4 Prueba

Indica si la función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Explica tu razonamiento. *(Secciones 6.1 y 6.2)*

1. $f(x) = (4.25)^x$ **2.** $y = \left(\frac{3}{8}\right)^x$ **3.** $y = e^{0.6x}$ **4.** $f(x) = 5e^{-2x}$

Simplifica la expresión. *(Secciones 6.2 y 6.3)*

5. $e^8 \cdot e^4$ **6.** $\frac{15e^3}{3e}$ **7.** $(5e^{4x})^3$

8. $e^{\ln 9}$ **9.** $\log_7 49^x$ **10.** $\log_3 81^{-2x}$

Reescribe la expresión en forma exponencial o logarítmica. *(Sección 6.3)*

11. $\log_4 1024 = 5$ **12.** $\log_{1/3} 27 = -3$ **13.** $7^4 = 2401$ **14.** $4^{-2} = 0.0625$

Evalúa el logaritmo. Si es necesario, usa una calculadora y redondea tu respuesta a tres lugares decimales. *(Sección 6.3)*

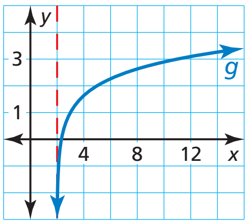
15. $\log 45$ **16.** $\ln 1.4$ **17.** $\log_2 32$

Haz una gráfica de la función y su inverso. *(Sección 6.3)*

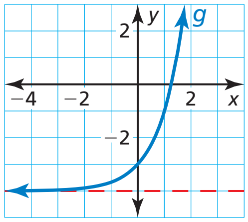
18. $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ **19.** $y = \ln(x - 7)$ **20.** $f(x) = \log_5(x + 1)$

La gráfica de *g* es una transformación de la gráfica de *f*. Escribe una regla para *g*. *(Sección 6.4)*

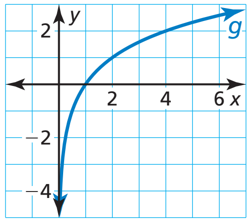
21. $f(x) = \log_3 x$



22. $f(x) = 3^x$



23. $f(x) = \log_{1/2} x$



24. Compras una lámpara antigua por \$150. El valor de la lámpara aumenta en 2.15% cada año. Escribe un modelo exponencial que dé el valor y (en dólares) de la lámpara t años después de que la compraste. *(Sección 6.1)*

25. Un banco local hace publicidad para dos cuentas de certificados de depósito (CD) que puedes usar para ahorrar dinero y ganar intereses. El interés se compone mensualmente en ambas cuentas. *(Sección 6.1)*

a. Depositas las cantidades mínimas requeridas en cada cuenta CD. ¿Cuánto dinero hay en cada cuenta al final de su plazo? ¿Cuánto interés gana cada cuenta? Justifica tus respuestas.

b. Describe los beneficios y las desventajas de cada cuenta.

26. La escala de Richter se usa para medir la magnitud de un terremoto. La magnitud Richter R está dada por $R = 0.67 \ln E + 1.17$, donde E es la energía (en kilovatios–hora) liberada por el terremoto. Haz una gráfica del modelo. ¿Cuál es la magnitud Richter para un terremoto que libera 23,000 kilovatios–hora de energía? *(Sección 6.4)*

6.5 Propiedades de los logaritmos

Pregunta esencial ¿Cómo puedes usar las propiedades de los exponentes para deducir las propiedades de los logaritmos?

Imagina que

$x = \log_b m$ y $y = \log_b n$.

Las formas exponenciales correspondientes de estas dos ecuaciones son

$b^x = m$ y $b^y = n$.

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas entender y usar las presuposiciones y definiciones enunciadas, así como los resultados establecidos previamente.

EXPLORACIÓN 1 Propiedad del producto de logaritmos

Trabaja con un compañero. Para deducir la propiedad del producto, multiplica m y n para obtener

$mn = b^x b^y = b^{x+y}$.

La forma logarítmica correspondiente de $mn = b^{x+y}$ es $\log_b mn = x + y$. Entonces,

$\log_b mn =$ ______. Propiedad del producto de logaritmos

EXPLORACIÓN 2 Propiedad del cociente de logaritmos

Trabaja con un compañero. Para deducir la propiedad del cociente, divide m entre n para obtener

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$.

La función logarítmica correspondiente de $\dfrac{m}{n} = b^{x-y}$ es $\log_b \dfrac{m}{n} = x - y$. Entonces,

$\log_b \dfrac{m}{n} =$ ______. Propiedad del cociente de logaritmos

EXPLORACIÓN 3 Propiedad de la potencia de logaritmos

Trabaja con un compañero. Para deducir la propiedad de la potencia, sustituye b^x por m en la expresión $\log_b m^n$, de la siguiente manera.

$\log_b m^n = \log_b (b^x)^n$	Sustituye b^x por m.
$= \log_b b^{nx}$	Propiedad de la potencia de una potencia de exponentes
$= nx$	Propiedad inversa de los logaritmos

Entonces, al sustituir $\log_b m$ por x, tienes

$\log_b m^n =$ ______. Propiedad de la potencia de logaritmos

Comunicar tu respuesta

4. ¿Cómo puedes usar las propiedades de los exponentes para deducir las propiedades de los logaritmos?

5. Usa las propiedades de los logaritmos que dedujiste en las Exploraciones 1–3 para evaluar cada expresión logarítmica.

a. $\log_4 16^3$ **b.** $\log_3 81^{-3}$

c. $\ln e^2 + \ln e^5$ **d.** $2 \ln e^6 - \ln e^5$

e. $\log_5 75 - \log_5 3$ **f.** $\log_4 2 + \log_4 32$

6.5 Lección

Qué aprenderás

- Usar las propiedades de los logaritmos para evaluar logaritmos.
- Usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar o reducir expresiones logarítmicas.
- Usar la fórmula de cambio de base para evaluar logaritmos.

Vocabulario Esencial

Anterior
base
propiedades de los exponentes

Propiedades de los logaritmos

Sabes que la función logarítmica en base b es la función inversa de la función exponencial en base b. Debido a esta relación, tiene sentido que los logaritmos tengan propiedades similares a las propiedades de los exponentes.

CONSEJO DE ESTUDIO

Estas tres propiedades de los logaritmos corresponden con estas tres propiedades de los exponentes.

$a^m a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

Concepto Esencial

Propiedades de los logaritmos

Imagina que b, m y n son números reales positivos con $b \neq 1$.

Propiedad del producto $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

Propiedad del cociente $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

Propiedad de la potencia $\log_b m^n = n \log_b m$

EJEMPLO 1 Usar las propiedades de los logaritmos

Usa $\log_2 3 \approx 1.585$ y $\log_2 7 \approx 2.807$ para evaluar cada logaritmo.

a. $\log_2 \frac{3}{7}$ **b.** $\log_2 21$ **c.** $\log_2 49$

SOLUCIÓN

a. $\log_2 \frac{3}{7} = \log_2 3 - \log_2 7$ Propiedad del cociente
$\approx 1.585 - 2.807$ Usa los valores dados de $\log_2 3$ y $\log_2 7$.
$= -1.222$ Resta.

b. $\log_2 21 = \log_2(3 \cdot 7)$ Escribe 21 como $3 \cdot 7$.
$= \log_2 3 + \log_2 7$ Propiedad del producto
$\approx 1.585 + 2.807$ Usa los valores dados de $\log_2 3$ y $\log_2 7$.
$= 4.392$ Suma.

c. $\log_2 49 = \log_2 7^2$ Escribe 49 como 7^2.
$= 2 \log_2 7$ Propiedad de la potencia
$\approx 2(2.807)$ Usa el valor dado de $\log_2 7$.
$= 5.614$ Multiplica.

ERROR COMÚN

Observa que en general

$\log_b \dfrac{m}{n} \neq \dfrac{\log_b m}{\log_b n}$ y

$\log_b mn \neq (\log_b m)(\log_b n)$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Usa $\log_6 5 \approx 0.898$ y $\log_6 8 \approx 1.161$ para evaluar el logaritmo.

1. $\log_6 \frac{5}{8}$ **2.** $\log_6 40$ **3.** $\log_6 64$ **4.** $\log_6 125$

Reescribir expresiones logarítmicas

Puedes usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar y reducir expresiones logarítmicas.

EJEMPLO 2 Desarrollar una expresión logarítmica

Desarrolla $\ln \frac{5x^7}{y}$.

CONSEJO DE ESTUDIO

Cuando desarrollas o reduces una expresión que incluye logaritmos, puedes presuponer que todas las variables son positivas.

SOLUCIÓN

$$\ln \frac{5x^7}{y} = \ln 5x^7 - \ln y \qquad \text{Propiedad del cociente}$$

$$= \ln 5 + \ln x^7 - \ln y \qquad \text{Propiedad del producto}$$

$$= \ln 5 + 7 \ln x - \ln y \qquad \text{Propiedad de la potencia}$$

EJEMPLO 3 Reducir una expresión logarítmica

Reduce $\log 9 + 3 \log 2 - \log 3$.

SOLUCIÓN

$$\log 9 + 3 \log 2 - \log 3 = \log 9 + \log 2^3 - \log 3 \qquad \text{Propiedad de la potencia}$$

$$= \log(9 \cdot 2^3) - \log 3 \qquad \text{Propiedad del producto}$$

$$= \log \frac{9 \cdot 2^3}{3} \qquad \text{Propiedad del cociente}$$

$$= \log 24 \qquad \text{Simplifica.}$$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Desarrolla la expresión logarítmica.

5. $\log_6 3x^4$

6. $\ln \frac{5}{12x}$

Reduce la expresión logarítmica.

7. $\log x - \log 9$

8. $\ln 4 + 3 \ln 3 - \ln 12$

Fórmula de cambio de base

Los logaritmos con cualquier base distinta de 10 o e se pueden escribir en términos de logaritmos comunes o naturales usando la *fórmula de cambio de base*. Esto te permite evaluar cualquier logaritmo usando una calculadora.

Concepto Esencial

Fórmula de cambio de base

Si a, b, y c son números reales positivos con $b \neq 1$ y $c \neq 1$, entonces

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}.$$

En particular, $\log_c a = \frac{\log a}{\log c}$ y $\log_c a = \frac{\ln a}{\ln c}$.

EJEMPLO 4 Cambiar una base usando logaritmos comunes

Evalúa $\log_3 8$ usando logaritmos comunes.

SOLUCIÓN

$$\log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} \qquad \log_c a = \frac{\log a}{\log c}$$

$$\approx \frac{0.9031}{0.4771} \approx 1.893 \qquad \text{Usa una calculadora. Luego, divide.}$$

OTRA MANERA

En el Ejemplo 4, $\log_3 8$ se puede evaluar usando logaritmos naturales.

$$\log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.893$$

Observa que obtienes la misma respuesta ya sea si usas logaritmos naturales o logaritmos comunes en la fórmula de cambio de base.

EJEMPLO 5 Cambiar una base usando logaritmos naturales

Evalúa $\log_6 24$ usando logaritmos naturales.

SOLUCIÓN

$$\log_6 24 = \frac{\ln 24}{\ln 6} \qquad \log_c a = \frac{\ln a}{\ln c}$$

$$\approx \frac{3.1781}{1.7918} \approx 1.774 \qquad \text{Usa una calculadora. Luego divide.}$$

EJEMPLO 6 Resolver un problema de la vida real

Para un sonido que tiene una intensidad I (en watts por metro cuadrado), el volumen $L(I)$ del sonido (en decibeles) está dado mediante la función

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es la intensidad de un sonido apenas audible (aproximadamente 10^{-12} watts por metro cuadrado). Un artista en un estudio de grabación aumenta el volumen de una pista de sonido de manera que la intensidad del sonido se duplica. ¿En cuántos decibeles aumenta el volumen?

SOLUCIÓN

Imagina que I es la intensidad original, de manera que $2I$ es la intensidad duplicada.

$$\text{aumento de volumen} = L(2I) - L(I) \qquad \text{Escribe una expresión.}$$

$$= 10 \log \frac{2I}{I_0} - 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{Sustituye.}$$

$$= 10\left(\log \frac{2I}{I_0} - \log \frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= 10\left(\log 2 + \log \frac{I}{I_0} - \log \frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{Propiedad del producto}$$

$$= 10 \log 2 \qquad \text{Simplifica.}$$

▶ El volumen aumenta en 10 log 2 decibeles, o aproximadamente 3 decibeles.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Usa la fórmula de cambio de base para evaluar el logaritmo.

9. $\log_5 8$ **10.** $\log_8 14$ **11.** $\log_{26} 9$ **12.** $\log_{12} 30$

13. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 6, el artista aumenta el volumen de manera que la intensidad del sonido se triplica. ¿En cuántos decibeles aumenta el volumen?

6.5 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. COMPLETAR LA ORACIÓN Para reducir la expresión $\log_3 2x + \log_3 y$, necesitas usar la propiedad ___________ de los logaritmos.

2. ESCRIBIR Describe dos maneras de evaluar $\log_7 12$ con una calculadora.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–8, usa $\log_7 4 \approx 0.712$ y $\log_7 12 \approx 1.277$ para evaluar el logaritmo. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $\log_7 3$

4. $\log_7 48$

5. $\log_7 16$

6. $\log_7 64$

7. $\log_7 \frac{1}{4}$

8. $\log_7 \frac{1}{3}$

En los Ejercicios 9–12, une la expresión con el logaritmo que tiene el mismo valor. Justifica tu respuesta.

9. $\log_3 6 - \log_3 2$

10. $2 \log_3 6$

11. $6 \log_3 2$

12. $\log_3 6 + \log_3 2$

A. $\log_3 64$

B. $\log_3 3$

C. $\log_3 12$

D. $\log_3 36$

En los Ejercicios 13–20, desarrolla la expresión logarítmica. *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $\log_3 4x$

14. $\log_8 3x$

15. $\log 10x^5$

16. $\ln 3x^4$

17. $\ln \frac{x}{3y}$

18. $\ln \frac{6x^2}{y^4}$

19. $\log_7 5\sqrt{x}$

20. $\log_5 \sqrt[3]{x^2y}$

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 21 y 22, describe y corrige el error al desarrollar la expresión logarítmica.

21.

✗ $\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$

22.

✗ $\ln 8x^3 = 3 \ln 8 + \ln x$

En los Ejercicios 23–30, reduce la expresión logarítmica. *(Consulta el Ejemplo 3).*

23. $\log_4 7 - \log_4 10$

24. $\ln 12 - \ln 4$

25. $6 \ln x + 4 \ln y$

26. $2 \log x + \log 11$

27. $\log_5 4 + \frac{1}{3} \log_5 x$

28. $6 \ln 2 - 4 \ln y$

29. $5 \ln 2 + 7 \ln x + 4 \ln y$

30. $\log_3 4 + 2 \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 x$

31. RAZONAR ¿Cuál de las siguientes opciones *no* es equivalente a $\log_5 \frac{y^4}{3x}$? Justifica tu respuesta.

Ⓐ $4 \log_5 y - \log_5 3x$

Ⓑ $4 \log_5 y - \log_5 3 + \log_5 x$

Ⓒ $4 \log_5 y - \log_5 3 - \log_5 x$

Ⓓ $\log_5 y^4 - \log_5 3 - \log_5 x$

32. RAZONAR ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es correcta? Justifica tu respuesta.

Ⓐ $\log_7 x + 2 \log_7 y = \log_7(x + y^2)$

Ⓑ $9 \log x - 2 \log y = \log \frac{x^9}{y^2}$

Ⓒ $5 \log_4 x + 7 \log_2 y = \log_6 x^5y^7$

Ⓓ $\log_9 x - 5 \log_9 y = \log_9 \frac{x}{5y}$

En los Ejercicios 33–40 usa la fórmula de cambio de base para evaluar el logaritmo. *(Consulta los Ejemplos 4 y 5).*

33. $\log_4 7$ **34.** $\log_5 13$

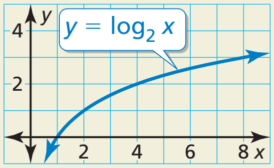
35. $\log_9 15$ **36.** $\log_8 22$

37. $\log_6 17$ **38.** $\log_2 28$

39. $\log_7 \frac{3}{16}$ **40.** $\log_3 \frac{9}{40}$

41. ARGUMENTAR Tu amigo dice que puedes usar la fórmula de cambio de base para hacer la gráfica de $y = \log_3 x$ usando una calculadora gráfica. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica tu razonamiento.

42. ¿CÓMO LO VES? Usa la gráfica para determinar el valor de $\frac{\log 8}{\log 2}$.

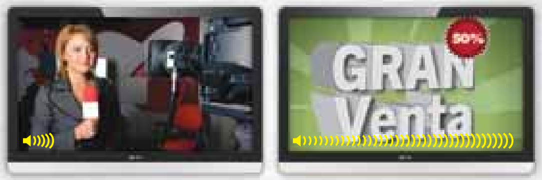


REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 43–44, usa la función $L(I)$ dada en el Ejemplo 6.**

43. La ballena azul puede producir sonidos con una intensidad que es 1 millón de veces mayor que la intensidad del sonido más fuerte que puede hacer el humano. Halla la diferencia en los niveles de decibel de los sonidos hechos por la ballena azul y un humano. *(Consulta el Ejemplo 6).*

44. La intensidad del sonido de cierto comercial de televisión es 10 veces mayor que la intensidad del programa de televisión. ¿En cuántos decibeles aumenta el volumen?

Intensidad del sonido de la televisión



Durante el programa: Intensidad $= I$

Durante el comercial: Intensidad $= 10I$

45. REESCRIBIR UNA FÓRMULA En ciertas condiciones, la velocidad del viento s (en nudos) a una altitud de h metros sobre una llanura herbosa se puede representar mediante la función

$$s(h) = 2 \ln 100h.$$

a. ¿En qué cantidad aumenta la velocidad del viento si se duplica la altitud?

b. Demuestra que la función dada se puede escribir en términos de logaritmos comunes como

$$s(h) = \frac{2}{\log e}(\log h + 2).$$

46. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Determina si la fórmula

$$\log_b(M + N) = \log_b M + \log_b N$$

es verdadera para todos los valores positivos reales de M, N, y b (con $b \neq 1$) Justifica tu respuesta.

47. USAR LA ESTRUCTURA Usa las propiedades de los exponentes para probar la fórmula de cambio de base. (*Consejo:* Sea $x = \log_b a$, $y = \log_b c$ y $z = \log_c a$.)

48. PENSAMIENTO CRÍTICO Describe *tres* maneras de transformar la gráfica de $f(x) = \log x$ para obtener la gráfica de $g(x) = \log 100x - 1$. Justifica tus respuestas.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Haz una gráfica para resolver la desigualdad. *(Sección 3.6)*

49. $x^2 - 4 > 0$ **50.** $2(x - 6)^2 - 5 \geq 37$

51. $x^2 + 13x + 42 < 0$ **52.** $-x^2 - 4x + 6 \leq -6$

Haz una gráfica del sistema de ecuaciones relacionado para resolver la ecuación. *(Sección 3.5)*

53. $4x^2 - 3x - 6 = -x^2 + 5x + 3$ **54.** $-(x + 3)(x - 2) = x^2 - 6x$

55. $2x^2 - 4x - 5 = -(x + 3)^2 + 10$ **56.** $-(x + 7)^2 + 5 = (x + 10)^2 - 3$

6.6 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Pregunta esencial

¿Cómo puedes resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas?

EXPLORACIÓN 1 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

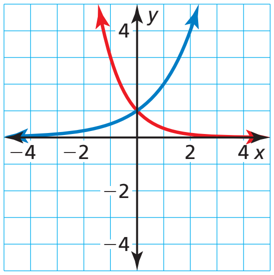
Trabaja con un compañero. Une cada ecuación con la gráfica de su sistema de ecuaciones relacionado. Explica tu razonamiento. Luego usa la gráfica para resolver la ecuación.

a. $e^x = 2$ **b.** $\ln x = -1$

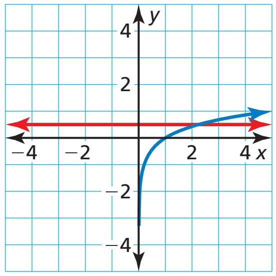
c. $2^x = 3^{-x}$ **d.** $\log_4 x = 1$

e. $\log_5 x = \frac{1}{2}$ **f.** $4^x = 2$

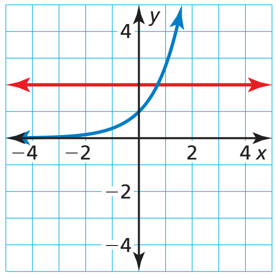
A.



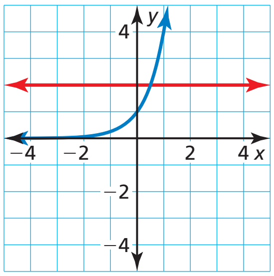
B.



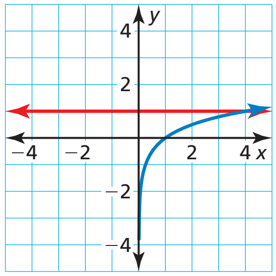
C.



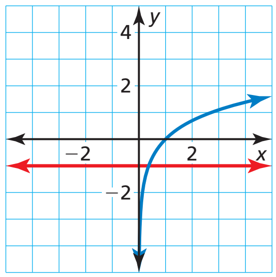
D.



E.



F.



DARLE SENTIDO A LOS PROBLEMAS

Para dominar las matemáticas, necesitas planificar una ruta de solución en vez de simplemente apresurarte en intentar lograr una solución.

EXPLORACIÓN 2 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Trabaja con un compañero. Verifica las ecuaciones en la Exploración 1(a) y 1(b). Supón que quieres una forma más precisa de resolver las ecuaciones que usar un método gráfico.

a. Demuestra cómo podrías usar un *enfoque numérico* al crear una tabla. Por ejemplo, podrías usar una hoja de cálculo para resolver las ecuaciones.

b. Demuestra cómo podrías usar un *enfoque analítico*. Por ejemplo, podrías intentar resolver las ecuaciones usando las propiedades inversas de los exponentes y logaritmos.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes resolver las ecuaciones exponenciales y logarítmicas?

4. Resuelve cada ecuación usando cualquiera de los métodos. Explica por qué elegiste ese método.

a. $16^x = 2$ **b.** $2^x = 4^{2x+1}$

c. $2^x = 3^{x+1}$ **d.** $\log x = \frac{1}{2}$

e. $\ln x = 2$ **f.** $\log_3 x = \frac{3}{2}$

6.6 Lección

Qué aprenderás

- Resolver ecuaciones exponenciales.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.
- Resolver desigualdades exponenciales y logarítmicas.

Vocabulario Esencial

ecuaciones exponenciales, *pág. 334*
ecuaciones logarítmicas, *pág. 335*

Anterior
solución extraña
desigualdad

Resolver ecuaciones exponenciales

Las **ecuaciones exponenciales** son ecuaciones en las que las expresiones variables se dan como exponentes. El siguiente resultado es útil para resolver ciertas ecuaciones exponenciales.

Concepto Esencial

Propiedad de igualdad de ecuaciones exponenciales

Álgebra Si b es un número real positivo distinto de 1, entonces $b^x = b^y$ si y solo si $x = y$.

Ejemplo Si $3^x = 3^5$, entonces $x = 5$. Si $x = 5$, entonces $3^x = 3^5$.

La propiedad anterior es útil para resolver una ecuación exponencial si cada lado de la ecuación usa la misma base (o se puede reescribir para usar la misma base). Si no es conveniente escribir cada lado de una ecuación exponencial usando la misma base, puedes intentar resolver la ecuación tomando un logaritmo de cada lado.

EJEMPLO 1 Resolver ecuaciones exponenciales

Resuelve cada ecuación.

a. $100^x = \left(\frac{1}{10}\right)^{x-3}$ **b.** $2^x = 7$

SOLUCIÓN

a.

$100^x = \left(\frac{1}{10}\right)^{x-3}$	Escribe la ecuación original.
$(10^2)^x = (10^{-1})^{x-3}$	Reescribe 100 y $\frac{1}{10}$ como potencias de base 10.
$10^{2x} = 10^{-x+3}$	Propiedad de la potencia de una potencia
$2x = -x + 3$	Propiedad de igualdad para ecuaciones exponenciales
$x = 1$	Resuelve para hallar x.

Verifica

$$100^1 \stackrel{?}{=} \left(\frac{1}{10}\right)^{1-3}$$

$$100 \stackrel{?}{=} \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$$

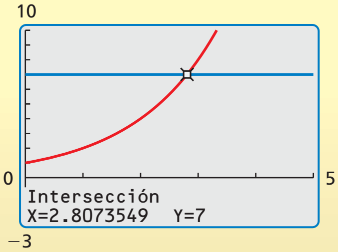
$$100 = 100 \checkmark$$

b.

$2^x = 7$	Escribe la ecuación original.
$\log_2 2^x = \log_2 7$	Saca $\log_2$ de cada lado.
$x = \log_2 7$	$\log_b b^x = x$
$x \approx 2.807$	Usa una calculadora.

Verifica

Ingresa $y = 2^x$ y $y = 7$ en una calculadora gráfica. Usa la función *intersecar* para hallar el punto de intersección de las gráficas. Las gráficas se intersecan aproximadamente en (2.807, 7). Entonces, la solución de $2^x = 7$ es aproximadamente 2.807. ✓



Una aplicación importante de las ecuaciones exponenciales es la *ley del enfriamiento de Newton*. Esta ley establece que, para una sustancia en proceso de enfriamiento con una temperatura inicial T_0, la temperatura T después de t minutos, puede representarse por

$$T = (T_0 - T_R)e^{-rt} + T_R$$

donde T_R es la temperatura circundante y r es la tasa de enfriamiento de la sustancia.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Observa que la ley del enfriamiento de Newton representa la temperatura de un cuerpo que se enfría sumando una función constante, T_R, a una función exponencial que decrementa, $(T_0 - T_R)e^{-rt}$.

EJEMPLO 2 Resolver un problema de la vida real

Estás cocinando *aleecha*, un guiso etíope. Cuando lo retiras de la estufa, su temperatura es de 212°F. La temperatura ambiental es 70°F y la tasa de enfriamiento del guiso es $r = 0.046$. ¿Cuánto tiempo se necesitará para enfriar el guiso para que al servirlo su temperatura sea de 100°F?

SOLUCIÓN

Usa la ley del enfriamiento de Newton con $T = 100$, $T_0 = 212$, $T_R = 70$ y $r = 0.046$.

$T = (T_0 - T_R)e^{-rt} + T_R$	Ley de enfriamiento de Newton
$100 = (212 - 70)e^{-0.046t} + 70$	Sustituye por T, T_0, T_R, y r.
$30 = 142e^{-0.046t}$	Resta 70 a cada lado.
$0.211 \approx e^{-0.046t}$	Divide cada lado entre 142.
$\ln 0.211 \approx \ln e^{-0.046t}$	Saca el logaritmo natural de cada lado.
$-1.556 \approx -0.046t$	$\ln e^x = \log_e e^x = x$
$33.8 \approx t$	Divide cada lado entre -0.046.

▶ Deberías esperar aproximadamente 34 minutos antes de servir el guiso.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación.

1. $2^x = 5$ **2.** $7^{9x} = 15$ **3.** $4e^{-0.3x} - 7 = 13$

4. ¿QUÉ PASA SI? En el Ejemplo 2, ¿Cuánto tiempo se necesitará para enfriar el guiso a 100ºF si la temperatura ambiente es de 75°F?

Resolver ecuaciones logarítmicas

Las **ecuaciones logarítmicas** son ecuaciones que incluyen logaritmos de expresiones variables. Puedes usar la siguiente propiedad para resolver algunos tipos de expresiones logarítmicas.

Concepto Esencial

Propiedad de igualdad para ecuaciones logarítmicas

Álgebra Si b, x, y y son números reales positivos y $b \neq 1$, entonces $\log_b x = \log_b y$ si y solo si $x = y$.

Ejemplo Si $\log_2 x = \log_2 7$, entonces $x = 7$. Si $x = 7$, entonces $\log_2 x = \log_2 7$.

La propiedad precedente implica que si te dan una ecuación $x = y$, entonces puedes potenciar cada lado para obtener una ecuación de la forma $b^x = b^y$. Esta técnica es útil para resolver algunas ecuaciones logarítmicas.

EJEMPLO 3 Resolver ecuaciones logarítmicas

Resuelve (a) $\ln(4x - 7) = \ln(x + 5)$ y (b) $\log_2(5x - 17) = 3$.

SOLUCIÓN

a. $\ln(4x - 7) = \ln(x + 5)$ — Escribe la ecuación original.

$4x - 7 = x + 5$ — Propiedad de igualdad para ecuaciones logarítmicas

$3x - 7 = 5$ — Resta x de cada lado.

$3x = 12$ — Suma 7 a cada lado.

$x = 4$ — Divide cada lado entre 3.

Verifica

$$\ln(4 \cdot 4 - 7) \stackrel{?}{=} \ln(4 + 5)$$
$$\ln(16 - 7) \stackrel{?}{=} \ln 9$$
$$\ln 9 = \ln 9 \checkmark$$

b. $\log_2(5x - 17) = 3$ — Escribe la ecuación original.

$2^{\log_2(5x - 17)} = 2^3$ — Eleva exponencialmente cada lado usando base 2.

$5x - 17 = 8$ — $b^{\log_b x} = x$

$5x = 25$ — Suma 17 a cada lado.

$x = 5$ — Divide cada lado entre 5.

Verifica

$$\log_2(5 \cdot 5 - 17) \stackrel{?}{=} 3$$
$$\log_2(25 - 17) \stackrel{?}{=} 3$$
$$\log_2 8 \stackrel{?}{=} 3$$

Dado que $2^3 = 8$, $\log_2 8 = 3$. ✓

Dado que el dominio de una función logarítmica generalmente no incluye todos los números reales, asegúrate verificar si hay soluciones extrañas de las ecuaciones logarítmicas. Puedes hacer esto algebraicamente o gráficamente.

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelve $\log 2x + \log(x - 5) = 2$.

SOLUCIÓN

$\log 2x + \log(x - 5) = 2$ — Escribe la ecuación original.

$\log[2x(x - 5)] = 2$ — Propiedad del producto de logaritmos

$10^{\log[2x(x - 5)]} = 10^2$ — Eleva exponencialmente cada lado usando base 10.

$2x(x - 5) = 100$ — $b^{\log_b x} = x$

$2x^2 - 10x = 100$ — Propiedad distributiva

$2x^2 - 10x - 100 = 0$ — Escribe en forma estándar.

$x^2 - 5x - 50 = 0$ — Divide cada lado entre 2.

$(x - 10)(x + 5) = 0$ — Factoriza

$x = 10$ o $x = -5$ — Propiedad del producto cero

▶ La solución aparente $x = -5$ es extraña. Entonces, la única solución es $x = 10$.

Verifica

$$\log(2 \cdot 10) + \log(10 - 5) \stackrel{?}{=} 2$$
$$\log 20 + \log 5 \stackrel{?}{=} 2$$
$$\log 100 \stackrel{?}{=} 2$$
$$2 = 2 \checkmark$$

$$\log[2 \cdot (-5)] + \log(-5 - 5) \stackrel{?}{=} 2$$
$$\log(-10) + \log(-10) \stackrel{?}{=} 2$$

Dado que $\log(-10)$ es indefinido, -5 no es una solución. ✗

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación. Verifica si hay soluciones extrañas.

5. $\ln(7x - 4) = \ln(2x + 11)$

6. $\log_2(x - 6) = 5$

7. $\log 5x + \log(x - 1) = 2$

8. $\log_4(x + 12) + \log_4 x = 3$

Resolver desigualdades exponenciales y logarítmicas

Las *desigualdades exponenciales* son desigualdades en las que las expresiones variables se dan como exponentes y las *desigualdades logarítmicas* son desigualdades que incluyen logaritmos de expresiones variables. Para resolver algebraicamente las desigualdades exponenciales y logarítmicas, usa estas propiedades. Observa que las propiedades son verdaderas para $\leq$ y $\geq$.

Propiedad de la desigualdad exponencial: Si b es un número real positivo mayor que 1, entonces $b^x > b^y$ si y solo si $x > y$, y $b^x < b^y$ si y solo si $x < y$.

Propiedad de la desigualdad logarítmica: Si b, x y y son números reales positivos y $b > 1$, entonces $\log_b x > \log_b y$ si y solo si $x > y$, y $\log_b x < \log_b y$ si y solo si $x < y$.

También puedes resolver una desigualdad tomando un logaritmo de cada lado o mediante la exponenciación.

CONSEJO DE ESTUDIO

Asegúrate de entender que estas propiedades de la desigualdad son solo verdaderas para los valores de $b > 1$.

EJEMPLO 5 Resolver una desigualdad exponencial

Resuelve $3^x < 20$.

SOLUCIÓN

$3^x < 20$ Escribe la desigualdad original.

$\log_3 3^x < \log_3 20$ Saca $\log_3$ de cada lado.

$x < \log_3 20$ $\log_b b^x = x$

▶ La solución es $x < \log_3 20$. Dado que $\log_3 20 \approx 2.727$, la solución aproximada es $x < 2.727$.

EJEMPLO 6 Resolver una desigualdad logarítmica

Resuelve $\log x \leq 2$.

SOLUCIÓN

Método 1 Usa un enfoque algebraico.

$\log x \leq 2$ Escribe la desigualdad original.

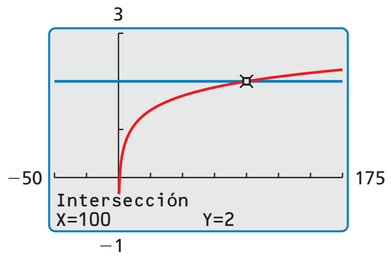
$10^{\log_{10} x} \leq 10^2$ Eleva exponencialmente cada lado usando base 10.

$x \leq 100$ $b^{\log_b x} = x$

▶ Dado que $\log x$ es definido solamente si $x > 0$, la solución es $0 < x \leq 100$.

Método 2 Usa un método gráfico.

Haz una gráfica de $y = \log x$ y $y = 2$ en la misma ventana de visualización. Usa la función *intersecar* para determinar que las gráficas se intersecan si $x = 100$. La gráfica de $y = \log x$ está en o debajo de la gráfica de $y = 2$ si $0 < x \leq 100$.



▶ La solución es $0 < x \leq 100$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la desigualdad.

9. $e^x < 2$ **10.** $10^{2x-6} > 3$ **11.** $\log x + 9 < 45$ **12.** $2 \ln x - 1 > 4$

6.6 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La ecuación $3^{x-1} = 34$ es un ejemplo de una ecuación ___________.

2. **ESCRIBIR** Compara los métodos para resolver las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

3. **ESCRIBIR** ¿Cuándo tienen soluciones extrañas las ecuaciones logarítmicas?

4. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Si b es un número real positivo distinto de 1, entonces $b^x = b^y$ si y solo si _________.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–16, resuelve la ecuación. *(Consulta el Ejemplo 1).*

5. $7^{3x+5} = 7^{1-x}$

6. $e^{2x} = e^{3x-1}$

7. $5^{x-3} = 25^{x-5}$

8. $6^{2x-6} = 36^{3x-5}$

9. $3^x = 7$

10. $5^x = 33$

11. $49^{5x+2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{11-x}$

12. $512^{5x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-4-x}$

13. $7^{5x} = 12$

14. $11^{6x} = 38$

15. $3e^{4x} + 9 = 15$

16. $2e^{2x} - 7 = 5$

17. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La longitud ℓ (en centímetros) de un tiburón martillo común se puede representar mediante la función

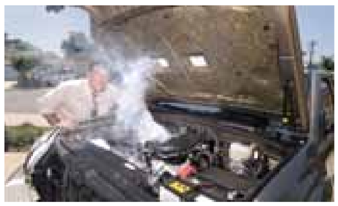
$$\ell = 266 - 219e^{-0.05t}$$

donde t es la edad (en años) del tiburón. ¿Qué edad tiene un tiburón que tiene 175 centímetros de longitud?

18. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Cien gramos de radio están almacenados en un contenedor. La cantidad R (en gramos) de radio presente después de t años se puede representar mediante $R = 100e^{-0.00043t}$. ¿Después de cuántos años quedarán presentes solo 5 gramos de radio?

En los Ejercicios 19 y 20, usa la ley del enfriamiento de Newton para resolver el problema. *(Consulta el Ejemplo 2).*

19. Estás manejando en un día caluroso cuando tu carro se recalienta y deja de funcionar. El carro se recalienta a 280ºF y se puede manejar otra vez a 230ºF. Si hacen 80ºF afuera, la tasa de enfriamiento del carro es $r = 0.0058$. ¿Cuánto tiempo tienes que esperar hasta que puedas volver a manejar?



20. Cocinas un pavo hasta que la temperatura interna alcanza 180ºF. Colocas el pavo en la mesa hasta que la temperatura interna llegue a los 100ºF y se pueda rebanar. Si la temperatura ambiente es de 72ºF, la tasa de enfriamiento del pavo es de $r = 0.067$. ¿Cuánto tiempo tienes que esperar hasta que puedas rebanar el pavo?

En los Ejercicios 21–32, resuelve la ecuación. *(Consulta el Ejemplo 3).*

21. $\ln(4x - 7) = \ln(x + 11)$

22. $\ln(2x - 4) = \ln(x + 6)$

23. $\log_2(3x - 4) = \log_2 5$

24. $\log(7x + 3) = \log 38$

25. $\log_2(4x + 8) = 5$

26. $\log_3(2x + 1) = 2$

27. $\log_7(4x + 9) = 2$

28. $\log_5(5x + 10) = 4$

29. $\log(12x - 9) = \log 3x$

30. $\log_6(5x + 9) = \log_6 6x$

31. $\log_2(x^2 - x - 6) = 2$

32. $\log_3(x^2 + 9x + 27) = 2$

En los Ejercicios 33–40, resuelve la ecuación. Verifica si hay soluciones extrañas. *(Consulta el Ejemplo 4).*

33. $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$

34. $\log_6 3x + \log_6(x - 1) = 3$

35. $\ln x + \ln(x + 3) = 4$

36. $\ln x + \ln(x - 2) = 5$

37. $\log_3 3x^2 + \log_3 3 = 2$

38. $\log_4(-x) + \log_4(x + 10) = 2$

39. $\log_3(x - 9) + \log_3(x - 3) = 2$

40. $\log_5(x + 4) + \log_5(x + 1) = 2$

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 41 y 42, describe y corrige el error al resolver la ecuación.

41.

$$\begin{aligned}
\log_3(5x - 1) &= 4 \\
3^{\log_3(5x-1)} &= 4^3 \\
5x - 1 &= 64 \\
5x &= 65 \\
x &= 13
\end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned}
\log_4(x + 12) + \log_4 x &= 3 \\
\log_4[(x + 12)(x)] &= 3 \\
4^{\log_4[(x+12)(x)]} &= 4^3 \\
(x + 12)(x) &= 64 \\
x^2 + 12x - 64 &= 0 \\
(x + 16)(x - 4) &= 0 \\
x = -16 \quad o \quad x &= 4
\end{aligned}$$

43. RESOLVER PROBLEMAS Depositas \$100 en una cuenta que paga 6% de interés anual. ¿Cuánto tiempo demorará el balance en llegar a \$1000 con cada frecuencia de composición?

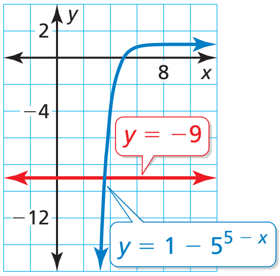
a. anual **b.** trimestral

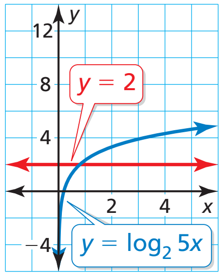
c. diaria **d.** continua

44. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La *magnitud aparente* de una estrella es una medida del brillo de la estrella tal como aparece para los observadores en la Tierra. La magnitud aparente M de la estrella más tenue que se puede ver con un telescopio es $M = 5 \log D + 2$, donde D es el diámetro (en milímetros) del lente objetivo del telescopio. ¿Cuál es el diámetro del lente objetivo de un telescopio que puede revelar estrellas con una magnitud de 12?

45. ANALIZAR RELACIONES Aproxima la solución de cada ecuación usando la gráfica.

a. $1 - 5^{5-x} = -9$ **b.** $\log_2 5x = 2$





46. ARGUMENTAR Tu amigo dice que una ecuación logarítmica no puede tener una solución negativa porque las funciones logarítmicas son indefinidas para los números negativos. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Justifica tu respuesta.

En los Ejercicios 47–54, resuelve la desigualdad. *(Consulta los Ejemplos 5 y 6).*

47. $9^x > 54$ **48.** $4^x \leq 36$

49. $\ln x \geq 3$ **50.** $\log_4 x < 4$

51. $3^{4x-5} < 8$ **52.** $e^{3x+4} > 11$

53. $-3 \log_5 x + 6 \leq 9$ **54.** $-4 \log_5 x - 5 \geq 3$

55. COMPARAR MÉTODOS Resuelve $\log_5 x < 2$ algebraica y gráficamente. ¿Qué método prefieres? Explica tu razonamiento.

56. RESOLVER PROBLEMAS Depositas \$1000 en una cuenta que paga 3.5% de interés anual compuesto mensualmente. ¿Cuándo será tu balance de por lo menos \$1200? ¿Y \$3500?

57. RESOLVER PROBLEMAS Una inversión que gana una tasa de retorno r duplica su valor en t años, donde $t = \dfrac{\ln 2}{\ln(1 + r)}$ y r está expresado como decimal. ¿Qué tasas de retorno duplicarán el valor de una inversión en menos de 10 años?

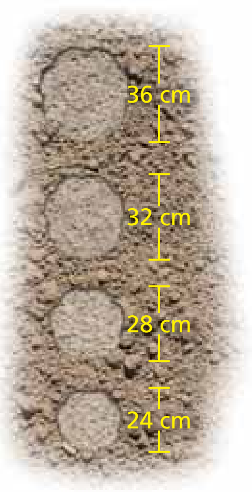
58. RESOLVER PROBLEMAS Tu familia compra un carro nuevo por \$20,000 dólares. Su valor disminuye en 15% cada año. ¿Durante qué intervalo el valor del carro excede los \$10,000?

USAR HERRAMIENTAS En los Ejercicios 59–62, usa una calculadora gráfica para resolver la ecuación.

59. $\ln 2x = 3^{-x+2}$ **60.** $\log x = 7^{-x}$

61. $\log x = 3^{x-3}$ **62.** $\ln 2x = e^{x-3}$

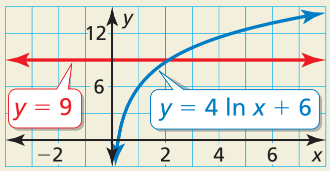
63. REESCRIBIR UNA FÓRMULA Un biólogo puede estimar la edad de un elefante africano midiendo la longitud de sus huellas y usando la ecuación $\ell = 45 - 25.7e^{-0.09a}$, donde ℓ es la longitud (en centímetros) de la huella y a es la edad (en años).



a. Reescribe la ecuación resolviendo para a en términos de ℓ.

b. Usa la ecuación de la parte (a) para hallar las edades de los elefantes cuyas huellas se muestran.

64. ¿CÓMO LO VES? Usa la gráfica para resolver la desigualdad $4 \ln x + 6 > 9$. Explica tu razonamiento.



65. FINAL ABIERTO Escribe una ecuación exponencial que tenga una solución de $x = 4$. Luego escribe una ecuación logarítmica que tenga una solución de $x = -3$.

66. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Da ejemplos de ecuaciones logarítmicas o exponenciales que tengan una solución, dos soluciones y ninguna solución.

PENSAMIENTO CRÍTICO En los Ejercicios 67–72, resuelve la ecuación.

67. $2^{x+3} = 5^{3x-1}$

68. $10^{3x-8} = 2^{5-x}$

69. $\log_3(x - 6) = \log_9 2x$

70. $\log_4 x = \log_8 4x$

71. $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

72. $5^{2x} + 20 \cdot 5^x - 125 = 0$

73. ESCRIBIR En los Ejercicios 67–70, resolviste ecuaciones exponenciales y logarítmicas con diferentes bases. Describe métodos generales para resolver este tipo de ecuaciones.

74. RESOLVER PROBLEMAS Cuando rayos X de una longitud de onda fija chocan con un material de x centímetros de grosor, la intensidad $I(x)$ de los rayos X transmitidos a través del material está dada por $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, donde I_0 es la intensidad inicial y μ es el valor que depende del tipo de material y la longitud de onda de los rayos X. La tabla muestra los valores de μ para diversos materiales y rayos X de longitud de onda media.

Material	Aluminio	Cobre	Plomo
Valor de μ	0.43	3.2	43

a. Halla el grosor de la placa de aluminio que reduce la intensidad de los rayos X a 30% de su intensidad inicial. (*Consejo:* Halla el valor de x para el cual $I(x) = 0.3I_0$.)

b. Repite la parte (a) para la placa de cobre.

c. Repite la parte (a) para la placa de plomo.

d. Tu dentista te pone un mandil de plomo antes de tomarte una radiografía dental para protegerte de la radiación nociva. Basándote en tus resultados en las partes (a)–(c), explica por qué el plomo es un mejor material a usar que el aluminio o el cobre.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Escribe una ecuación en forma punto–pendiente de la línea que pasa por el punto dado y tiene la pendiente dada. *(Manual de revisión de destrezas)*

75. $(1, -2);\ m = 4$

76. $(3, 2);\ m = -2$

77. $(3, -8);\ m = -\frac{1}{3}$

78. $(2, 5);\ m = 2$

Usa las diferencias finitas para determinar el grado de la función polinomial que se ajuste a los datos. Luego usa herramientas tecnológicas para hallar la función polinomial. *(Sección 4.9)*

79. $(-3, -50), (-2, -13), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 15), (3, 52), (4, 125)$

80. $(-3, 139), (-2, 32), (-1, 1), (0, -2), (1, -1), (2, 4), (3, 37), (4, 146)$

81. $(-3, -327), (-2, -84), (-1, -17), (0, -6), (1, -3), (2, -32), (3, -189), (4, -642)$

6.7 Representar con funciones exponenciales y logarítmicas

Pregunta esencial

¿Cómo puedes reconocer los modelos polinomiales, exponenciales y logarítmicos?

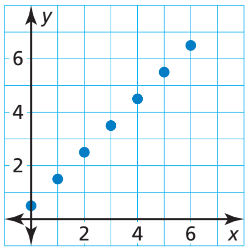
EXPLORACIÓN 1 Reconocer diferentes tipos de modelos

Trabaja con un compañero. Une cada tipo de modelo con el diagrama de dispersión apropiado. Usa un programa de regresión para hallar un modelo que se ajuste al diagrama de dispersión.

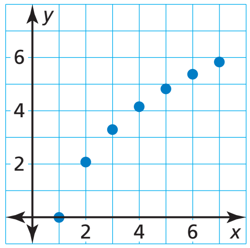
a. lineal (pendiente positiva) **b.** lineal (pendiente negativa) **c.** cuadrático

d. cúbico **e.** exponencial **f.** logarítmico

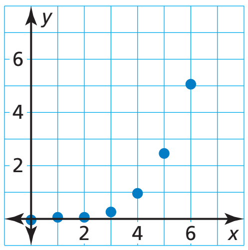
A.



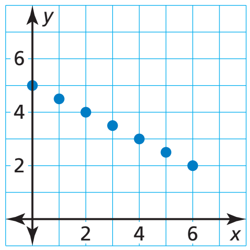
B.



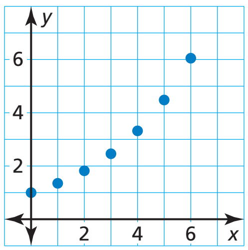
C.



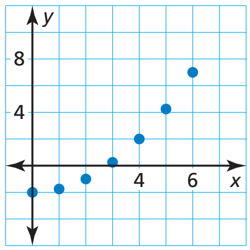
D.



E.



F.



USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas usar herramientas tecnológicas para explorar y profundizar tu entendimiento de los conceptos.

EXPLORACIÓN 2 Explorar modelos gaussianos y logísticos

Trabaja con un compañero. Se dan dos tipos comunes de funciones que están relacionadas con las funciones exponenciales. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de cada función. Luego determina el dominio, el rango, la intersección y la(s) asíntota(s) de la función.

a. Función gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$

b. Función logística: $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes reconocer los modelos polinomiales, exponenciales y logarítmicos?

4. Consulta en Internet o en alguna otra referencia para hallar datos de la vida real que se puedan representar usando uno de los tipos dados en la Exploración 1. Crea una tabla y un diagrama de dispersión de los datos. Luego usa un programa de regresión para hallar un modelo que se ajuste a los datos.

6.7 Lección

Qué aprenderás

- Clasificar conjuntos de datos.
- Escribir funciones exponenciales.
- Usar herramientas tecnológicas para hallar modelos exponenciales y logarítmicos.

Vocabulario Esencial

Anterior
diferencias finitas
razón común
forma de punto y pendiente

Clasificar datos

Has analizado *diferencias finitas* de datos con valores de entrada igualmente espaciados para determinar qué tipo de función polinomial se puede usar para representar los datos. Para los datos exponenciales con valores de entrada igualmente espaciados, los valores de salida se multiplican por un factor constante. Entonces, los valores de salida consecutivos forman una razón constante.

EJEMPLO 1 **Clasificar conjuntos de datos**

Determina el tipo de función que representa cada tabla.

a.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0.5	1	2	4	8	16	32

b.

x	−2	0	2	4	6	8	10
y	2	0	2	8	18	32	50

SOLUCIÓN

a. Los valores de entrada están igualmente espaciados. Busca un patrón en los valores de salida.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0.5	1	2	4	8	16	32

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

- Al aumentar x en 1, y se multiplica por 2. Entonces, la razón común es 2, y los datos de la tabla representan una función exponencial.

b. Los valores de entrada están igualmente espaciados. Los valores de salida no tienen una razón común. Entonces, analiza las diferencias finitas.

x	−2	0	2	4	6	8	10
y	2	0	2	8	18	32	50

−2 2 6 10 14 18 primeras diferencias

4 4 4 4 4 segundas diferencias

- Las segundas diferencias son constantes. Entonces, los datos de la tabla representan una función cuadrática.

RECUERDA

Las primeras diferencias de las funciones lineales son constantes, las segundas diferencias de las funciones cuadráticas son constantes, y así sucesivamente.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Determina el tipo de función que representa la tabla. Explica tu razonamiento.

1.

x	0	10	20	30
y	15	12	9	6

2.

x	0	2	4	6
y	27	9	3	1

Escribir funciones exponenciales

Sabes que dos puntos determinan una línea recta. En forma similar, dos puntos determinan una curva exponencial.

EJEMPLO 2 Escribir una función exponencial usando dos puntos

Escribe una función exponencial $y = ab^x$ cuya gráfica pase por $(1, 6)$ y $(3, 54)$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Sustituye las coordenadas de los dos puntos dados en $y = ab^x$.

$$6 = ab^1 \qquad \text{Ecuación 1: Sustituye 6 por } y \text{ y 1 por } x.$$

$$54 = ab^3 \qquad \text{Ecuación 2: Sustituye 54 por } y \text{ y 3 por } x.$$

Paso 2 Resuelve para a en la Ecuación 1 para obtener $a = \frac{6}{b}$ y sustituye esta expresión por a en la Ecuación 2.

$$54 = \left(\frac{6}{b}\right)b^3 \qquad \text{Sustituye } \frac{6}{b} \text{ por } a \text{ en la Ecuación 2.}$$

$$54 = 6b^2 \qquad \text{Simplifica.}$$

$$9 = b^2 \qquad \text{Divide cada lado entre 6.}$$

$$3 = b \qquad \text{Saca la raíz cuadrada positiva dado } b > 0.$$

RECUERDA

Sabes que b debe ser positivo por la definición de una función exponencial.

Paso 3 Determina que $a = \frac{6}{b} = \frac{6}{3} = 2$.

▶ Entonces, la función exponencial es $y = 2(3^x)$.

Los datos no siempre muestran una relación exponencial *exacta*. Cuando los datos de un diagrama de dispersión muestran una relación *aproximadamente* exponencial, puedes representar los datos con una función exponencial.

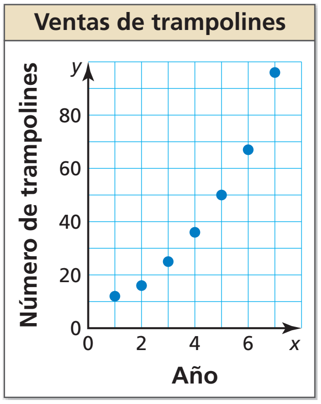
EJEMPLO 3 Hallar un modelo exponencial

Una tienda vende trampolines. La tabla muestra los números y de trampolines vendidos durante el año número x que la tienda ha estado abierta. Escribe una función que represente los datos.

Año, x	Número de trampolines, y
1	12
2	16
3	25
4	36
5	50
6	67
7	96

SOLUCIÓN

Paso 1 Haz un diagrama de dispersión de los datos. Los datos parecen exponenciales.



Paso 2 Elige dos puntos cualquiera para escribir un modelo, tal como $(1, 12)$ y $(4, 36)$. Sustituye las coordenadas de estos dos puntos en $y = ab^x$.

$$12 = ab^1$$

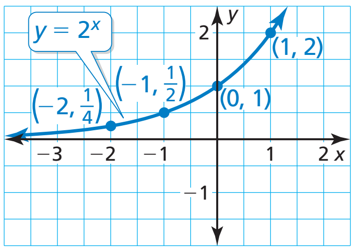
$$36 = ab^4$$

Resuelve para a en la primera ecuación para obtener $a = \frac{12}{b}$. Sustituye para obtener $b = \sqrt[3]{3} \approx 1.44$ y $a = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \approx 8.32$.

▶ Entonces, una función exponencial que representa los datos es $y = 8.32(1.44)^x$.

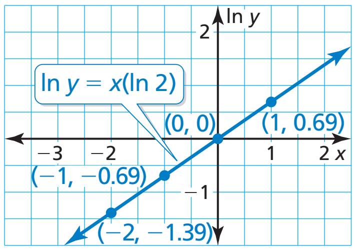
Un conjunto de más de dos puntos (x, y) se ajusta a un patrón exponencial si y solo si el conjunto de puntos transformados $(x, \ln y)$ se ajusta a un patrón lineal.

Gráfica de los puntos (x, y)



La gráfica es una curva exponencial.

Gráfica de puntos $(x, \ln y)$



La gráfica es una línea.

EJEMPLO 4 Escribir un modelo usando puntos transformados

Usa los datos del Ejemplo 3. Crea un diagrama de dispersión de los pares de datos $(x, \ln y)$ para demostrar que un modelo exponencial debería ajustarse bien a los pares de datos originales (x, y). Luego escribe un modelo exponencial para los datos originales.

SOLUCIÓN

Paso 1 Crea una tabla de pares de datos $(x, \ln y)$.

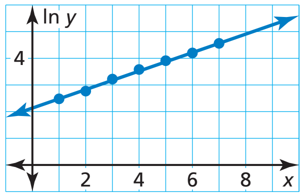
x	1	2	3	4	5	6	7
$\ln y$	2.48	2.77	3.22	3.58	3.91	4.20	4.56

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Dado que los ejes son x y $\ln y$, la forma punto-pendiente se reescribe como $\ln y - \ln y_1 = m(x - x_1)$. La pendiente de la línea que pasa por (1, 2.48) y (7, 4.56) es

$$\frac{4.56 - 2.48}{7 - 1} \approx 0.35.$$

Paso 2 Marca los puntos transformados tal como se muestra. Los puntos pertenecen cerca a una línea, entonces un modelo exponencial se ajustaría bien a los datos originales.



Paso 3 Halla un modelo exponencial $y = ab^x$ eligiendo dos puntos cualquiera de la línea, tales como (1, 2.48) y (7, 4.56). Usa estos puntos para escribir una ecuación de la línea. Luego resuelve para y.

$$\ln y - 2.48 = 0.35(x - 1)$$ Ecuación de línea

$$\ln y = 0.35x + 2.13$$ Simplifica.

$$y = e^{0.35x + 2.13}$$ Eleva exponencialmente cada lado usando base e.

$$y = e^{0.35x}(e^{2.13})$$ Usa las propiedades de los exponentes.

$$y = 8.41(1.42)^x$$ Simplifica.

▶ Entonces, una función exponencial que representa los datos es $y = 8.41(1.42)^x$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe una función exponencial $y = ab^x$ cuya gráfica pase por los puntos dados.

3. (2, 12), (3, 24) **4.** (1, 2), (3, 32) **5.** (2, 16), (5, 2)

6. **¿QUÉ PASA SI?** Repite los Ejemplos 3 y 4 usando los datos de venta de otra tienda.

Año, x	1	2	3	4	5	6	7
Número de trampolines, y	15	23	40	52	80	105	140

Usar la tecnología

Puedes usar herramientas tecnológicas para hallar los modelos que se ajusten mejor a los datos exponenciales y logarítmicos.

EJEMPLO 5 Hallar un modelo exponencial

Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo exponencial de los datos del Ejemplo 3. Luego usa este modelo y los modelos en los Ejemplos 3 y 4 para predecir el número de trampolines vendidos en el octavo año. Compara las predicciones.

SOLUCIÓN

Ingresa los datos a una calculadora gráfica y haz una regresión exponencial. El modelo es $y = 8.46(1.42)^x$.

```
RegExp
 y=a*b^x
 a=8.457377971
 b=1.418848603
 r²=.9972445053
 r=.9986213023
```

Sustituye $x = 8$ en cada modelo para predecir el número de trampolines vendidos en el octavo año.

Ejemplo 3: $y = 8.32(1.44)^8 \approx 154$

Ejemplo 4: $y = 8.41(1.42)^8 \approx 139$

Modelo de regresión: $y = 8.46(1.42)^8 \approx 140$

▶ Las predicciones son cercanas para el modelo de regresión y el modelo en el Ejemplo 4 que usó puntos transformados. Estas predicciones son menores que la predicción para el modelo en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 6 Hallar un modelo logarítmico

La presión atmosférica disminuye al aumentar la altitud. A nivel del mar, la presión promedio del aire es de 1 atmósfera (1.033227 kilogramos por centímetro cuadrado). La tabla muestra las presiones p (en atmósferas) en altitudes seleccionadas h (en kilómetros). Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo logarítmico de la forma $h = a + b \ln p$ que represente los datos. Estima la altitud si la presión es de 0.75 atmósferas.

Los globos meteorológicos llevan instrumentos que envían información tal como la velocidad del viento, la temperatura y la presión del aire.

Presión atmosférica, *p*	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02
Altitud, *h*	0	5	10	15	20	25

SOLUCIÓN

Ingresa los datos en una calculadora gráfica y haz una regresión logarítmica. El modelo es $h = 0.86 - 6.45 \ln p$.

```
RegLog
 y=a+blnx
 a=.8626578705
 b=-6.447382985
 r²=.9925582287
 r=-.996272166
```

Sustituye $p = 0.75$ en el modelo para obtener

$h = 0.86 - 6.45 \ln 0.75 \approx 2.7.$

▶ Entonces, si la presión del aire es de 0.75 atmósferas, la altitud es de aproximadamente 2.7 kilómetros.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

7. Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo exponencial para los datos en la pregunta 6 de la sección Monitoreo del Progreso.

8. Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo logarítmico de la forma $p = a + b \ln h$ para los datos en el Ejemplo 6. Explica por qué el resultado es un mensaje de error.

6.7 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Dado un conjunto de más de dos pares de datos (x, y), puedes decidir si una función ___________ se ajusta bien a los datos haciendo un diagrama de dispersión de los puntos $(x, \ln y)$.

2. **ESCRIBIR** Dada una tabla de valores, explica cómo puedes determinar si una función exponencial es un buen modelo para un conjunto de pares de datos (x, y).

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, determina el tipo de función representada por la tabla. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3.

x	0	3	6	9	12	15
y	0.25	1	4	16	64	256

4.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

5.

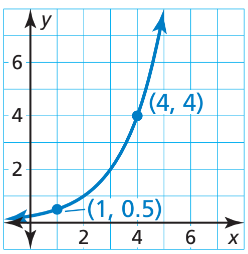
x	5	10	15	20	25	30
y	4	3	7	16	30	49

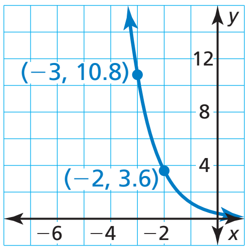
6.

x	−3	1	5	9	13
y	8	−3	−14	−25	−36

En los Ejercicios 7–16, escribe una función exponencial $y = ab^x$, cuya gráfica pasa por los puntos dados. *(Consulta el Ejemplo 2).*

7. (1, 3), (2, 12)
8. (2, 24), (3, 144)
9. (3, 1), (5, 4)
10. (3, 27), (5, 243)
11. (1, 2), (3, 50)
12. (1, 40), (3, 640)
13. (−1, 10), (4, 0.31)
14. (2, 6.4), (5, 409.6)

15.


16.


ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 17 y 18, describe y corrige el error al determinar el tipo de función representada por los datos.

17.

x	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

× 3 × 3 × 3 × 3

Los valores de salida tienen una razón común de 3, entonces los datos representan una función lineal.

18.

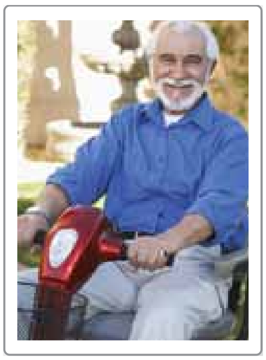
x	−2	−1	1	2	4
y	3	6	12	24	48

× 2 × 2 × 2 × 2

Los valores de salida tienen una razón común de 2, entonces los datos representan una función exponencial.

19. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Una tienda vende motonetas motorizadas. La tabla muestra los números *y* de motonetas vendidas durante el año *x* en que la tienda ha estado abierta. Escribe una función que represente los datos. *(Consulta el Ejemplo 3).*

x	*y*
1	9
2	14
3	19
4	25
5	37
6	53
7	71



20. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La tabla muestra los números y de visitas a un sitio web durante el mes número x. Escribe una función que represente los datos. Luego usa tu modelo para predecir el número de visitas después de 1 año.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	22	39	70	126	227	408	735

En los Ejercicios 21–24, determina si los datos muestran una relación exponencial. Luego escribe una función que represente los datos.

21.

x	1	6	11	16	21
y	12	28	76	190	450

22.

x	−3	−1	1	3	5
y	2	7	24	68	194

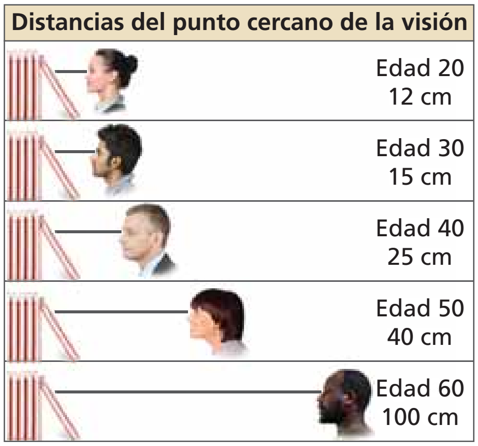
23.

x	0	10	20	30	40	50	60
y	66	58	48	42	31	26	21

24.

x	−20	−13	−6	1	8	15
y	25	19	14	11	8	6

25. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Tu punto cercano de la visión es el punto más cercano en que tus ojos pueden ver nítidamente un objeto. El diagrama muestra el punto cercano y (en centímetros) a la edad x (en años). Crea un diagrama de dispersión para los pares de datos (x, ln y) para demostrar que un modelo exponencial debería ajustarse bien a los pares de datos originales (x, y). Luego escribe un modelo exponencial para los datos originales. *(Consulta el Ejemplo 4).*



26. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Usa los datos del Ejercicio 19. Crea un diagrama de dispersión de los pares de datos (x, ln y) para demostrar que un modelo exponencial debería ajustarse bien a los pares de datos originales (x, y). Luego escribe un modelo exponencial para los datos originales.

En los Ejercicios 27–30, crea un diagrama de dispersión de los puntos (x, ln y) para determinar si un modelo exponencial se ajusta a los datos. Si es así, halla un modelo exponencial para los datos.

27.

x	1	2	3	4	5
y	18	36	72	144	288

28.

x	1	4	7	10	13
y	3.3	10.1	30.6	92.7	280.9

29.

x	−13	−6	1	8	15
y	9.8	12.2	15.2	19	23.8

30.

x	−8	−5	−2	1	4
y	1.4	1.67	5.32	6.41	7.97

31. **USAR HERRAMIENTAS** Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo exponencial para los datos en el Ejercicio 19. Luego usa el modelo para predecir el número de motonetas motorizadas vendidas en el décimo año. *(Consulta el Ejemplo 5).*

32. **USAR HERRAMIENTAS** Un doctor mide el pulso de un astronauta y (en latidos por minuto) en distintas horas x (en minutos) después de que el astronauta ha terminado de hacer ejercicios. Los resultados se muestran en la tabla. Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo exponencial para los datos. Luego usa el modelo para predecir el pulso del astronauta después de 16 minutos.

x	y
0	172
2	132
4	110
6	92
8	84
10	78
12	75

33. **USAR HERRAMIENTAS** Un objeto a una temperatura de 160° es retirado de un horno y colocado en una habitación a 20°C. La tabla muestra las temperaturas d (en grados Celsius) en horas seleccionadas t (en horas) después de que el objeto fue retirado del horno. Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo logarítmico de la forma $t = a + b \ln d$ que represente los datos. Estima cuánto tiempo demora el objeto en enfriarse hasta llegar a los 50°C. *(Consulta el Ejemplo 6).*

d	160	90	56	38	29	24
t	0	1	2	3	4	5

34. **USAR HERRAMIENTAS** Los números f en una cámara controlan la cantidad de luz que ingresa en la cámara. Imagina que s es una medida de la cantidad de luz que impacta la película y que f es el número f. La tabla muestra varios números f en una cámara de 35 milímetros. Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo logarítmico de la forma $s = a + b \ln f$ que represente los datos. Estima la cantidad de luz que impacta en la película si $f = 5.657$.

f	*s*
1.414	1
2.000	2
2.828	3
4.000	4
11.314	7

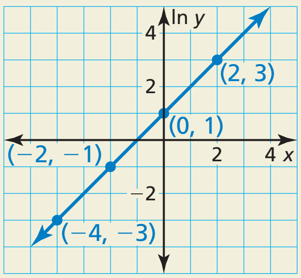
35. **SACAR CONCLUSIONES** La tabla muestra el peso promedio (en kilogramos) de un bacalao del Atlántico del Golfo de Maine que tiene x años de edad.

Edad, *x*	1	2	3	4	5
Peso, *y*	0.751	1.079	1.702	2.198	3.438

a. Demuestra que un modelo exponencial se ajusta a los datos. Luego, halla un modelo exponencial para los datos.

b. ¿En qué porcentaje aumenta cada año el peso de un bacalao del Atlántico en este periodo de tiempo? Explica.

36. **¿CÓMO LO VES?** La gráfica muestra un conjunto de puntos de datos $(x, \ln y)$. ¿Los pares de datos (x, y) se ajustan a un patrón exponencial? Explica tu razonamiento.



37. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que es posible hallar un modelo logarítmico de la forma $d = a + b \ln t$ para los datos en el Ejercicio 33. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica.

38. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** ¿Es posible escribir y como una función exponencial de x? Explica tu razonamiento. (Presupón que p es positivo).

x	*y*
1	p
2	$2p$
3	$4p$
4	$8p$
5	$16p$

39. **PENSAMIENTO CRÍTICO** Plantas un plantón de girasol en tu jardín. La altura h (en centímetros) del plantón después de t semanas se puede representar mediante la *función logística*

$$h(t) = \frac{256}{1 + 13e^{-0.65t}}.$$

a. Halla el tiempo que demora el plantón de girasol en alcanzar una altura de 200 centímetros.

b. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función. Interpreta el significado de la asíntota en el contexto de esta situación.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Indica si x y y están en una relación proporcional. Explica tu razonamiento. *(Manual de revisión de destrezas)*

40. $y = \frac{x}{2}$ **41.** $y = 3x - 12$ **42.** $y = \frac{5}{x}$ **43.** $y = -2x$

Identifica el foco, la directriz y el eje de simetría de la parábola. Luego haz una gráfica de la ecuación. *(Sección 2.3)*

44. $x = \frac{1}{8}y^2$ **45.** $y = 4x^2$ **46.** $x^2 = 3y$ **47.** $y^2 = \frac{2}{5}x$

6.5–6.7 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

ecuaciones exponenciales, *pág. 334*
ecuaciones logarítmicas, *pág. 335*

Conceptos Esenciales

Sección 6.5

Propiedades de los logaritmos, *pág. 328*
Fórmula de cambio de base, *pág. 329*

Sección 6.6

Propiedad de igualdad para ecuaciones exponenciales, *pág. 334*
Propiedad de igualdad para ecuaciones logarítmicas, *pág. 335*

Sección 6.7

Clasificar datos, *pág. 342*
Escribir funciones exponenciales, *pág. 343*
Usar la regresión exponencial y logarítmica, *pág. 345*

Prácticas matemáticas

1. Explica cómo usaste las propiedades de los logaritmos para reescribir la función en la parte (b) del Ejercicio 45 de la página 332.
2. ¿Cómo puedes usar casos para analizar el argumento dado en el Ejercicio 46 de la página 339?

Tarea de desempeño

Medir desastres naturales

En 2005, un temblor de 4.1 en la escala de Richter apenas sacudió la ciudad de Ocotillo, California, y prácticamente no ocasionó daños. Pero en 1906, un terremoto de un estimado de 8.2 en la misma escala devastó la ciudad de San Francisco. ¿El doble de la medida en la escala de Richter significa el doble de la intensidad del terremoto?

Para explorar las respuestas a estas preguntas y más, visita ***BigIdeasMath.com***.

Repaso del capítulo

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

6.1 Funciones de crecimiento y decremento exponencial *(págs. 295–302)*

Indica si la función $y = 3^x$ representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego haz una gráfica de la función.

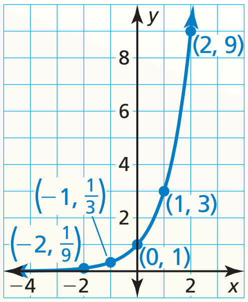
Paso 1 Identifica el valor de la base. La base, 3, es mayor que 1, entonces la función representa crecimiento exponencial.

Paso 2 Haz una tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

Paso 3 Marca los puntos de la tabla.

Paso 4 Dibuja, de *izquierda a derecha*, una curva suave que comience justo sobre el eje x, pase por los puntos marcados y se mueva hacia arriba a la derecha.



Indica si la función representa crecimiento exponencial o decremento exponencial. Identifica el porcentaje de aumento o disminución. Luego haz una gráfica de la función.

1. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **2.** $y = 5^x$ **3.** $f(x) = (0.2)^x$

4. Depositas \$1500 en una cuenta que paga 7% de interés anual. Halla el balance después de 2 años si el interés se compone diariamente.

6.2 La base natural *e* *(págs. 303–308)*

Simplifica cada expresión.

a. $\dfrac{18e^{13}}{2e^7} = 9e^{13-7} = 9e^6$ **b.** $(2e^{3x})^3 = 2^3(e^{3x})^3 = 8e^{9x}$

Simplifica cada expresión.

5. $e^4 \cdot e^{11}$ **6.** $\dfrac{20e^3}{10e^6}$ **7.** $(-3e^{-5x})^2$

Indica si la función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego haz una gráfica de la función.

8. $f(x) = \frac{1}{3}e^x$ **9.** $y = 6e^{-x}$ **10.** $y = 3e^{-0.75x}$

6.3 Logaritmos y funciones logarítmicas *(págs. 309–316)*

Halla el inverso de la función $y = \ln(x - 2)$.

$y = \ln(x - 2)$ Escribe la función original.

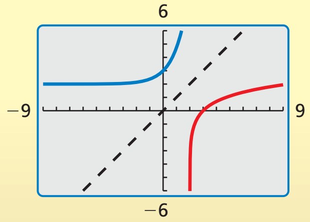
$x = \ln(y - 2)$ Intercambia x por y.

$e^x = y - 2$ Escribe en forma exponencial.

$e^x + 2 = y$ Suma 2 a cada lado.

▶ El inverso de $y = \ln(x - 2)$ es $y = e^x + 2$.

Verifica



Las gráficas parecen ser reflexiones entre sí en la recta $y = x$. ✓

Evalúa el logaritmo.

11. $\log_2 8$ **12.** $\log_6 \frac{1}{36}$ **13.** $\log_5 1$

Halla el inverso de la función.

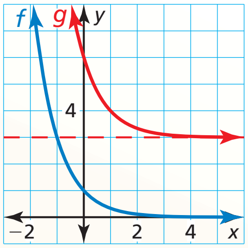
14. $f(x) = 8^x$ **15.** $y = \ln(x - 4)$ **16.** $y = \log(x + 9)$

17. Haz una gráfica de $y = \log_{1/5} x$.

6.4 Transformaciones de funciones exponenciales y logarítmicas *(págs. 317–324)*

Describe la transformación de $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ representado por $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 3$. Luego haz una gráfica de cada función.

Observa que la función es de la forma $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-h} + k$, donde $h = 1$ y $k = 3$.



▶ Entonces, la gráfica de g es una traslación 1 unidad hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba de la gráfica de f.

Describe la transformación de f representada por g. Luego haz una gráfica de cada función.

18. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^{-5x} - 8$ **19.** $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = \frac{1}{2}\log_4(x + 5)$

Escribe una regla para g.

20. Imagina que la gráfica de g es un alargamiento vertical por un factor de 3, seguido de una traslación 6 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba de la gráfica $f(x) = e^x$.

21. Imagina que la gráfica de g es una traslación 2 unidades hacia abajo, seguida de una reflexión en el eje y de la gráfica de $f(x) = \log x$.

6.5 Propiedades de los logaritmos *(págs. 327–332)*

Desarrolla $\ln \frac{12x^5}{y}$.

$$\ln \frac{12x^5}{y} = \ln 12x^5 - \ln y \quad \text{Propiedad del cociente}$$

$$= \ln 12 + \ln x^5 - \ln y \quad \text{Propiedad del producto}$$

$$= \ln 12 + 5 \ln x - \ln y \quad \text{Propiedad de la potencia}$$

Desarrolla o reduce la expresión logarítmica.

22. $\log_8 3xy$ **23.** $\log 10x^3y$ **24.** $\ln \frac{3y}{x^5}$

25. $3 \log_7 4 + \log_7 6$ **26.** $\log_2 12 - 2 \log_2 x$ **27.** $2 \ln x + 5 \ln 2 - \ln 8$

Usa la fórmula de cambio de base para evaluar el logaritmo.

28. $\log_2 10$ **29.** $\log_7 9$ **30.** $\log_{23} 42$

6.6 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas (págs. 333–340)

Resuelve $\ln(3x - 9) = \ln(2x + 6)$.

$\ln(3x - 9) = \ln(2x + 6)$	Escribe la ecuación original.
$3x - 9 = 2x + 6$	Propiedad de igualdad para ecuaciones logarítmicas
$x - 9 = 6$	Resta $2x$ de cada lado.
$x = 15$	Suma 9 a cada lado.

Verifica

$$\ln(3 \cdot 15 - 9) \stackrel{?}{=} \ln(2 \cdot 15 + 6)$$
$$\ln(45 - 9) \stackrel{?}{=} \ln(30 + 6)$$
$$\ln 36 = \ln 36 \checkmark$$

Resuelve la ecuación. Verifica si hay soluciones extrañas.

31. $5^x = 8$

32. $\log_3(2x - 5) = 2$

33. $\ln x + \ln(x + 2) = 3$

Resuelve la desigualdad.

34. $6^x > 12$

35. $\ln x \leq 9$

36. $e^{4x-2} \geq 16$

6.7 Representar con funciones exponenciales y logarítmicas (págs. 341–348)

Escribe una función exponencial cuya gráfica pase por (1, 3) y (4, 24).

Paso1 Sustituye las coordenadas de los dos puntos dados en $y = ab^x$.

$3 = ab^1$	Ecuación 1: Sustituye 3 por y y 1 por x.
$24 = ab^4$	Ecuación 2: Sustituye 24 por y y 4 por x.

Paso 2 Resuelve para a en la Ecuación 1 para obtener $a = \frac{3}{b}$ y sustituye esta expresión por a en la Ecuación 2.

$24 = \left(\frac{3}{b}\right)b^4$	Sustituye $\frac{3}{b}$ por a en la Ecuación 2.
$24 = 3b^3$	Simplifica.
$8 = b^3$	Divide cada lado entre 3.
$2 = b$	Saca la raíz cúbica de cada lado.

Paso 3 Determina que $a = \frac{3}{b} = \frac{3}{2}$.

► Entonces, la función exponencial es $y = \frac{3}{2}(2^x)$.

Escribe un modelo exponencial para los pares de datos (x, y).

37. (3, 8), (5, 2)

38.

x	1	2	3	4
$\ln y$	1.64	2.00	2.36	2.72

39. Una tienda de zapatos vende un nuevo modelo de zapatilla de básquetbol. La tabla muestra los pares vendidos s en el tiempo t (en semanas). Usa una calculadora gráfica para hallar un modelo logarítmico de la forma $s = a + b \ln t$ que represente los datos. Estima cuántos pares de zapatillas se venden después de 6 semanas.

Semana, t	1	3	5	7	9
Pares vendidos, s	5	32	48	58	65

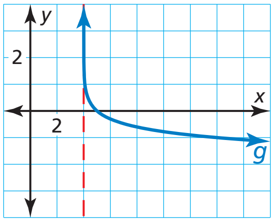
6 Prueba del capítulo

Haz una gráfica de la ecuación. Expresa el dominio, el rango y la asíntota.

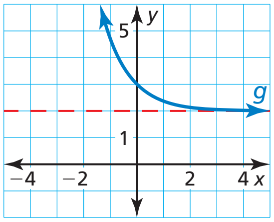
1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **2.** $y = \log_{1/5} x$ **3.** $y = 4e^{-2x}$

Describe la transformación de *f* representada por *g*. Luego escribe una regla para *g*.

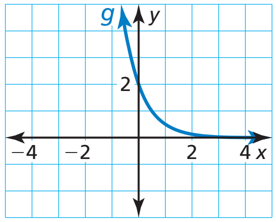
4. $f(x) = \log x$



5. $f(x) = e^x$



6. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



Evalúa el logaritmo. Usa $\log_3 4 \approx 1.262$ y $\log_3 13 \approx 2.335$, si es necesario.

7. $\log_3 52$ **8.** $\log_3 \frac{13}{9}$ **9.** $\log_3 16$ **10.** $\log_3 8 + \log_3 \frac{1}{2}$

11. Describe las semejanzas y diferencias al resolver las ecuaciones $4^{5x-2} = 16$ y $\log_4(10x + 6) = 1$. Luego resuelve cada ecuación.

12. Sin calcular, determina si $\log_5 11$, $\frac{\log 11}{\log 5}$, y $\frac{\ln 11}{\ln 5}$ son expresiones equivalentes. Explica tu razonamiento.

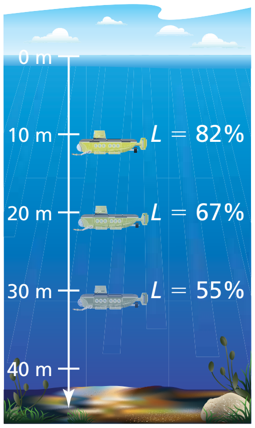
13. La cantidad y de petróleo recolectado por una compañía petrolera que perfora en la plataforma continental de los Estados Unidos se puede representar mediante $y = 12.263 \ln x - 45.381$, donde y se mide en miles de millones de barriles y x es el número de pozos perforados. ¿Aproximadamente cuántos barriles de petróleo esperarías recolectar después de perforar 1000 pozos? Halla la función inversa y describe la información que obtengas al hallar el inverso.

14. El porcentaje L de luz superficial que se filtra a través de los cuerpos de agua se puede representar mediante la función exponencial $L(x) = 100e^{kx}$, donde k es una medida de la turbidez del agua y x es la profundidad (en metros) por debajo de la superficie.

a. Un sumergible de recreo viaja en agua clara con un valor k de aproximadamente -0.02. Escribe una función que dé el porcentaje de luz superficial que se filtra a través del agua clara como una función de profundidad.

b. Indica si tu función en la parte (a) representa crecimiento exponencial o decremento exponencial. Explica tu razonamiento.

c. Estima el porcentaje de luz superficial disponible a una profundidad de 40 metros.

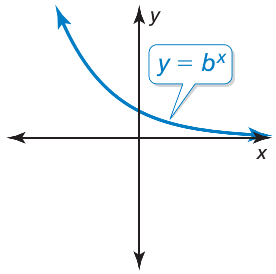


15. La tabla muestra los valores y (en dólares) de una motonieve nueva después de x años de propiedad. Describe tres maneras diferentes de hallar un modelo exponencial que represente los datos. Luego escribe y usa un modelo para hallar el año en el que la motonieve valga $2500.

Año, *x*	0	1	2	3	4
Valor, *y*	4200	3780	3402	3061.80	2755.60

6 Evaluación acumulativa

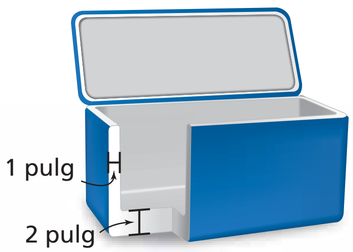
1. Selecciona todo valor de b para la ecuación $y = b^x$ que pudiera generar la gráfica que se muestra.



1.08	0.94	e^2
2.04	$e^{-1/2}$	$\frac{5}{4}$

2. Tu amigo dice que se gana más interés si una cuenta paga interés compuesto continuamente en vez de pagar interés compuesto diariamente. ¿Estás de acuerdo con tu amigo? Justifica tu respuesta.

3. Estás diseñando una nevera portátil rectangular para picnic con una longitud de cuatro veces su ancho y una altura del doble de su ancho. La nevera portátil tiene aislamiento de 1 pulgada de grosor en cada uno de los cuatro lados y 2 pulgadas de grosor en la parte superior e inferior.



a. Imagina que x representa el ancho de la nevera portátil. Escribe una función polinomial T que dé el volumen del prisma rectangular formado por las superficies exteriores de la nevera portátil.

b. Escribe una función polinomial C para el volumen del interior de la nevera portátil.

c. Imagina que I es una función polinomial que representa el volumen del aislamiento. ¿Cómo se relaciona I con T y C?

d. Escribe I en forma estándar. ¿Cuál es el volumen del aislamiento si el ancho de la nevera portátil es de 8 pulgadas?

4. ¿Cuál es la solución de la desigualdad logarítmica $-4 \log_2 x \geq -20$?

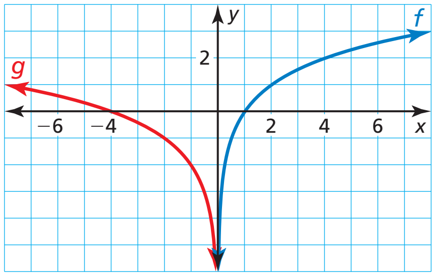
Ⓐ $x \leq 32$

Ⓑ $0 \leq x \leq 32$

Ⓒ $0 < x \leq 32$

Ⓓ $x \geq 32$

5. Describe la transformación de $f(x) = \log_2 x$ representada por la gráfica de g.



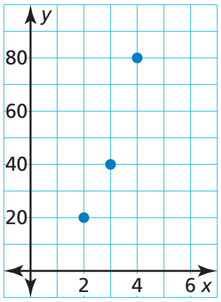
6. Imagina que $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 1$, $g(x) = 2x - 3x^4 - 6x^3 + 5$, y $h(x) = -7 + x^2 + x$. Ordena las siguientes funciones de menor a mayor grado.

A. $(f + g)(x)$ **B.** $(hg)(x)$

C. $(h - f)(x)$ **D.** $(fh)(x)$

7. Escribe un modelo exponencial que represente cada conjunto de datos. Compara ambos modelos.

a.



b.

x	2	3	4	5	6
y	4.5	13.5	40.5	121.5	364.5

8. Elige un método para resolver cada función cuadrática. Explica el método que elegiste.

a. $x^2 + 4x = 10$ **b.** $x^2 = -12$

c. $4(x - 1)^2 = 6x + 2$ **d.** $x^2 - 3x - 18 = 0$

9. En el concurso anual de lanzar calabazas, los concursantes compiten para ver a quién pertenece la catapulta que lance las calabazas a mayor distancia. La tabla muestra las distancias horizontales y (en pies) que recorre una calabaza si se lanza en distintos ángulos x (en grados). Crea un diagrama de dispersión de los datos. ¿Los datos muestran una relación lineal, cuadrática o exponencial? Usa la tecnología para hallar un modelo para los datos. Halla el ángulo(s) en que una calabaza lanzada viaja 500 pies.

Ángulo (grados), x	20	30	40	50	60	70
Distancia (pies), y	372	462	509	501	437	323